



Chương

Bài 3.

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH

A

Lý thuyết

1. Diện tích hình thang cong



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành, $x=a$ và

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

- **Trường hợp** $f(x) > 0$ **trên** $[a; b]$,

Khi đó diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, Ox và hai

đường thẳng $x=a$, $x=b$:

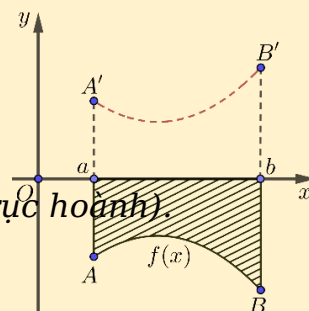
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- **Trường hợp** $f(x) \leq 0$ **trên** $[a; b]$, ta có $-f(x) \geq 0$

S hình thang cong $aABb = S$ hình thang cong $aA'B'b$.

($aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành).

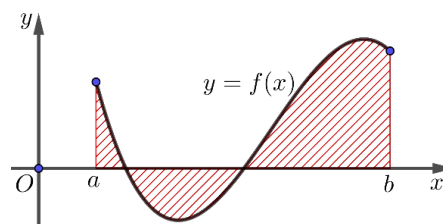
$$S = S_{aABb} = S_{aA'B'b} = \int_a^b (-f(x)) dx$$



Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



Chú ý

» Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì:

$$b \text{ ... } a \text{ ... } |b \text{ ... } a \text{ ... }|$$



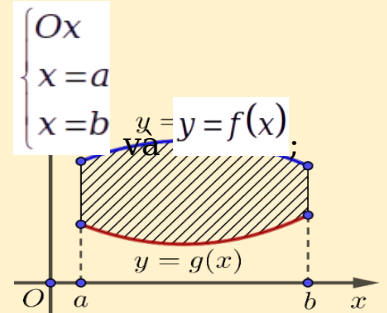
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, $x=a$ và $x=b$

Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $x=a$, $x=b$.

■ **Xét trường hợp** $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b]$

Gọi S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y=g(x)$.

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



Tổng quát:

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ và hai đường

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

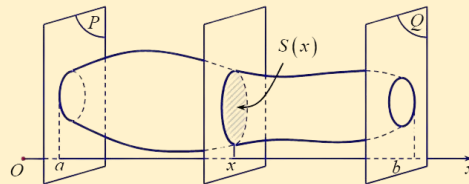
thẳng $x=a$, $x=b$ được tính:

2. Thể tích hình khối:



Định nghĩa

■ Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , $(a \leq x \leq b)$



Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Khi đó thể tích của vật thể B được xác định:

3. Thể tích khối tròn xoay:

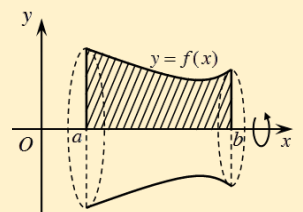


Định nghĩa

■ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox , và hai đường thẳng

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$x=a$, $x=b$ quanh trục Ox :





Các dạng bài tập

Dạng 1. Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ



Phương

■ **Xác định công thức diện tích hình phẳng:**

» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích

» **Bước 4:** Phá trị tuyệt đối: Lấy công thức hàm số của đồ thị nằm trên trừ công thức hàm số của đồ thị nằm dưới

■ **Xác định công thức thể tích khối tròn xoay:**

» **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.

» **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.

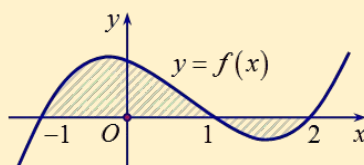
$$V = \rho \int_a^b f^2(x) dx$$

» **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích



Ví dụ 1.1.

Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Xây dựng công thức tính S ?



Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm $x = -1; x = 1; x = 2$.

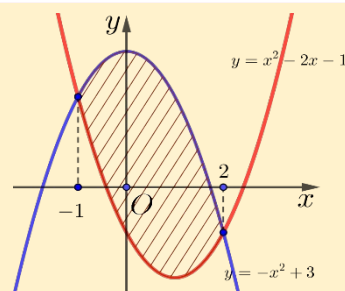
$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 [f(x) - 0] dx + \int_1^2 [0 - f(x)] dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

Do đó



Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Xác định công thức diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.





Lời giải

$$(H): \begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ y = x^2 - 2x - 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases}$$

Ta có:

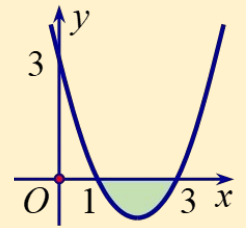
$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

Ta có: (do trên đoạn $[-1; 2]$ phần đồ thị $y = -x^2 + 3$ nằm trên đồ thị $y = x^2 - 2x - 1$).



Ví dụ 1.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox . Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức gì?



Lời giải

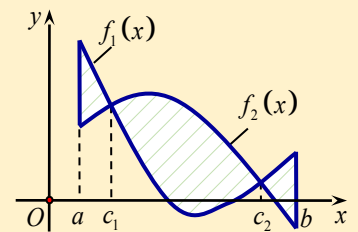
Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox :

$$V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$$



Ví dụ 1.4.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và đường thẳng $x = a$, $x = b$. Công thức tính diện tích của hình (H) là?



Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y = f_1(x)$ cắt $y = f_2(x)$ tại hai điểm $x = c_1; x = c_2$.

Xét trong $[a; c_1] : f_1(x) \geq f_2(x)$;

Xét trong $[c_1; c_2] : f_1(x) \leq f_2(x)$ và

Xét trong $[c_2; b] : f_1(x) \geq f_2(x)$

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_a^{c_1} (f_1(x) - f_2(x)) dx + \int_{c_1}^{c_2} (f_2(x) - f_1(x)) dx + \int_{c_2}^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

Vậy



▮ Dạng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, Ox và $x=a$, $x=b$



Phương

$$\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=a; x=b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b f(x) dx$$

✚ Diện tích hình phẳng giới hạn:

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» **Bước 1:** Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b) (a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b)$.

» **Bước 2:** Tính
$$S = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_n}^b f(x) dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

✚ **Chú ý:** Ngoài cách trên ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối



Ví dụ 2.1.

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x=1$, $x=2$ bằng bao nhiêu?

✚ Lời giải

Diện tích hình phẳng là
$$S = \int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$



Ví dụ 2.2.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

✚ Lời giải

Xét phương trình
$$(x-2)^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}.$$

Ta có:
$$S = \int_1^2 |(x-2)^2-1| dx = \int_1^2 |x^2-4x+3| dx = \int_1^2 (x^2-4x+3) dx = \frac{2}{3}.$$



Ví dụ 2.3.

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-4$, $x=1$

✚ Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm:
$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}.$$



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
VT		+	0	-	0	+

Diện tích:
$$S = \int_{-4}^1 |x^2 - 2x| dx = \int_{-4}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-4}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = 38.$$



Ví dụ 2.4.

Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	2
$x^3 - 1$	-	0	+

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1| dx = \int_0^1 |x^3 - 1| dx + \int_1^2 |x^3 - 1| dx = \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx = \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$



Ví dụ 2.5.

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục Ox , $x = 1$ và

$$x = 4 \text{ được tính bởi công thức } V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx.$$



▮ Dạng 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f(x)$, $y=g(x)$ và $x=a$, $x=b$



Phương pháp

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a; x=b \end{cases} \rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

⌘ Diện tích hình phẳng giới hạn:

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

» **Bước 1:** Giải $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b) (a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b)$

» **Bước 2:** Tính
$$S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

⌘ **Chú ý:** Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.



Ví dụ 3.1.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^4 - 4x^2 + 4$, $y=x^2$, đường thẳng $x=0$ và $x=1$.

⌘ Lời giải

$$S = \int_0^1 |x^4 - 4x^2 + 4 - x^2| dx = \int_0^1 |x^4 - 5x^2 + 4| dx$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\text{Vì } x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1]$$

$$\text{Nên } S = \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 = \frac{38}{15}.$$



Ví dụ 3.2.

Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3 - x$ có diện tích

⌘ Lời giải

$$x(1-x) = x^3 - x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3 - x$.

$$\text{Khi đó } S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 + x^2 - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$



$$= \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \quad (\text{đvdt}).$$



Ví dụ 3.3.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$;

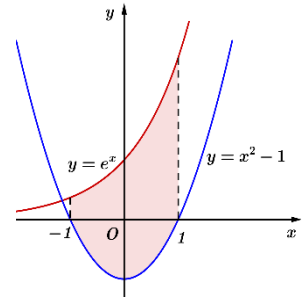
(2) $y = \sin x, y = x, x = \frac{\rho}{2}, x = \rho$.

Lời giải

(1) $y = e^x, y = x^2 - 1, x = -1, x = 1$;

Xét $x \in [-1; 1]$: $\begin{cases} e^x > 0 \\ -(x^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow e^x - (x^2 - 1) > 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow |e^x - (x^2 - 1)| = e^x - x^2 + 1$

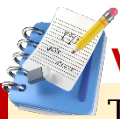
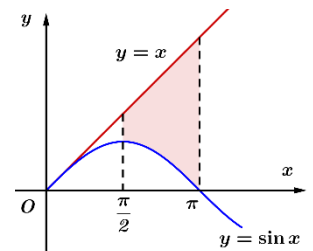
Diện tích $S = \int_{-1}^1 |e^x - (x^2 - 1)| dx$
 $= \int_{-1}^1 (e^x - x^2 + 1) dx = \left(e^x - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{3e^2 + 4e - 3}{3e}$



(2) $y = \sin x, y = x, x = \frac{\rho}{2}, x = \rho$.

Xét $x \in \left[\frac{\rho}{2}; \rho \right]$: $\sin x \leq 1 < x \Rightarrow \sin x - x < 0 \Rightarrow |\sin x - x| = x - \sin x$

Diện tích $S = \int_{\frac{\rho}{2}}^{\rho} |\sin x - x| dx = \int_{\frac{\rho}{2}}^{\rho} (x - \sin x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \cos x \right) \Big|_{\frac{\rho}{2}}^{\rho} = \frac{3\rho^2}{8} - 1$



Ví dụ 3.4.

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y = e^x, y = x^2, x = 0, x = 1$;

(2) $y = \cos x, y = x + 1, x = \frac{\rho}{2}, x = \rho$.

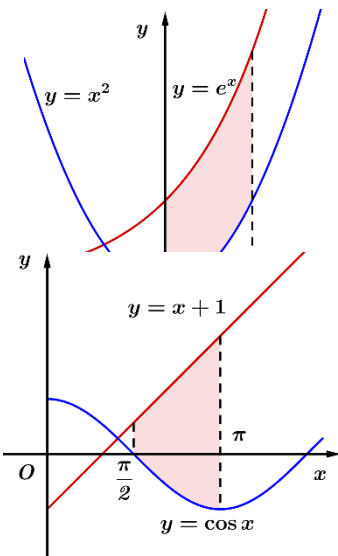
Lời giải

(1) $y = e^x, y = x^2, x = 0, x = 1$;

Xét $x \in [0; 1]$: $\begin{cases} e^x \geq 1 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} e^x \geq 1 \\ -x^2 \geq -1 \Rightarrow e^x - x^2 \geq 0 \Rightarrow |e^x - x^2| = e^x - x^2 \end{cases}$

Diện tích $S = \int_0^1 |e^x - x^2| dx = \int_0^1 (e^x - x^2) dx = \left(e^x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = e - \frac{4}{3}$

(2) $y = \cos x, y = x + 1, x = \frac{\rho}{2}, x = \rho$.





Xét $x \in \left[\frac{p}{2}; p\right]$: $\cos x \leq 1 < x+1 \Rightarrow \cos x - (x+1) < 0 \Rightarrow |\cos x - (x+1)| = x+1 - \cos x$

$$S = \int_{\frac{p}{2}}^p |\cos x - (x+1)| dx = \int_{\frac{p}{2}}^p (x+1 - \cos x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x - \sin x \right) \Big|_{\frac{p}{2}}^p = \frac{3p^2 + 4p + 8}{8}$$

Diện tích



Ví dụ 3.5.

Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường $(P): y = \frac{x^2 - 2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y = x-1$ và $x=a, x=2a$ ($a>1$) bằng $\ln 3$?

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P): y = \frac{x^2 - 2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y = x-1$ và $x=a, x=2a$ ($a>1$) là

$$S = \int_a^{2a} \left| \frac{x^2 - 2x}{x-1} - (x-1) \right| dx = \int_a^{2a} \left| -\frac{1}{x-1} \right| dx = \left| \ln|x-1| \right|_a^{2a} = \left| \ln \frac{2a-1}{a-1} \right| = \ln 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=\frac{4}{5} \end{cases}$$

Do $a>1$ nên $a=2$.

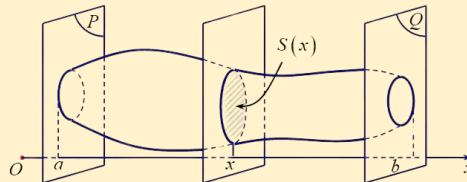


▮ Dạng 4. Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành



Phương

- Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , $(a \leq x \leq b)$



Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Khi đó thể tích của vật thể B được xác định:



Ví dụ 4.1.

Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có

👉 Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = 3x \cdot x^2 = 3x^3$.

$$V = \int_1^3 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_1^3 = 60$$

Khi đó



Ví dụ 4.2.

Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=p$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq p$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$

👉 Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = (2\sqrt{\sin x})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \sin x$.

$$V = \int_0^p S(x) dx = \int_0^p \sqrt{3} \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^p = 2\sqrt{3}$$



Ví dụ 4.3.

Cho phần vật thể $(\mathcal{V})$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\mathcal{V})$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$), ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\mathcal{V}} = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 x^2(2-x) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Ví dụ 4.4.

Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000p$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là:

$$\sqrt{m^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V = p \int_{-|m|}^{|m|} (m^2 - x^2) dx = p \left(m^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-|m|}^{|m|} = \frac{4pm^2|m|}{3}$$

$$\text{Ta có: } V < 1000p \Leftrightarrow \frac{4pm^2|m|}{3} < 1000p \Leftrightarrow |m|^3 < 750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750} < m < \sqrt[3]{750}.$$

Ta có $\sqrt[3]{750} \approx 9,08$ và $m \neq 0$.

Suy ra, các giá trị m nguyên là $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của m .



▮ Dạng 5. Thể tích khối tròn xoay



Phương pháp

✚ Xoay miền hình phẳng giới hạn:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ Ox; x = a; x = b \end{cases}$$

quanh trục Ox .

» Bước 1:

Giải

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Ví dụ 5.1.

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox : $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 2$.

👉 Lời giải

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$$

Thể tích khối tròn xoay



Ví dụ 5.2.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ quanh

👉 Lời giải

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\pi \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{2}$$

Thể tích khối tròn xoay cần tính là



Ví dụ 5.3.

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong quay quanh trục hoành

(1) $y = \sqrt{2 + \sin x}$ Ox và $x = 0, x = p$.

(2) $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$

👉 Lời giải

(1) $y = \sqrt{2 + \sin x}, Ox$ và $x = 0, x = p$;

$$V = \pi \int_0^p (\sqrt{2 + \sin x})^2 dx = \pi \int_0^p (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^p = 2\pi(p + 1)$$

Ta có:

(2) $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$.



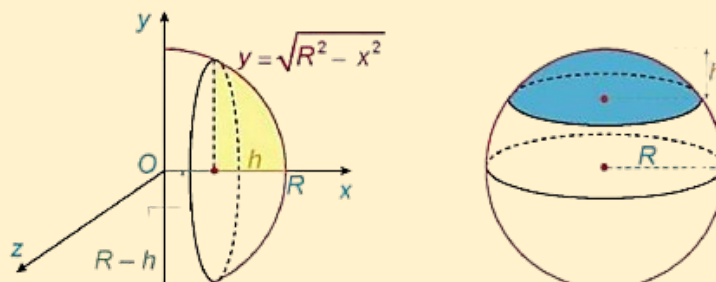
$$V = \rho \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx = \rho \int_0^2 (x^4 + 6x^2 + 9) dx = \frac{202}{5} \rho$$

Ta có:



Ví dụ 5.4.

Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h ($0 < h \leq R$) sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h$, $x = R$ xung quanh trục Ox . Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



Lời giải

Ta có thể tích của khối chỏm cầu là

$$V = \rho \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx = \rho \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{R-h}^R = \rho \left[R^2 \cdot h - Rh(R-h) - \frac{h^3}{3} \right] = \rho \left(Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)$$



▮ Dạng 6. Từ đồ thị tính diện tích hình phẳng



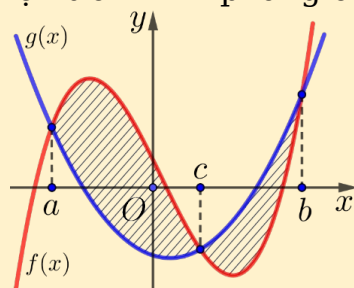
Phương

● Trường hợp 1:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow$$

diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



» **Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$$

» **Bước 2:** Xét hiệu

$f(x) - g(x)$ trên các đoạn $[a; c]; [c; b]$.

$$\begin{cases} [a; c] : f(x) - g(x) > 0 \\ [c; b] : f(x) - g(x) < 0 \end{cases}$$

Giả sử trên

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

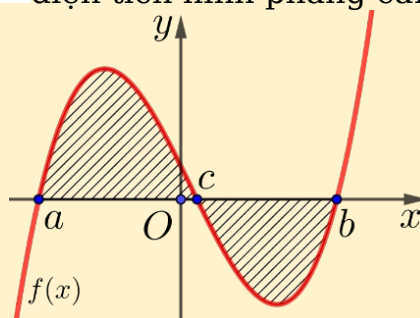
» **Bước 3:** Khi đó

$$\begin{cases} y = f(x) \\ Ox: y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

● Trường hợp 2:

diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_a^b |f(x) - 0| dx$$



» **Bước 1:** Quan sát đồ thị thấy

$$f(x) - 0 = 0 \Leftrightarrow x = c; c \in [a; b]$$

» **Bước 2:** Xét hiệu

$f(x) - 0$ trên các đoạn $[a; c]; [c; b]$.

$$\begin{cases} [a; c] : f(x) - 0 > 0 \\ [c; b] : f(x) - 0 < 0 \end{cases}$$

Giả sử trên

$$S = \int_a^b |f(x) - 0| dx = \int_a^c (f(x) - 0) dx + \int_c^b (0 - f(x)) dx$$

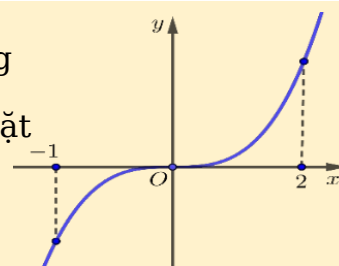


Ví dụ 6.1.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt

$$a = \int_{-1}^0 f(x) dx, \quad b = \int_0^2 f(x) dx$$

, Khi đó tính S theo $a; b$.



Lời giải

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx$$

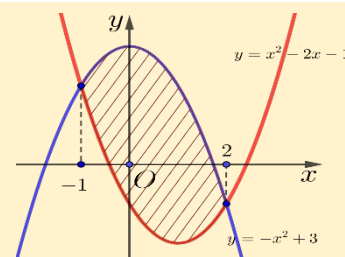
Ta có:

$$\text{Ta thấy } f(x) \geq 0 \forall x \in [0; 2]; f(x) \leq 0 \forall x \in [-1; 0] \rightarrow S = - \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b$$



Ví dụ 6.2.

Cho các hàm số $y=x^2 - 2x - 1$ và $y=-x^2 + 3$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định công thức và tính diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.



Lời giải

$$\text{Ta có: } (H): \begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ y = x^2 - 2x - 1 \end{cases} \text{ và } -x^2 + 3 = x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có:

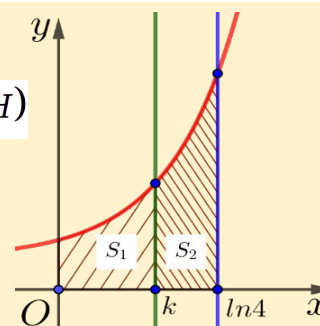
$$S = \int_{-1}^2 |(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)| dx = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = 9$$

Ta có:



Ví dụ 6.3.

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



Lời giải

$$\text{Ta có } S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1 \quad \text{và} \quad S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$$

Ta có

$$S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow k = \ln 3$$

Ta có





▮ Dạng 7. Từ diện tích hình phẳng tính giá trị hàm

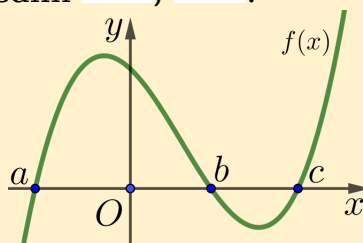


Phương

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Áp dụng định nghĩa tích phân:

Thì lúc này đề bài yêu cầu so sánh $F(b)$; $F(a)$.



Bài toán:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục có đồ thị như hình. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; c]$

So sánh $F(a); F(c); F(x), x \in [a; c]$.

» **Bước 1:** So sánh $F(a); F(b)$.

Trên $[a; b] : f(x) > 0 \rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Mà $\int_a^b f(x) dx > 0 \Rightarrow F(b) - F(a) > 0 \Leftrightarrow F(b) > F(a)$

» **Bước 2:** Tương tự so sánh $F(b); F(c)$.

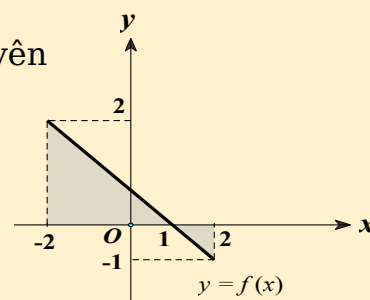
$$\begin{cases} y = f(x) \\ O x \\ x = a; x = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ O x \\ x = b; x = c \end{cases}$$



Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có một nguyên hàm là $F(x)$ trên $[-2; 1]$ đồng thời $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi các số sau: $F(2) - F(-2)$; $F(-2) - F(1)$; $F(2) - F(1)$; $F(2) - F(0)$ có bao nhiêu số dương?



👉 **Lời giải**



$$S_{\text{DCIB}} = \int_{-2}^1 f(x) dx = F(1) - F(-2) > 0$$

$$S_{\text{DIDA}} = \int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) > 0$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx$$

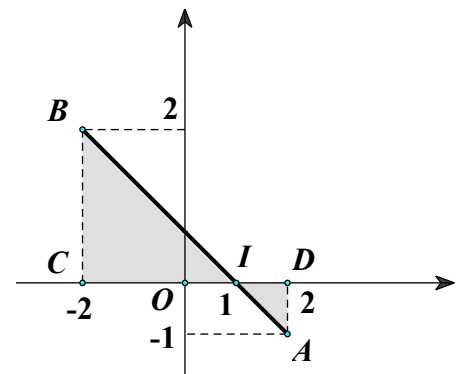
$$\Leftrightarrow F(1) - F(0) = F(1) - F(2) \Leftrightarrow F(0) = F(2)$$

$$S_{\text{DCIB}} > S_{\text{DIDA}} \Leftrightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx > \int_1^2 f(x) dx$$

Mặt khác ta có

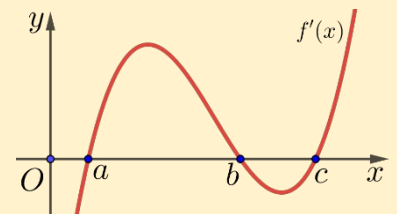
$$\Leftrightarrow F(1) - F(-2) > F(1) - F(2) \Leftrightarrow F(-2) < F(2) \Leftrightarrow F(2) - F(-2) > 0$$

Vậy $F(2) - F(-2)$ là số dương.



Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên. Hãy so sánh các số $f(a); f(b); f(c)$



Lời giải

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$f(a)$		$f(b)$	$f(c)$		$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(b) > f(c)$, $f(a) < f(b)$ nên loại phương án **B**, **C**

$$\int_a^b |f'(x)| dx > \int_b^c |f'(x)| dx$$

Mặt khác

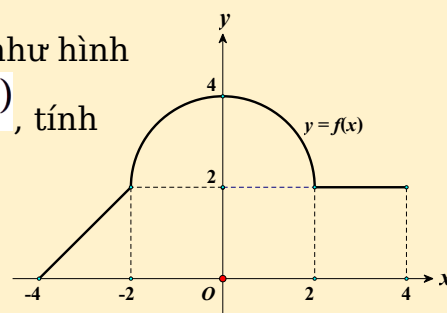
$$\Rightarrow f(x) \Big|_a^b > - f(x) \Big|_b^c \Leftrightarrow f(b) - f(a) > - f(c) + f(b) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$$

Vậy $f(a) < f(c) < f(b)$.



Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4; 4]$ như hình vẽ. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, tính giá trị của $S = F(4) - F(-4)$



Lời giải

$$S = F(4) - F(-4) = \int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx$$

$$\int_{-4}^{-2} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \quad ; \quad \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 8 + 2\pi \quad ; \quad \int_2^4 f(x) dx = 2 \cdot 2 = 4$$

Vậy $S = 14 + 2\pi$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>