SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH QUẢNG NAM	KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS NĂM HỌC 2021 - 2022
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn thi: Toán** **Thời gian: 150 phút** (*không kể thời gian giao đề*) **Ngày thi: 19/4/2022**

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1}-\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}$, với $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để $A=x-3$.

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2+2(m+2)x+m^2+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=x_1x_2$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}+2\sqrt{(2-x)(3+x)}-7=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x+y)(x+y)+y=2\\4x^2+y^2-2x-2y+4xy=-2\end{cases}$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AB = 4cm. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC và BN. Điểm D thuộc đoạn thẳng AM sao cho AM = 4AD.

a) Tính diện tích tam giác DMN.

b) Chứng minh tam giác DIN vuông cân.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (M, N lần lượt nằm trên cung nhỏ AB, AC). Gọi I là giao điểm của BM và DF, J là giao điểm của CN và DE.

a) Chứng minh EB là tia phân giác của $\widehat{DEM}$.

b) Chứng minh AM = AN.

c) Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên sao cho tổng của số đó với tổng các chữ số của nó bằng 2023.

b) Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H=\frac{x^3-1}{x^2+y+z}+\frac{y^3-1}{y^2+z+x}+\frac{z^3-1}{z^2+x+y}.$$

---------- HẾT ----------

** Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

** Họ và tên thí sinh: ………………………………….. Số báo danh: ……........*

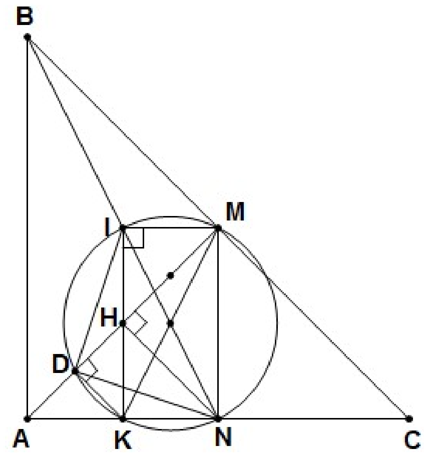
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

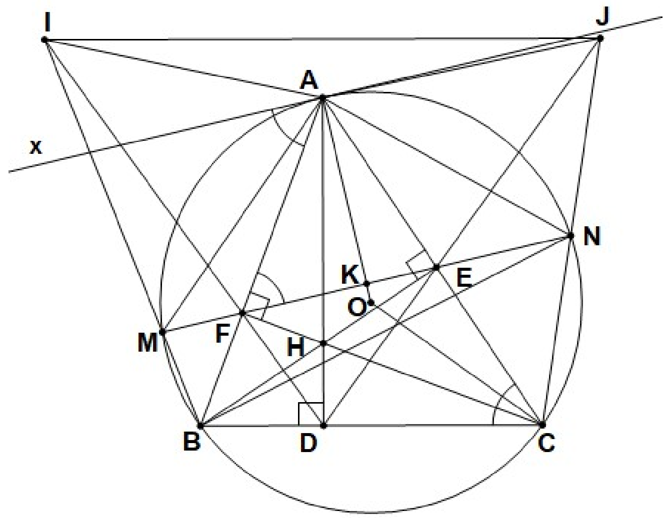
KỲ THI HỌC SINH CẤP TỈNH THCS
Năm học 2021 - 2022

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm này có 07 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
	a) Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1}-\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}$, *với* $x\ge 0$ *và* $x\ne 1$. *Rút gọn biểu thức A và tìm* x *để* $A=x-3$.	**2,5**
	$\dfrac{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}{x-1}=\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}(x-1)-2(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-2}{\sqrt{x}+1}$	0,75
	$\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$	0,75
	$\Rightarrow A=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$	0,5
	$A=x-3\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=x-3\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow x=4.$ Đối chiếu điều kiện suy ra $x=4$ là giá trị cần tìm.	0,5
	b) Tìm giá trị của tham số m *để phương trình* $x^2+2(m+2)x+m^2+1=0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1,x_2 *thỏa mãn* $\lvert x_1\rvert+\lvert x_2\rvert=x_1x_2$.	**1,5**
	$\Delta'=(m+2)^2-1.(m^2+1)=4m+3$	0,25
	+ Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'>0\Leftrightarrow 4m+3>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{4}$	0,25
Câu 1 (4,0 đ)	$x_1x_2=m^2+1$, $x_1+x_2=-2(m+2)$	0,25
	$x_1+x_2=-2(m+2)<0$ (vì $m>-\dfrac{3}{4}\Rightarrow m+2>\dfrac{5}{4}\Rightarrow -2(m+2)<0$) $x_1x_2=m^2+1>0$ Suy ra $x_1<0,x_2<0$.	0,25
	Khi đó $\lvert x_1\rvert+\lvert x_2\rvert=x_1x_2\Leftrightarrow -x_1-x_2=x_1x_2\Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+x_2)=0$ $\Leftrightarrow m^2+1-2(m+2)=0\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow m^2+1-2(m+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\m=3\end{array}\right.$ Đối chiếu điều kiện suy ra giá trị m cần tìm là $m=3$.	0,5
	*** Cách khác:** $\Delta'=(m+2)^2-1(m^2+1)=4m+3$ + Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'>0\Leftrightarrow 4m+3>0\Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{4}$ Vì $x_1x_2=m^2+1>0$ nên ta có $\lvert x_1\rvert+\lvert x_2\rvert=x_1x_2\Leftrightarrow(\lvert x_1\rvert+\lvert x_2\rvert)^2=(x_1x_2)^2\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2\lvert x_1x_2\rvert=(x_1x_2)^2$ $\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1x_2)^2\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2=(x_1x_2)^2\Leftrightarrow[-2(m+2)]^2=(m^2+1)^2$ (Giải tìm được giá trị của *m*, đối chiếu điều kiện để kết luận)	

Câu 2 (4,0 đ)	*a) Giải phương trình* $\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}+2\sqrt{(2-x)(3+x)}-7=0$	**2,0**
	Điều kiện: $\begin{cases}2-x\ge 0\\3+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le x\le 2$.	0,25
	Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}$ $(t\ge 0)\Rightarrow 2\sqrt{(2-x)(3+x)}=t^2-5$	0,25
	Phương trình đã cho trở thành: $t^2+t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=3\end{array}\right.$ (t = - 4 không thỏa).	0,5
	$t=3\Leftrightarrow\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}=3\Leftrightarrow\sqrt{(2-x)(3+x)}=2$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$	0,25
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$ (thỏa điều kiện)	0,25
	Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-2,\ x=1$.	0,25
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x+y)(x+y)+y=2\\4x^2+y^2-2x-2y+4xy=-2\end{cases}$.	**2,0**
	Cộng vế theo vế hai phương trình ta được: $(2x+y)(x+y)+4x^2+y^2-2x-y+4xy=0$ $\Leftrightarrow(2x+y)(x+y)+(2x+y)^2-(2x+y)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow(2x+y)(3x+2y-1)=0\ \Leftrightarrow 2x+y=0$ hoặc $3x+2y-1=0$	0,5
	- Với $2x+y=0\Leftrightarrow y=-2x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được: $y=2\Rightarrow x=-1$.	0,5
	- Với $3x+2y-1=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1-3x}{2}$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được: $x^2+6x+5=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=-5$.	0,25
	$x=-1\Rightarrow y=2$; $x=-5\Rightarrow y=8$.	0,25
	Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=(-1;2)$ và $(x;y)=(-5;8)$.	0,25
	*** Cách khác:** $\begin{cases}(2x+y)(x+y)+y=2\\4x^2+y^2-2x-2y+4xy=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+y)(x+y)+2(x+y)-(2x+y)=2\\(2x+y)^2-2(x+y)=-2\end{cases}$ (*) Đặt $a=2x+y,\ b=x+y$. Hệ phương trình (*) trở thành $\begin{cases}ab+2b-a=2\\a^2-2b=-2\end{cases}$ (1) Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ (1) ta được: $a^2+ab-a=0\Leftrightarrow a(a+b-1)=0\Leftrightarrow a=0$ hoặc $b=1-a$ - Với $a=0\Rightarrow b=1$, ta có hệ: $\begin{cases}2x+y=0\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$. - Với $b=1-a$ suy ra $a^2-2(1-a)=-2\Leftrightarrow a^2+2a=0\Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=-2$ + $a=0\Rightarrow b=1$ (đã xét ở trên) + $a=-2\Rightarrow b=3$, ta có hệ: $\begin{cases}2x+y=-2\\x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=8\end{cases}$. Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=(-1;2)$ và $(x;y)=(-5;8)$.	

Câu 3 (3,0 đ)	*Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AB = 4cm. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC và BN. Điểm D thuộc đoạn thẳng AM sao cho AM = 4AD.*	**3,0**
	a) Tính diện tích tam giác DMN.	**1,5**
	 *(Hình vẽ phục vụ **câu a: 0,25**; Hình vẽ phục vụ **câu b: 0,25**)*	
	Gọi H là trung điểm của AM. Suy ra $NH \perp AM$. $S_{\Delta DMN} = \frac{1}{2}.NH.DM$	0,25
	$BC = 4\sqrt{2} \Rightarrow AM = 2\sqrt{2}$ (cm)	0,25
	Ta có: $NH = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $DM = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm)	0,5
	$\Rightarrow S_{\Delta DMN} = \frac{1}{2}NH.DM = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$ (cm^2)	0,25
	*** Cách khác:** + Ta có $MD = \frac{3}{4}AD \Rightarrow S_{\Delta DMN} = \frac{3}{4}S_{\Delta AMN} = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.AM.MN = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.2.2 = \frac{3}{2}$ (cm^2)	
	b) Chứng minh tam giác DIN vuông cân.	**1,5**
	- Gọi K là trung điểm của AN. + Ta có: IM // KN và IM = KN suy ra tứ giác MNKI là hình bình hành. Hơn nữa, IK vuông góc KN nên tứ giác MNKI là hình chữ nhật.	0,25
	+ Lại có $\frac{AD}{AM} = \frac{AK}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow KD // CM$ Mà $CM \perp AM \Rightarrow CM \perp KD$	0,25
	Suy ra 5 điểm M, N, K, D, I cùng nằm trên một đường tròn đường kính KM.	0,25
	Mà đường tròn đường kính KM cũng chính là đường tròn đường kính IN. Suy ra DN vuông góc với DI.	0,25
	+ Lại có $\widehat{DIN} = \widehat{DMN} = 45^0$ nên tam giác DIN vuông cân tại D.	0,25

Câu 4 (4,0 đ)	*Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (M, N lần lượt nằm trên cung nhỏ AB, AC). Gọi I là giao điểm của BM và DF, J là giao điểm của CN và DE.*	**4,0**
	a) Chứng minh EB là tia phân giác của $\widehat{DEM}$.	**1,0**
	 *(Hình vẽ phục vụ **<u>mỗi câu</u>: 0,25**)*	
	+ Tứ giác ABDE nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BED} = \widehat{BAD}$	0,25
	+ Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAD} = \widehat{FEH}$	0,25
	Suy ra $\widehat{BED} = \widehat{FEH}$ hay EB là tia phân giác của $\widehat{DEM}$.	0,25
	b) Chứng minh AM = AN.	**1,5**
	Gọi K là giao điểm của OA và EF, ta có tứ giác BCEF nội tiếp nên có $\widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$	0,5
	Tam giác OAC cân ở O nên $2\widehat{OAC} + \widehat{AOC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{OAC} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{AOC}$	0,25
	Do đó $\widehat{AEF} + \widehat{OAC} = 90^0 \Rightarrow OA \perp MN \Rightarrow AM = AN$.	0,5
	*** Cách khác:** + Dựng tiếp tuyến Ax của đường tròn (O) tại A. $\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB). Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AFN}$ (cùng bù $\widehat{BFE}$) $\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{AFN} \Rightarrow Ax//MN$. Mà OA vuông góc Ax nên OA vuông góc với MN. Suy ra AM = AN.	
	c) Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.	**1,5**
	+ Tứ giác AFDC nội tiếp đường tròn nên $\widehat{AFD} + \widehat{ACB} = 180^0$ + Tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BFE} + \widehat{ACB} = 180^0$	0,25
	Suy ra $\widehat{AFD} = \widehat{BFE} \Rightarrow \widehat{BFI} = \widehat{BFN}$	0,25
	Lại có $\widehat{MBA} = \widehat{NBA}$ (vì chắn hai cung bằng nhau) Do đó $\Delta BFI = \Delta BFN$ (g.c.g) suy ra $BI = BN$, $FI = FN$.	0,25
	Suy ra FB là trung trực của IN hay AB là trung trực IN, do đó $AI = AN$	0,25

	+ Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $AJ = AM$. Suy ra $AM = AN = AI = AJ$. Vậy tứ giác MNIJ nội tiếp đường tròn.	0,25

Câu 5	*a) Tìm tất cả các số tự nhiên sao cho tổng của số đó với tổng các chữ số của nó bằng 2023.*	**3,0**
	Gọi số n là tự nhiên thỏa đề, $S(n)$ là tổng các chữ số của số n. Theo đề bài ta có $n+S(n)=2023$. Ta có: $n>0$, $S(n)>0$, do đó $0<n<2023 \Rightarrow S(n)\le 28$ (khi $n=\overline{1999}, S(n)=1+9+9+9=28$).	0,5
	Suy ra $2023-28\le n<2023$ hay $1995\le n<2023$	0,25
	Nên n là số có 4 chữ số $n=\overline{abcd}$ => $a=1$ hoặc $a=2$ + Nếu $a=1$ thì $n=\overline{1bcd} \Rightarrow n+S(n)=1000+\overline{bcd}+1+b+c+d=2023$	0,25
	$\Rightarrow 101.b+11c+2d+1=1023$	0,25
	Mà $0\le b;c;d\le 9$ nên $b=9$; $11c+2d=113 \Rightarrow c=9$, $d=7$. Suy ra $n=1997$	0,5
	+ Nếu $a=2$ thì $n=\overline{2bcd} \Rightarrow n+S(n)=2000+101b+11c+2d+2=2023$ $\Rightarrow 101b+11c+2d=21$ $\Rightarrow b=0, 11c+2d=21 \Rightarrow c=1, d=5$. Suy ra $n=2015$.	1,0
	Vậy có 2 số thỏa mãn đề bài: 1997 và 2015.	0,25
	b) Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\dfrac{x^3-1}{x^2+y+z}+\dfrac{y^3-1}{y^2+z+x}+\dfrac{z^3-1}{z^2+x+y}$.	**2,0**
	$\dfrac{1}{x^2+y+z}-\dfrac{1}{x(x+y+z)}=\dfrac{(x-1)(y+z)}{x(x^2+y+z)(x+y+z)}$	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{x^3-1}{x^2+y+z}-\dfrac{x^3-1}{x(x+y+z)}=\dfrac{(x-1)^2(x^2+x+1)(y+z)}{x(x^2+y+z)(x+y+z)}\ge 0$ $\Rightarrow \dfrac{x^3-1}{x^2+y+z}\ge\dfrac{x^3-1}{x(x+y+z)}$	0,5
	Tương tự: $\dfrac{y^3-1}{y^2+z+x}\ge\dfrac{y^3-1}{y(x+y+z)}$, $\dfrac{z^3-1}{z^2+x+y}\ge\dfrac{z^3-1}{z(x+y+z)}$ Suy ra $H\ge\dfrac{x^3-1}{x(x+y+z)}+\dfrac{y^3-1}{y(x+y+z)}+\dfrac{z^3-1}{z(x+y+z)}$	0,25
	hay $H\ge\dfrac{1}{x+y+z}\left(x^2+y^2+z^2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}\right)$	0,25
	Lại có $\dfrac{1}{x}\le yz, \dfrac{1}{y}\le zx, \dfrac{1}{z}\le xy \Rightarrow H\ge\dfrac{1}{x+y+z}\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$	0,25
	$\Rightarrow H\ge\dfrac{1}{2(x+y+z)}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge 0$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$ Vậy $\min H=0$ khi $x=y=z=1$.	0,25

---------- HẾT ----------

Ghi chú: *Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì Ban Giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.*

HAI CÁCH GIẢI KHÁC CỦA BÀI TOÁN BĐT (Câu 5b)

Cách 1

$$P = \frac{x^3}{x^2+y+z} + \frac{y^3}{y^2+z+x} + \frac{z^3}{z^2+x+y} - \left(\frac{1}{x^2+y+z} + \frac{1}{y^2+z+x} + \frac{1}{z^2+x+y}\right)$$

$$= \frac{x(x^2+y+z)-x(y+z)}{x^2+y+z} + \frac{y(y^2+z+x)-y(z+x)}{y^2+z+x} + \frac{z(z^2+x+y)-z(x+y)}{z^2+x+y} - \left(\frac{1}{x^2+y+z} + \frac{1}{y^2+z+x} + \frac{1}{z^2+x+y}\right)$$

$$= (x+y+z) - \left[\frac{x(y+z)}{x^2+y+z} + \frac{y(z+x)}{y^2+z+x} + \frac{z(x+y)}{z^2+x+y}\right] - \left(\frac{1}{x^2+y+z} + \frac{1}{y^2+z+x} + \frac{1}{z^2+x+y}\right) (1)$$

Đặt $M = \frac{x(y+z)}{x^2+y+z} + \frac{y(z+x)}{y^2+z+x} + \frac{z(x+y)}{z^2+x+y}$; $N = \frac{1}{x^2+y+z} + \frac{1}{y^2+z+x} + \frac{1}{z^2+x+y}$

Ta có $\frac{x(y+z)}{x^2+y+z} = \frac{x(y+z)}{x^2+\frac{y+z}{2}+\frac{y+z}{2}} \le \frac{x(y+z)}{3\sqrt[3]{\frac{x^2(y+z)^2}{4}}} = \frac{\sqrt[3]{4x(y+z)}}{3} = \frac{3\sqrt[3]{4x(y+z)}}{9} \le \frac{4x+y+z}{9}$

Tương tự: $\frac{y(z+x)}{y^2+z+x} \le \frac{4y+z+x}{9}$; $\frac{z(x+y)}{z^2+x+y} \le \frac{4z+x+y}{9}$.

Do đó $M \le \frac{6(x+y+z)}{9}$ (2)

Ta có: $\frac{1}{x^2+y+z} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2yz}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} \le \frac{\sqrt[3]{xyz}}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{yz}}{3} = \frac{3\sqrt[3]{yz}}{9} \le \frac{y+z+1}{9}$;

Tương tự: $\frac{1}{y^2+z+x} \le \frac{z+x+1}{9}$; $\frac{1}{z^2+x+y} \le \frac{x+y+1}{9}$

Do đó: $N \le \frac{2(x+y+z)+3}{9}$ (3). Dấu = xảy ra khi x = y = z

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P \ge (x+y+z) - \frac{6(x+y+z)}{9} - \frac{2(x+y+z)+3}{9}$

$$= \frac{x+y+z}{9} - \frac{1}{3} \ge \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{9} - \frac{1}{3} \ge \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Vậy $H_{min} = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Cách 2

Đặt $M = \frac{x^3}{x^2+y+z} + \frac{y^3}{y^2+z+x} + \frac{z^3}{z^2+x+y}$ và $N = \frac{1}{x^2+y+z} + \frac{1}{y^2+z+x} + \frac{1}{z^2+x+y}$

Ta có $H = M - N$

- $M = \frac{x^3}{x^2+y+z} + \frac{y^3}{y^2+z+x} + \frac{z^3}{z^2+x+y}$.

$$(1+1+1)\left(\frac{x^3}{x^2+y+z} + \frac{y^3}{y^2+z+x} + \frac{z^3}{z^2+x+y}\right)\left((x^2+y+z)+(y^2+z+x)+(z^2+x+y)\right) \ge (x+y+z)^3$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2+y+z} + \frac{y^3}{y^2+z+x} + \frac{z^3}{z^2+x+y} \ge \frac{(x+y+z)^3}{3\left(x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)\right)}$$

$$= \frac{(x+y+z)^3}{3\left((x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)+2(x+y+z)\right)} \ge \frac{(x+y+z)^3}{3\left((x+y+z)^2-6+2(x+y+z)\right)}$$

$(do\ xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \ge 3)$

$$N = \frac{1}{x^2+y+z} + \frac{1}{y^2+z+x} + \frac{1}{z^2+x+y}$$

Ta có: $(x^2+y+z)(1+y+z) \ge (x+y+z)^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y+z} \le \frac{1+y+z}{(x+y+z)^2}$

Suy ra: $N \le \dfrac{(1+y+z)+(1+z+x)+(1+x+y)}{(x+y+z)^2} = \dfrac{3+2(x+y+z)}{(x+y+z)^2}$

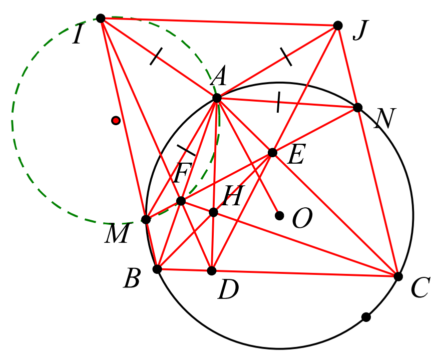
- $H = M - N \ge \dfrac{(x+y+z)^3}{3\left((x+y+z)^2-6+2(x+y+z)\right)} - \dfrac{3+2(x+y+z)}{(x+y+z)^2} = \dfrac{t^3}{3t^2+6t-18} - \dfrac{3+2t}{t^2}$

$= \dfrac{t^5-6t^3-21t^2+18t+54}{(3t^2+6t-18)t^2} = \dfrac{(t-3)(t^4+3t^3+3t^2-12t-18)}{(3t^2+6t-18)t^2} \ge 0$

(đúng do $t = x+y+z,\ \ t \ge 3$)

Vậy H ≥0, dấu = xảy ra khi t=3 khi đó x=y=z=1.
Min H =0

Câu 3c: *Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, đường thẳng EF cắt (O) tại M và N (M thuộc cung nhỏ AB, N thuộc cung nhỏ AC). Gọi I là giao điểm BM và DF, J là giao điểm của CN và DE.*
Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp.
Lời giải:



Ta có các tứ giác BFHD và BFEC nội tiếp
=> $\widehat{EFC} = \widehat{EBD} = \widehat{HBD} = \widehat{HFD}$ => FC là phân giác của góc EFD, mà FA $\perp$ FC nên FA là phân giác của góc IFE.
Ta có $\widehat{IMA} = \widehat{ACB} = \widehat{AFE} = \widehat{AFI}$ suy ra tứ giác MFAI nội tiếp => $\widehat{AIM} = \widehat{AFE} = \widehat{AMI}$ => ΔAIM cân tại I => AI = AM (1).
Chứng minh tương tự AN = AJ (2).
Ta dễ dàng chứng minh được AM = AN nên từ (1) và (2) suy ra AI = AM = AN = AJ
=> tứ giác ANJI nội tiếp