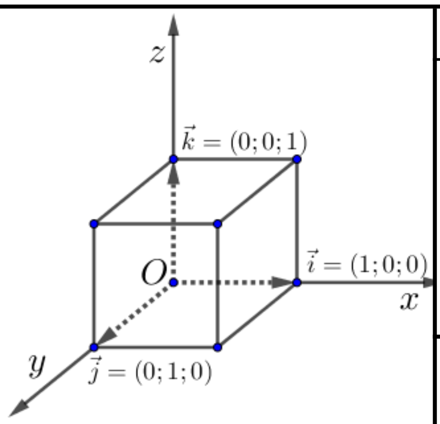
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

NHẮC LẠI LÝ THUYẾT



1.Hệ trục tọa độ *Oxyz*:

- Hệ trục gồm ba trục $Ox,\ Oy,\ Oz$ đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox: **trục hoành**, có vectơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$.
- Trục Oy: **trục tung**, có vectơ đơn vị $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Trục Oz: **trục cao**, có vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.

2.Tọa độ vectơ: Vectơ $\boxed{\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow \vec{u}=(x;y;z)}$.

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;\ a_2\pm b_2;\ a_3\pm b_3)$
- $k\vec{a}=(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ (k\in R)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3},\ (b_1,b_2,b_3\neq 0).$
- $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_2^2}$
- $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
- $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

3.Tọa độ điểm: $\boxed{M(x;\ y;\ z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=(x;y;z)}$. Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, ta có:

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm *M* của đoạn thẳng *AB*: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- Toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ	Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ
Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x)}]{\text{Chiếu vào Ox}}M_1(x_M;0;0)$	Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x, y)}]{\text{Chiếu vào Oxy}}M_1(x_M;y_M;0)$
Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên y)}]{\text{Chiếu vào Oy}}M_2(0;y_M;0)$	Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên y, z)}]{\text{Chiếu vào Oyz}}M_2(0;y_M;z_M)$
Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên z)}]{\text{Chiếu vào Oz}}M_3(0;0;z_M)$	Điểm $M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x, z)}]{\text{Chiếu vào Oxz}}M_3(x_M;0;z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ	Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ
$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x; đổi dấu y, z)}]{\text{Đối xứng qua Ox}}M_1(x_M;-y_M;-z_M)$	$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x, y; đổi dấu z)}]{\text{Đối xứng qua Oxy}}M_1(x_M;y_M;-z_M)$
$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên y; đổi dấu x, z)}]{\text{Đối xứng qua Oy}}M_2(-x_M;y_M;-z_M)$	$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x, z; đổi dấu y)}]{\text{Đối xứng qua Oxz}}M_2(x_M;-y_M;z_M)$
$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên z; đổi dấu x, y)}]{\text{Đối xứng qua Oz}}M_3(-x_M;-y_M;z_M)$	$M(x_M;y_M;z_M)\xrightarrow[\text{(Giữ nguyên y, z; đổi dấu x)}]{\text{Đối xứng qua Oyz}}M_3(-x_M;y_M;z_M)$

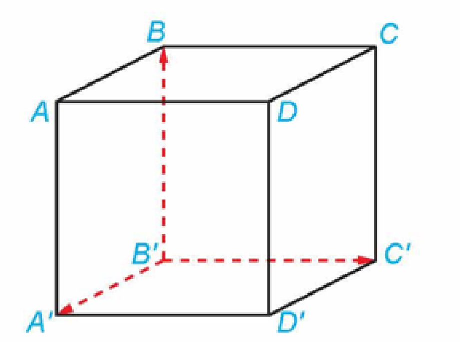
4.Tích có hướng của hai vectơ: KIẾN THỨC BỔ SUNG

Định nghĩa: Cho $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$			
Tính chất:	$[\vec{a}, \vec{b}]\perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}]\perp \vec{b}$	$\left\|[\vec{a},\vec{b}]\right\|=\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Điều kiện **cùng phương** của hai vectơ $\vec{a}\ \&\ \vec{b}$ là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ với $\vec{0}=(0;0;0)$.	Điều kiện **đồng phẳng** của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c}=0$.
Diện tích hình bình hành *ABCD*: $S_{\square ABCD}=\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right\|$.	**Diện tích tam giác** *ABC*: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$.
Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right\|$.	**Thể tích tứ diện:** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right\|$.

DẠNG 1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1. Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'B}$ không? Giải thích vì sao.



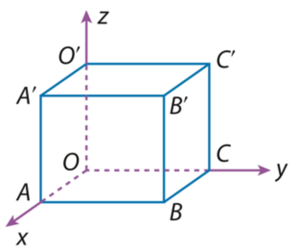
Lời giải

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $B'A', B'C'$ và $B'B$ đôi một vuông góc với nhau.

Vì hình lập phương có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên các vectơ $\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'B}$ cùng có điểm đầu là B' và đều có độ dài bằng 1.

Từ các điều trên, suy ra có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'B}$.

Câu 2. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$. Hệ toạ độ $Oxyz$ được chọn sao cho các tia Ox, Oy, Oz lần lượt chứa các điểm A, C, O' (Hình).



a) Mặt bên $OCC'O'$ nằm trong mặt phẳng toạ độ nào?

b) Ox có vuông góc với mặt bên $OCC'O'$ không?

c) Mặt bên $OAA'O'$ có vuông góc với mặt phẳng toạ độ (Oxy) không?

Lời giải

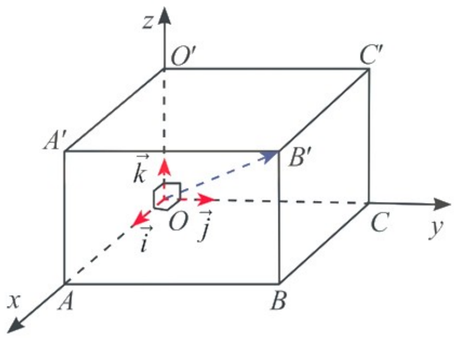
a) Mặt bên $OCC'O'$ nằm trong mặt phẳng toạ độ (Oyz).

b) $Ox \perp (Oyz)$ nên $Ox \perp (OCC'O')$.

c) Mặt bên $OAA'O'$ nằm trong mặt phẳng toạ độ (Oxz). Các mặt phẳng toạ độ đôi một vuông góc với nhau nên $(OAA'O') \perp (Oxy)$.

Câu 3. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA=4, OC=6, OO'=3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định tọa độ các điểm A, B, B'.

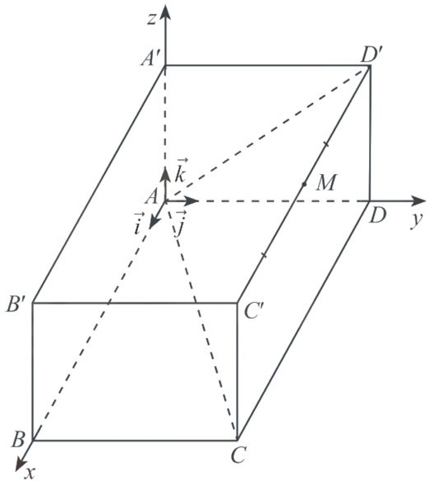
Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, suy ra $A(4;0;0)$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$, suy ra $B(4;6;0)$; $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$, suy ra $B'(4;6;3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB=8, AD=6$, $AA'=4$. Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Lời giải



Để tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta cần biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{AB}| = AB = 8 = 8|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}, \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$.

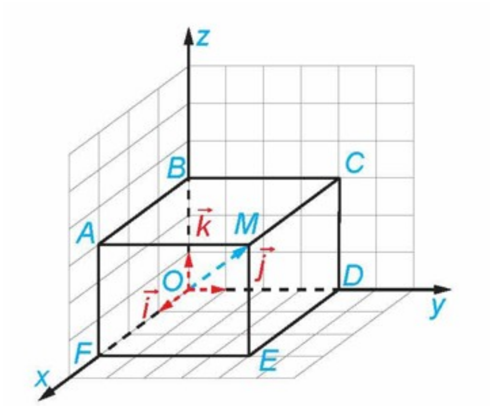
Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (8;0;0); \overrightarrow{AC} = (8;6;0); \overrightarrow{AC'} = (8;6;4)$.

$$\text{Vì } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} + 6\vec{j} + 4\vec{k}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

nên $\overrightarrow{AM} = (4;6;4)$.

Câu 5. Hình minh hoạ một hệ toạ độ Oxyz trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm toạ độ của điểm M.



Lời giải

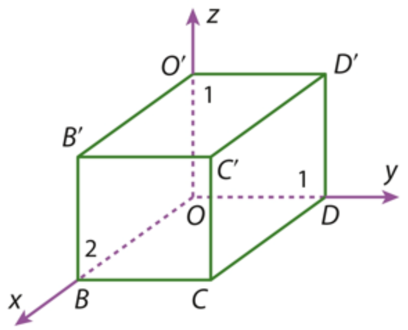
Trong Hình $ABCM.FODE$ là hình hộp chữ nhật. Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}.$

Vì vậy, toạ độ của điểm M là $(3;4;3)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OBCD.O'B'C'D'$ có $B(2;0;0), D(0;1;0)$, $O'(0;0;1)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại.

Lời giải



Ta cần tìm toạ độ các đỉnh O, C, B', C', D'.

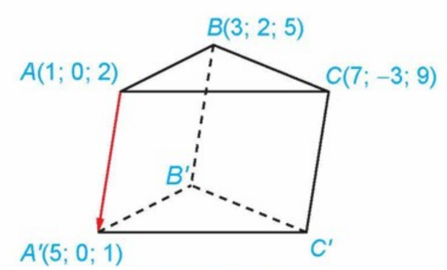
- Toạ độ đỉnh O là $(0;0;0)$.

- Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i}, \overrightarrow{OD} = \vec{j}, \overrightarrow{OO'} = \vec{k}$. Suy ra:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + \vec{j};$$
$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OO'} = 2\vec{i} + \vec{k};$$
$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OO'} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k};$$
$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OO'} = \vec{j} + \vec{k}.$$

Vậy $C(2;1;0), B'(2;0;1), C'(2;1;1), D'(0;1;1)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2), B(3;2;5), C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.



a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AA'}$.

b) Tìm toạ độ của các điểm B', C'.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AA'} = (x_{A'} - x_A; y_{A'} - y_A; z_{A'} - z_A) = (4;0;-1)$.

b) Gọi toạ độ của điểm B' là $(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{BB'} = (x-3; y-2; z-5)$. Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $ABB'A'$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\begin{cases} x-3=4 \\ y-2=0 \\ z-5=-1 \end{cases}$ hay $x=7, y=2, z=4$. Vậy $B'(7;2;4)$

Lập luận tương tự suy ra $C'(11;-3;8)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2;-1;4), B(3;5;-1), C(-1;1;2)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AB}$.

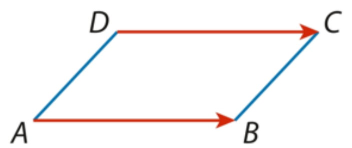
b) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Vì $A(2;-1;4)$ và $B(3;5;-1)$ nên $\overrightarrow{AB}=(3-2;5-(-1);-1-4)$.

Vậy $\overrightarrow{AB}=(1;6;-5)$.

b) A, B, C không thẳng hàng nên để $ABCD$ là hình bình hành thì điểm D phải thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.



Gọi $(x_D;y_D;z_D)$ là toạ độ điểm D. Ta có

$\overrightarrow{DC}=(-1-x_D;1-y_D;2-z_D)$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x_D=1 \\ 1-y_D=6 \\ 2-z_D=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-2 \\ y_D=-5 \\ z_D=7. \end{cases}$$

Vậy $D(-2;-5;7)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1;3;-7)=(-3-x;1-y;2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \\ z=9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4;-2;9).$$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Tìm điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$

Lời giải

Gọi $E(x;y;z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE}=(x-7;y-4;z+2)$; $2\overrightarrow{EB}=(2-2x;4-2y;-6-2z)$

$$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-7=2-2x\\y-4=4-2y\\z+2=-6-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=\dfrac{8}{3}\\z=-\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'}=(3;5;-6)$, $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;0)$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'}=(2;5;-7)$.

Suy ra $A'(3;5;-6)$.

DẠNG 2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\dfrac{3}{4}\vec{k}$ và vectơ $\vec{v}=\left(3;-\dfrac{5}{4};2\right)$.

a) Tìm toạ độ của $\vec{u}$.

b) Biểu diễn $\vec{v}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

c) Tìm toạ độ của $\vec{a}=2\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}$.

Lời giải

a) Vì $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\dfrac{3}{4}\vec{k}$ nên $\vec{u}=\left(-2;3;\dfrac{3}{4}\right)$.

b) Vì $\vec{v}=\left(3;-\dfrac{5}{4};2\right)$ nên $\vec{v}=3\vec{i}-\dfrac{5}{4}\vec{j}+2\vec{k}$.

c) Biểu diễn $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị:

$$\vec{a}=2\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=2\left(-2\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}\right)+\frac{1}{3}\left(3\vec{i}-\frac{5}{4}\vec{j}+2\vec{k}\right)$$
$$=-3\vec{i}+\frac{67}{12}\vec{j}+\frac{13}{6}\vec{k}$$
$$\Rightarrow \vec{a}=\left(-3;\frac{67}{12};\frac{13}{6}\right)$$

Câu 13. Cho $\vec{a}=(2;-1;5),\vec{b}=(0;3;-3),\vec{c}=(1;4;-2)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}+3\vec{c}$.

Lời giải

Ta có $2\vec{a}=(4;-2;10);\frac{1}{5}\vec{b}=\left(0;\frac{3}{5};-\frac{3}{5}\right);3\vec{c}=(3;12;-6)$.

Do đó $\vec{d}=\left(4-0+3;-2-\frac{3}{5}+12;10-\left(-\frac{3}{5}\right)+(-6)\right)$, hay $\vec{d}=\left(7;\frac{47}{5};\frac{23}{5}\right)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;1;-2)$ và $\vec{b}=(-2;3;-2)$.

a) Tìm $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

b) Tìm $(\vec{a},\vec{b})$.

Lời giải

a) Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-2)+1\cdot3+(-2)\cdot(-2)$, hay $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$.

b) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Suy ra $(\vec{a},\vec{b})\approx75,96^\circ$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;4;2)$ và $\vec{b}=(-4;1;0)$.

a) Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và cho biết hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có vuông góc với nhau hay không.

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-4)+4\cdot1+2\cdot0=0$. Do đó, hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

b) Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+4^2+2^2}=\sqrt{21}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;5)$ và $\vec{b}=(2;2;1)$. Tìm toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{a}-\vec{b}$;

b) $3\vec{a}+2\vec{b}$.

Lời giải

a) Vì $\vec{a}=(2;1;5)$ và $\vec{b}=(2;2;1)$ nên $\vec{a}-\vec{b}=(2-2;1-2;5-1)=(0;-1;4)$.

b) Ta có $3\vec{a}=(3\cdot 2;3\cdot 1;3\cdot 5)=(6;3;15)$ và $2\vec{b}=(2\cdot 2;2\cdot 2;2\cdot 1)=(4;4;2)$.

Do đó $3\vec{a}+2\vec{b}=(6+4;3+4;15+2)=(10;7;17)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{p}=(3;-2;1),\vec{q}=(6;-4;2),\vec{r}=(2;1;-3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$.

b) Tìm hai vectơ cùng phương trong các vectơ đã cho.

Lời giải

a) Ta có: $2\vec{p}=(6;-4;2),-3\vec{q}=(-18;12;-6),\vec{r}=(2;1;-3)$.

Suy ra $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}=(-10;9;-7)$.

b) Ta có $2\vec{p}=(6;-4;2)=\vec{q}$, suy ra hai vectơ $\vec{p},\vec{q}$ cùng phương.

Do $\frac{3}{2}\neq\frac{-2}{1}$ nên $\vec{p},\vec{r}$ không cùng phương. Tương tự, hai vectơ $\vec{q},\vec{r}$ không cùng phương.

Câu 18. Cho ba vectơ $\vec{a}=(3;0;1),\vec{b}=(1;-1;-2),\vec{c}=(2;1;-1)$.

a) Tính $\vec{a}\cdot\vec{b},\vec{b}\cdot\vec{c}$.

b) Tính $|\vec{a}|,|\vec{b}|,\cos(\vec{a},\vec{b})$.

c) Cho $\vec{d}=(1;7;-3)$. Chứng minh $\vec{d}\perp\vec{a}$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot(-2)=1$;

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 2+(-1).1+(-2)\cdot(-1)=3.$

b) Ta có: $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+0^2+1^2}=\sqrt{10};|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$.

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{15}}{30}.$

c) Ta có $\vec{d}\cdot\vec{a}=1\cdot 3+7\cdot 0+(-3)\cdot 1=0$, suy ra $\vec{d}\perp\vec{a}$.

Câu 19. Cho ba điểm $A(2;0;2),B(1;2;3),C(2;1;2)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$.

b) Tính các độ dài AB,BC,CA.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1-2;2-0;3-2)=(-1;2;1)$;

$\overrightarrow{BC}=(2-1;1-2;2-3)=(1;-1;-1);$

$\overrightarrow{CA}=(2-2;0-1;2-2)=(0;-1;0).$

b) Ta có: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$;

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$;

$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$.

Câu 20. Cho tam giác ABC có $A(1;-1;1), B(0;1;2), C(1;0;1)$. Tìm tọa độ:

a) Trung điểm M của AB;

b) Trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

a) Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$M\left(\frac{1+0}{2};\frac{-1+1}{2};\frac{1+2}{2}\right)$ hay $M\left(\frac{1}{2};0;\frac{3}{2}\right)$.

b) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$G\left(\frac{1+0+1}{3};\frac{-1+1+0}{3};\frac{1+2+1}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{3}\right)$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3), B(3;2;1)$ và $C(2;-1;5)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên toạ độ của điểm M là $\left(\frac{1+3}{2};\frac{2+2}{2};\frac{3+1}{2}\right)$, suy ra $M(2;2;2)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên toạ độ của điểm G là $\left(\frac{1+3+2}{3};\frac{2+2+(-1)}{3};\frac{3+1+5}{3}\right)$, suy ra $G(2;1;3)$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác MNP có $M(3;7;2), N(5;1;-1)$ và $P(4;-4;-2)$. Tìm toạ độ:

a) Trung điểm I của đoạn thẳng MN;

b) Trọng tâm G của tam giác MNP.

Lời giải

a) Áp dụng công thức tính toạ độ trung điểm cho hai điểm $M(3;7;2)$ và $N(5;1;-1)$, ta có $I\left(\frac{3+5}{2};\frac{7+1}{2};\frac{2-1}{2}\right)$, hay $I\left(4;4;\frac{1}{2}\right)$.

b) Áp dụng công thức tính toạ độ trọng tâm theo toạ độ các đỉnh của tam giác MNP, ta có $G\left(\frac{3+5+4}{3};\frac{7+1-4}{3};\frac{2-1-2}{3}\right)$, hay $G\left(4;\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Câu 23. Cho tam giác ABC có $A(7;3;3), B(1;2;4), C(2;3;5)$.

a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

b) Tìm độ dài cạnh AB và AC.

c) Tính góc A.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;1;1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

Suy ra $\overrightarrow{BH}=(x-1;y-2;z-4)$.

$\overrightarrow{BH}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$, do đó $x-1=t;y-2=t;z-4=t$, suy ra $H(1+t;2+t;4+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=(x_H-x_A;y_H-y_A;z_H-z_A)=(t-6;t-1;t+1)$.

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow t-6+t-1+t+1=0\Leftrightarrow 3t=6\Leftrightarrow t=2$.

Suy ra $H(3;4;6)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;-1;1);\overrightarrow{AC}=(-5;0;2)$, suy ra

$AB=\sqrt{(-6)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{38};AC=\sqrt{(-5)^2+0^2+2^2}=\sqrt{29}.$

c) $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}=\dfrac{30+0+2}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{29}}=\dfrac{32}{\sqrt{38\cdot 29}}$, suy ra $\hat{A}\approx 15,43^\circ$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;-2), B(2;-1;3), C(1;3;-2), D(5;-1;8)$.

a) Ba điểm A,B,C có thẳng hàng không?

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải

a) Từ toạ độ của ba điểm đã cho, ta tính được $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5),\overrightarrow{AC}=(1;2;0)$. Vì $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{2}{-2}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{CD}=(4;-4;10)$. Xét toạ độ của hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$, ta thấy: $\dfrac{4}{2}=\dfrac{-4}{-2}=\dfrac{10}{5}$.

Các đẳng thức trên chứng tỏ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương. Suy ra AB và CD song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này không thể trùng nhau (do A,B,C không thẳng hàng). Vậy $AB//CD$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;3;-2), B(3;2;-4), C(2;1;0)$, $D(3;5;-1)$.

a) Chứng minh rằng $AB\perp CD$.

b) Chứng minh rằng BCD là tam giác đều.

c) Tính số đo của $\widehat{AMD}$ với M là trung điểm của BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Từ giả thiết, ta tìm được $\overrightarrow{AB}=(2;-1;-2),\overrightarrow{CD}=(1;4;-1)$. Suy ra: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=2\cdot1+(-1)\cdot4+(-2)\cdot(-1)=0$. Đẳng thức này chứng tỏ $AB\perp CD$.

b) Tính ba cạnh của tam giác BCD:

Vì $\overrightarrow{CD}=(1;4;-1)$ nên $CD=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Để tính hai cạnh BC và BD, ta áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm và có:

$$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-3)^2+(1-2)^2+(0-(-4))^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$
$$BD=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(3-3)^2+(5-2)^2+(-1-(-4))^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

Từ ba đẳng thức trên suy ra BCD là tam giác đều.

c) Ta có $\widehat{AMD}=(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD})$.

Vì M là trung điểm của BC nên $M\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};-2\right)$.

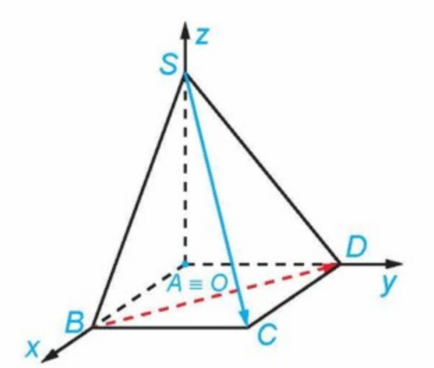
Suy ra: $\overrightarrow{MA}=\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right)$ và $\overrightarrow{MD}=\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2};1\right)$.

Từ đó ta tính được:

$$\cos(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD})=\frac{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}+0.1}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\Rightarrow(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MD})=54,74^\circ$, hay $\widehat{AMD}\approx55^\circ$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử $SA=2,AB=3$, $AD=4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AB,AD,AS.



a) Xác định toạ độ của các điểm S,A,B,C,D.

b) Tính BD và SC.

c) Tính $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})$.

Lời giải

a) Vì A trùng gốc toạ độ nên $A(0;0;0)$. Vì B thuộc tia Ox và $AB=3$ nên $B(3;0;0)$. Vì D thuộc tia Oy và $AD=4$ nên $D(0;4;0)$. Vì S thuộc tia Oz và $AS=2$ nên $S(0;0;2)$. Vì hình chiếu của C lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3;4;0)$.

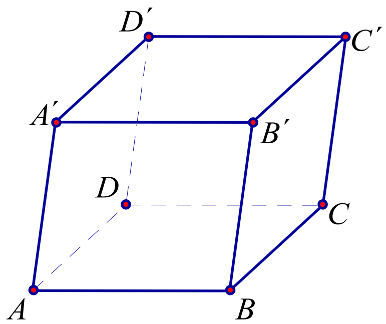
b) Ta có $\overrightarrow{BD}=(0-3;4-0;0-0)=(-3;4;0)$, suy ra $BD=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=5$.

Ta có $\overrightarrow{SC}=(3-0;4-0;0-2)=(3;4;-2)$, suy ra $SC=|\overrightarrow{SC}|=\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

c) Ta có $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{SC}|}=\dfrac{(-3)\cdot 3+4\cdot 4+0\cdot(-2)}{5\sqrt{29}}=\dfrac{7}{5\sqrt{29}}$, suy ra $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})\approx 74{,}9^\circ$.

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 3;\ 0)$, $D'(0;\ 3;\ -3)$. Tìm toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$

Lời giải



Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;\ 0;\ 0)$. Gọi $C(x;y;\ z)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=(x;\ y-3;\ z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow(x;\ y;\ z)=(3;\ 3;\ 0)\Rightarrow C(3;\ 3;\ 0)$

Ta có $\overrightarrow{AD}=(0;\ 3;\ 0)$. Gọi $A'(x';\ y';\ z')\Rightarrow\overrightarrow{A'D'}=(-x';\ 3-y';\ -3-z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}\Rightarrow(x';\ y';\ z')=(0;\ 0;\ -3)\Rightarrow A'(0;\ 0;-3)$

Gọi $B'(x_0;\ y_0;\ z_0)\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}=(x_0;\ y_0;\ z_0+3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow(x_0;\ y_0;\ z_0)=(3;\ 0;-3)\Rightarrow B'(3;\ 0;-3)$

G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{0+3+3}{3}=2\\ y_G=\dfrac{0+0+3}{3}=1\\ z_G=\dfrac{-3-3+0}{3}=-2\end{cases}\Rightarrow G(2;\ 1;\ -2)$.

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD'. Ta có $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$. Gọi $G(a;b;c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$

Ta có: $\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IG}$ với $\begin{cases}\overrightarrow{DI}=\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)\\ \overrightarrow{IG}=\left(a-\frac{3}{2};b-\frac{3}{2};c+\frac{3}{2}\right)\end{cases}$. Do đó: $\begin{cases}\frac{3}{2}=3\left(a-\frac{3}{2}\right)\\ -\frac{3}{2}=3\left(b-\frac{3}{2}\right)\\ -\frac{3}{2}=3\left(c+\frac{3}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=-2\end{cases}$.

Vậy $G(2;1;-2)$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BA}=(-1;-3;4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{26}; \overrightarrow{BC}=(-6;8;2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

Suy ra : $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}\Rightarrow\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DA}\Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$

Lời giải

Ta có: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC).d(A,BC)\Leftrightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC).\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$.

$\Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC}=\frac{(AD+BC).S_{\Delta ABC}}{BC}\Leftrightarrow 3BC=AD+BC\Leftrightarrow AD=2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(x_D+2;y_D-3;z_D-1)$.

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_D+2=-10\\ y_D-3=-4\\ z_D-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-12\\ y_D=-1\\ z_D=3\end{cases}$.

Vậy $D(-12;-1;3)$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $u=(1;1;-2)$, $v=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa u, v bằng 45°.

Lời giải

+ $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=45^\circ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)}=1-2m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m\ge 0 \\ 3m^2+3=1-4m+4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{1}{2} \\ m^2-4m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2-\sqrt{6}$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a}=(5;3;-2)$ và $\vec{b}=(m;-1;m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

Lời giải

Ta có $\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{3m-9}{\sqrt{38}.\sqrt{2m^2+6m+10}}$.

Góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a};\vec{b})<0 \Leftrightarrow 3m-9<0 \Leftrightarrow m<3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;\ 2\}$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m},\vec{n}]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}|=15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.

Lời giải

Ta có : $[\vec{m};\vec{n}]=(3;-4;0)$

Do $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m};\vec{n}]$ nên $\vec{p}=k[\vec{m};\vec{n}]$, $k>0$

Mặt khác: $|\vec{p}|=15 \Leftrightarrow k.|[\vec{m},\vec{n}]|=15 \Leftrightarrow k.5=15 \Leftrightarrow k=3$. Vậy $\vec{p}=(9;-12;0)$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{m}=(4\,;\,3\,;1)$ và $\vec{n}=(0\,;\,0\,;\,1)$. Gọi $\vec{p}$ là véc tơ cùng hướng với $[\vec{m}\,,\,\vec{n}]$ và $|\vec{p}|=15$. Tìm tọa độ của véc tơ $\vec{p}$

Lời giải

Ta có: $[\vec{m}\,,\,\vec{n}]=(3\,;-4\,;0)$.

Vì $\vec{p}$ là véc tơ cùng hướng với $[\vec{m}\,,\,\vec{n}]$ nên $\vec{p}=k.[\vec{m}\,,\,\vec{n}]=(3k\,;-4k\,;0),\ k>0$.

Ta có: $|\vec{p}|=15 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2+16k^2}=15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-3 \\ k=3 \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện $k>0 \Rightarrow k=3 \Rightarrow \vec{p}=(9\,;-12\,;0)$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN.

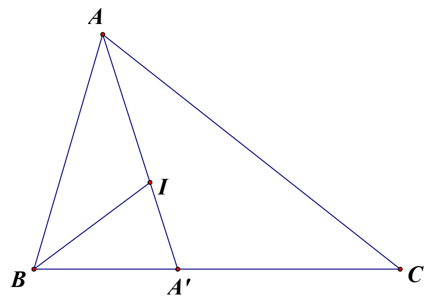
Lời giải

Ta có bài toán bài toán sau

Trong tam giác ABC, I là tâm đường tròn nột tiếp ΔABC ta có: $a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

với $BC=a;\ AC=b;\ AB=c$.

Thật vậy:



Gọi A' là chân đường phân giác trong kẻ từ A.

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA'}=\frac{c}{b}\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow b\overrightarrow{BA'}+c\overrightarrow{CA'}=\vec{0}\ (1)$$

$$\overrightarrow{IA}=-\frac{c}{A'B}\overrightarrow{IA'}=-\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}\overrightarrow{IA'}=-\frac{b+c}{a}\overrightarrow{IA'} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA}+(b+c)\overrightarrow{IA'}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}+b\overrightarrow{BA'}+c\overrightarrow{CA'}=\vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\quad (do\ (1)).$$

Áp dụng công thức trong tam giác OMN

ta được $OM.\overrightarrow{IN}+ON.\overrightarrow{IM}+MN.\overrightarrow{IO}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{OM.x_N+ON.x_M+MN.x_O}{OM+ON+MN}=0 \\ y_I=\dfrac{OM.y_N+ON.y_M+MN.y_O}{OM+ON+MN}=1 \\ z_I=\dfrac{OM.z_N+ON.z_M+MN.z_O}{OM+ON+MN}=1 \end{cases}.$$

Vậy điểm $I(0;1;1)$ là điểm cần tìm.

Câu 35. Cho 3 điểm $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$.

a) Chứng minh: A,B,C là 3 đỉnh của một tam giác

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC

c) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

d) Tính các góc của tam giác ABC.

Lời giải

a. Tính $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=(-1;2;1)\neq 0$ chứng tỏ 2 véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên 3 điểm A,B,C không thẳng hàng. Vậy A,B,C là 3 đỉnh của một tam giác

b. Chu vi của tam giác $ABC: 2P=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

Diện tích của tam giác $ABC: S=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (đvdt)

c. Diện tích $\Delta ABC=S=\frac{1}{2}h_aB_c$ ha là độ dài đường cao kẻ từ A của ΔABC Vậy $h_a=\frac{2S}{BC}=\frac{\sqrt{30}}{5}$ (Đơn vị độ dài)

d. Vì $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ nên $\hat{A}=90^\circ$.

Vậy B,C nhọn nên $\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot\hat{B}=\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\cos C=\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\hat{C}=\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0), C(0;0;1), D(-2;1;-1)$

1) Chứng minh rằng A,B,C,D là 4 đỉnh của một khối tứ diện.

2) Tính thể tích của khối tứ diện

3) Tính độ đài đường cao hạ từ A của khối tứ diện $ABCD$

Lời giải

1) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;0), \overrightarrow{AC}=(-1;0;1), \overrightarrow{AD}=(-3;1;-1)$.

Ta được $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\-1&0\end{vmatrix}\right)=(1;1;1)$

Vậy $[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}=-3\neq 0$ nên 4 điểm A,B,C,D không đồng phẳng nên A,B,C,D là 4 đỉnh của một khối tứ diện.

2) Thể tích của khối tứ diện $ABCD$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}|-3|=\frac{1}{2}$(dvtt)

3) Độ dài đường cao của khối tứ diện $ABCD$ kẻ từ A bằng h. Ta có

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}hS_{\Delta BCD}\Leftrightarrow h=\frac{3V}{S_{\Delta BCD}}$. Tính diện tích tam giác BCD

$\overrightarrow{BC}=(0;-1;1),\overrightarrow{BD}=(-2;0;-1)$ nên $[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]=(1;-2;-2)$

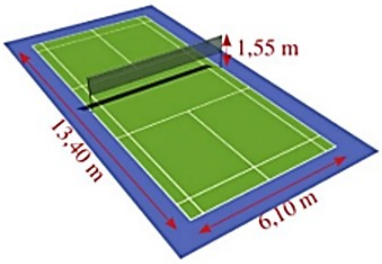
Và $|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]|=\sqrt{1+4+4}=3$

Vậy diện tích $\Delta BCD=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]\right|=\frac{3}{2}$

Do đó $h=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=1, h=1$ (đơn vị độ dài)

DẠNG 3. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Câu 37. Hình a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như ở Hình b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



a)

b)

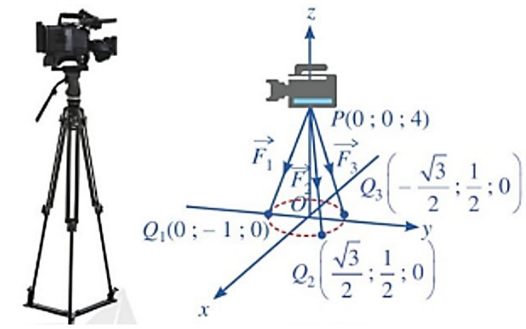
Lời giải

- Gọi tọa độ điểm A là $(x_A;y_A;z_A)$. Vì chiều rộng của sân là $6,1m$ nên $x_A=6,1$. Do một nửa chiều dài của sân là $6,7m$ nên $y_A=6,7$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A=0$. Vì vậy, điểm A có tọa độ là $(6,1;6,7;0)$.

- Độ dài đoạn thẳng AB là $1,55m$ nên điểm B có tọa độ là $(6,1;6,7;1,55)$.

Vậy ta có: $\overrightarrow{AB}=(6,1-6,1;6,7-6,7;1,55-0)$, tức là $\overrightarrow{AB}=(0;0;1,55)$.

Câu 38. Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $P(0;0;4)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $Q_1(0;-1;0)$, $Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right),Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ (Hình). Biết rằng trọng lượng của máy quay là $360\,N$.



Làm thế nào để tìm được toa độ của các lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ tác dụng lên giá đỡ?

Lời giải

Theo giả thiết, ta có các điểm $P(0;0;4), Q_1(0;-1;0), Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{PQ_1}=(0-0;-1-0;0-4)$ hay $\overrightarrow{PQ_1}=(0;-1;-4)$;

$\overrightarrow{PQ_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0;\frac{1}{2}-0;0-4\right)$ hay $\overrightarrow{PQ_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-4\right)$;

$\overrightarrow{PQ_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0;\frac{1}{2}-0;0-4\right)$ hay $\overrightarrow{PQ_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-4\right)$.

Suy ra $\left|\overrightarrow{PQ_1}\right|=\left|\overrightarrow{PQ_2}\right|=\left|\overrightarrow{PQ_3}\right|=\sqrt{17}$. Do đó $\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=\left|\vec{F_3}\right|$.

Vì vậy, tồn tại hằng số $c\neq 0$ sao cho:

$\vec{F_1}=c\overrightarrow{PQ_1}=(0;-c;-4c)$;

$\vec{F_2}=c\overrightarrow{PQ_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c;\frac{1}{2}c;-4c\right)$;

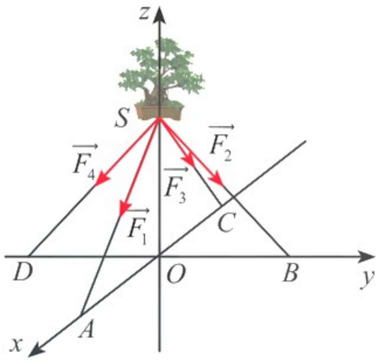
$\vec{F_3}=c\overrightarrow{PQ_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c;\frac{1}{2}c;-4c\right)$.

Suy ra $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=(0;0;-12c)$.

Mặt khác, ta có: $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{F}$, trong đó $\vec{F}=(0;0;-360)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay. Suy ra $-12c=-360$, tức là $c=30$.

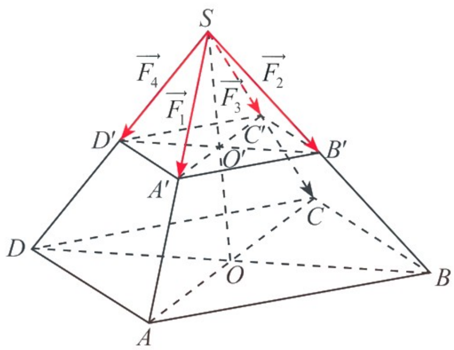
Vậy $\vec{F_1}=(0;-30;-120);\vec{F_2}=(15\sqrt{3};15;-120);\vec{F_3}=(-15\sqrt{3};15;-120)$.

Câu 39. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20;0;0), B(0;20;0)$, $C(-20;0;0), D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn $40N$ và được phân bố thành bốn lực $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như Hình. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimét biểu diễn $1N$).



Lời giải

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.



Ta có $\overrightarrow{SA}=(20;0;-20),\overrightarrow{SB}=(0;20;-20),\overrightarrow{SC}=(-20;0;-20),\overrightarrow{SD}=(0;-20;-20)$, suy ra $SA=SB=SC=SD=20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các vectơ $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A',B',C',D'.

Ta có $SA'=SB'=SC'=SD'$ nên $S\cdot A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi F là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có: $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{SA'}+\overrightarrow{SB'}+\overrightarrow{SC'}+\overrightarrow{SD'}=4\overrightarrow{SO'}$.

Ta có $|\vec{F}|=40$, suy ra $\left|\overrightarrow{SO'}\right|=SO'=10$.

Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA'=SO'\sqrt{2}=10\sqrt{2}=\frac{1}{2}SA$, suy ra $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}=(10;0;-10)$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{F_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}=(0;10;-10),\overrightarrow{F_3}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}=(-10;0;-10),\overrightarrow{F_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}=(0;-10;-10).$$

Câu 40. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}$.

Trong không gian $Oxyz$, một người tác động một lực không đổi $\vec{F}=(2;3;-1)$ vào một vật đang ở gốc toạ độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1;2;1)$. Biết lực tính bằng newton (N) và đơn vị trên mỗi trục toạ độ là mét, làm thế nào để tính công A (đơn vị: J) sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống này?

Lời giải

Theo bài toán nêu ở phần Khởi động thì trong không gian $Oxyz$, một người đã tác động một lực không đổi $\vec{F}=(2;3;-1)$ vào một vật đang ở gốc toạ độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm $M(1;2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{OM}=(1;2;1)$. Từ đó ta tính được công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{OM}=2.1+3.2+(-1).1=7.$$

Như vậy công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống này là $A=7$ (J).

Câu 41. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

Lời giải

Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB=2BC$.

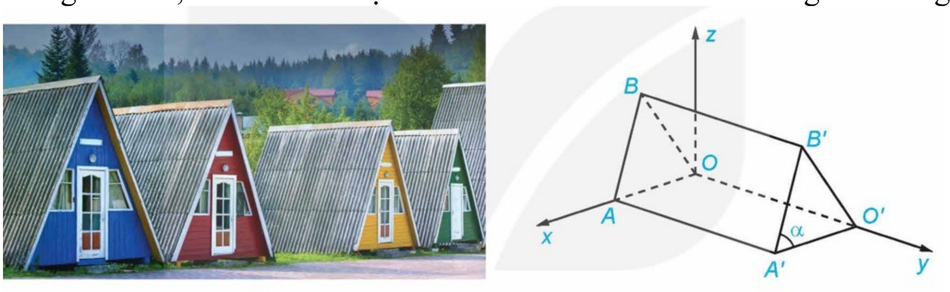
Do đó $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{940-800}{2};\dfrac{550-500}{2};\dfrac{8-7}{2}\right)=(70;25;0,5)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC}=(x-940;y-550;z-8)$ nên $\begin{cases}x-940=70\\y-550=25\\z-8=0,5.\end{cases}$

Từ đó $\begin{cases}x=1010\\y=575\\z=8,5\end{cases}$ và vì vậy $C(1010;575;8,5)$.

Vậy toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010;575;8,5)$.

Câu 42. Những căn nhà gỗ trong Hình a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình **b.** Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ thể hiện như Hình b (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có toạ độ lần lượt là $(240;450;0)$ và $(120;450;300)$. Từ những thông tin trên, có thể tính được kích thước mỗi chiều của những căn nhà gỗ hay không?



a) b)

Lời giải

Vì điểm A' có toạ độ là $(240;450;0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là $450cm$ và $240cm$. Suy ra $A'A = 450cm$ và $A'O' = 240cm$. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (-120;0;300)$, do đó $A'B' = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(cm)$.

Vì $O'O = A'A = 450cm$ và O' nằm trên trục Oy nên toạ độ của điểm O' là $(0;450;0)$.

Do đó $\overrightarrow{O'B'} = (120;0;300)$ và $O'B' = \left|\overrightarrow{O'B'}\right| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(cm)$.

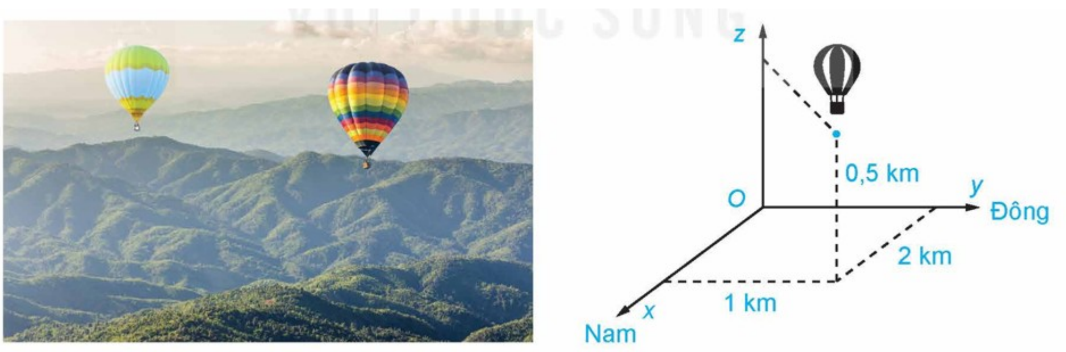
Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là $450cm$, chiều rộng là $240cm$, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là $323cm$.

Câu 43. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát $2km$ về phía nam và $1km$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5km$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát $1km$ về phía bắc và $1,5km$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8km$.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.

a) Tìm toạ độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ toạ độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



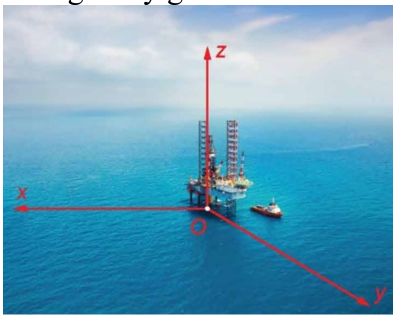
Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có tọa độ lần lượt là $(2;1;0,5)$ và $(-1;-1,5;0,8)$.

b) Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (-1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92(km).$$

Câu 44. Trong không gian, xét hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời. Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là $30\,km$. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ toạ độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.

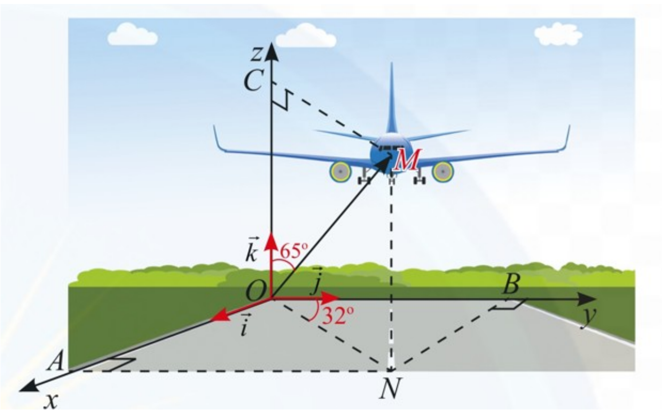


Lời giải

Vì $\overrightarrow{OM}(25;15;-10) \Rightarrow OM = \sqrt{25^2+15^2+(-10)^2} = 5\sqrt{38} > 30$

Do đó, ra đa không thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ tọa độ nói trên.

Câu 45. Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14, \widehat{NOB} = 32^\circ, \widehat{MOC} = 65^\circ$.
Tìm được tọa độ điểm M.



Lời giải

Xét tam giác COM vuông tại C:

$CO = OM \cdot \cos 65^\circ = 14 \cdot \cos 65^\circ \approx 5,92$

$CM = OM \cdot \sin 65^\circ = 14 \cdot \sin 65^\circ \approx 12,69$

Xét tam giác BON vuông tại B:

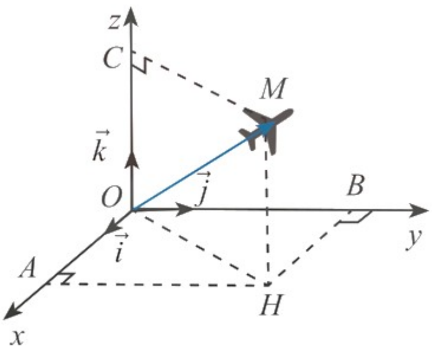
$OB = ON \cdot \cos 32^\circ = CM \cdot \cos 32^\circ = 12,69 \cdot \cos 32^\circ \approx 10,76$

Xét tam giác AON vuông tại A:

$OA = ON \cdot \cos\left(90^\circ - 32^\circ\right) = 12,69 \cdot \cos 58^\circ = 6,72$

Vậy tọa độ của M là $(6,72;10,76;5,92)$

Câu 46. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như Hình. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy).
Cho biết $OM=50, (\vec{i},\overrightarrow{OH})=64^\circ, (\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM})=48^\circ$.



Tìm tọa độ của điểm M.

Lời giải

Ta có: $OC=MH=OM\cdot\sin(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OM})=50\cdot\sin 48^\circ\approx 37,16$

$OH=OM\cdot\cos(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OM})=50\cdot\cos 48^\circ=50\cdot\cos 48^\circ\approx 33,46$

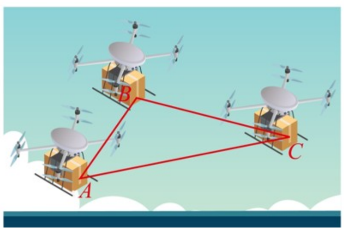
$OA=OH\cdot\cos(\vec{i};\overrightarrow{OH})=33,46\cdot\cos 64^\circ=33,46\cdot\cos 64^\circ\approx 14,67$

$OB=OH\cdot\cos\left(90^\circ-(\vec{i};\overrightarrow{OH})\right)=33,46\cdot\cos\left(90^\circ-64^\circ\right)=33,46\cdot\cos 26^\circ\approx 30,07$

=> $M(14,67;30,07;37,16)$

Câu 47. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A,B,C đang có toạ độ là $A(1;1;1)$, $B(5;7;9), C(9;11;4)$. Tính:
a) Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.

b) Góc $\widehat{BAC}$.



Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}=(4;6;8)\Rightarrow AB=\sqrt{4^2+6^2+8^2}=2\sqrt{29}$

$\overrightarrow{AC}=(8;10;3)\Rightarrow \sqrt{8^2+10^2+3^2}=\sqrt{173}$

$\overrightarrow{BC}=(4;4;-5)\Rightarrow \sqrt{4^2+4^2+(-5)^2}=\sqrt{57}$

c) $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{4.8+6.10+8.3}{2\sqrt{29}\cdot\sqrt{173}}\approx 0,82\Rightarrow \widehat{BAC}=35,03^\circ$