Đề 63

ĐỀ HSG TOÁN 9 KON TUM 2023-2024

Bài 1. (5,0 điểm):

1/ Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của biểu thức $P=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$.

2/ Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+1=0$ (1) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1{}^2+2(m+1)x_2=57$.

Bài 2. (5,0 điểm):

1/ Tìm tất cả các cặp số nguyên không dương (x, y) thỏa mãn $x^3+y^2=xy^2+1$.

2/ Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác trong AD vuông góc với đường trung tuyến BE tại F. Tính diện tích tam giác FED biết $AD=a\sqrt{2}$.

Bài 3. (4,0 điểm):

Cho đường thẳng d và điểm A cố định không thuộc d, H là hình chiếu của A trên d. Đường tròn (C) thay đổi qua A cắt đường thẳng dtại B, C sao cho $HB.HC=k$,(k là hằng số dương). Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của H lên AB, AC.

1/ Chứng minh tứ giác $MNCB$ nội tiếp.

2/ Chứng minh đường thẳng MNđi qua một điểm cố định.

Bài 4. (4,0 điểm):

1/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-x^2=1+2x \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$.

2/ Cho biểu thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, biết $f(1)=10; f(2)=20$. Tính giá trị biểu thức

$$S=\frac{f(11)-f(-8)-100}{100} .$$

Bài 5 (2,0 điểm):

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq \frac{1}{4}; b \geq \frac{1}{4}; c \geq \frac{1}{4}$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{4a-1}+\sqrt{4b-1}+\sqrt{4c-1}$.

---Hết---

ĐÁP ÁN

Bài 1: (5 điểm):

1/ $P=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=\sqrt{6+2\sqrt{5}-(2\sqrt{5}-3)}=\sqrt{9}=3.$

2/ Ta có $\Delta'=(m+1)^2-(2m+1)=m^2\geq 0\, với\, mọi\, m$. Phương trình luôn có hai nghiệm.

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $x_1+x_2=2m+2 \vee x_1x_2 \Rightarrow 2m+1.$

$Ta\, có\, x_1^2=2(m+1)x_1-2m-1. Theo\, bài\, ra\, ta\, có$

$$x_1^2+2(m+1)x_2=57 \Leftrightarrow 2(m+1)x_1+2(m+1)x_2-2m-1=57$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1+x_2)-2m-1=57 \Leftrightarrow (2m+2)(2m+2)-2m-1=57$$

$$\Leftrightarrow 4m^2+6m-54=0 \Leftrightarrow 2m^2+3m-27=0 \Leftrightarrow m=3 \vee m=\frac{-9}{2}(thỏa\, mãn)$$

$Vậy, m\in\left\{3;\frac{-9}{2}\right\}.$

Bài 2: (5,0 điểm):

1/ $x^3+y^2=xy^2+1 \Leftrightarrow y^2(1-x)=1-x^3$

$Nếu\, 1-x=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow 1=0 (vô\, nghiệm)$

$Nếu\, 1-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1, (1) \Leftrightarrow y^2=x^2+x+1 \Leftrightarrow (2y)^2-(2x+1)^2=3$

$\Leftrightarrow (2y+2x+1)(2y-2x-1)=3.(2)$

$Nên\, ta\, có\, các\, trường\, hợp\, sau$

$TH1: \begin{cases}2y+2x+1=3\\2y-2x-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\x=0\end{cases}(loại).$

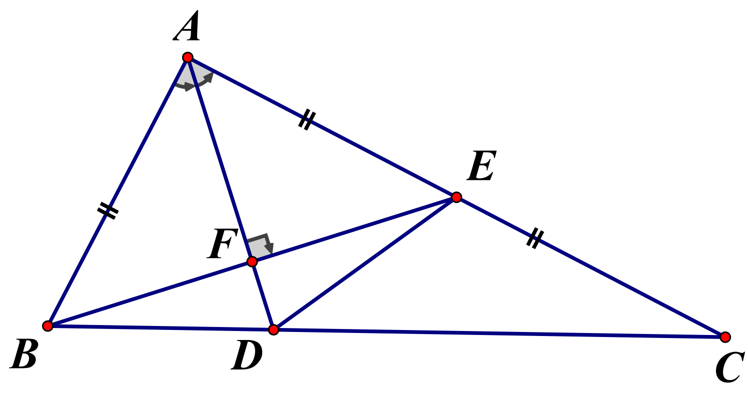
$TH2: \begin{cases}2y+2x+1=-3\\2y-2x-1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\x=-1\end{cases}(thỏa\, mãn).$

$TH3: \begin{cases}2y+2x+1=-1\\2y-2x-1=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\x=-1\end{cases}(thỏa\, mãn).$

$TH4: \begin{cases}2y+2x+1=1\\2y-2x-1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\x=-1\end{cases}(loại).$

Vậy, cặp số nguyên không dương thỏa mãn bài toán là (−1; -1).

2/



$Từ\, giả\, thiết, ta\, suy\, ra\, FA=FB=FE, tam\, giác\, ABE\, vuông\, cân\, tại\, A\, nên\, AB=AE=EC=\frac{1}{2}AC.$

Ta có $S_{\Delta ABF}=S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABE}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}.(1)$

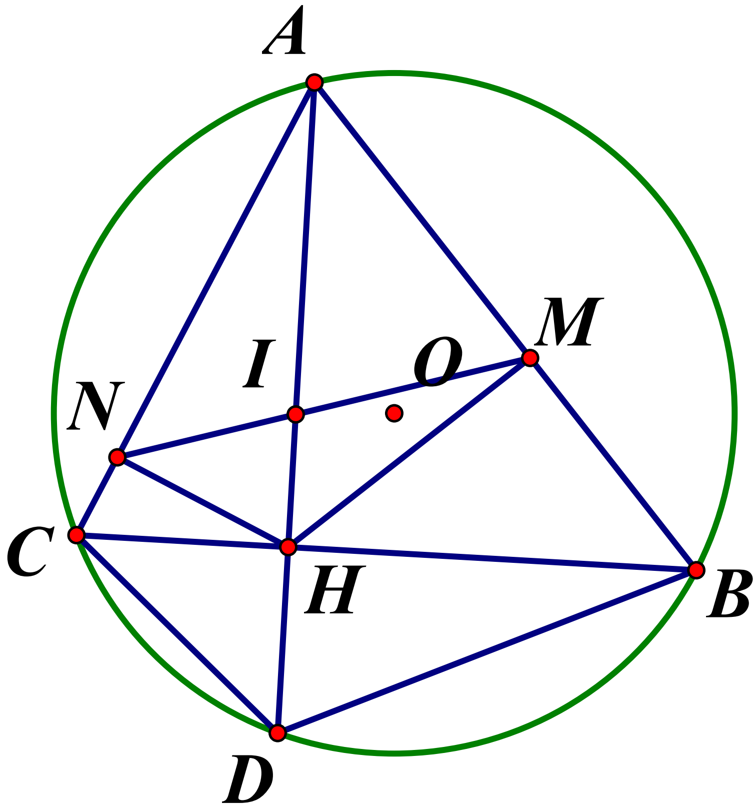
Ta lại có $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta ADE}=S_{\Delta DEC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.(2)$

Từ đó suy ra $S_{\Delta \stackrel{def}{=} ¿=\frac{1}{3}S_{\Delta AEF}} \Rightarrow AF=3FD \Rightarrow À=\frac{3}{4}AD=\frac{3\sqrt{2}a}{4}.(1)¿$

Ta có $S_{\Delta ABF}=\frac{1}{2}AF^2=\frac{9}{16}a^2.$ (2)

Từ (1) *và* (2) *suy ra* $S_{\Delta ≝ ¿=\frac{1}{3}S_{\Delta AEF}=\frac{3}{16}a^2.¿}$

Bài 3: (4,0 điểm)



a/ *Xét* ΔAHC *vuông tại* H *, có* HN *là đường cao ta có* $AH^2=AN.AC.(1)$

ΔAHB *vuông tại* H *, có* HM *là đường cao ta có* $AH^2=AM.AB.(2)$

Từ (1) *và* (2) *suy ra* $AN.AC=AM.AB\Rightarrow\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AB}$ *, ta lại có* $\widehat{MAN}=\widehat{CAB}$ *nên suy ra*

$\Delta ANM \quad \Delta ABC(c.g.c)$, *suy ra* $\widehat{ANM}=\widehat{ABC}\Rightarrow$ Tứ giác $MNCB$ nội tiếp một đường tròn.

b/ *Gọi* $AH\cap(O)=\{D\}, MN\cap\{AH\}=\{I\}.$

Ta chứng minh được $\Delta AHC \quad \Delta BHD(g.g)$ *suy ra* $\frac{AH}{HC}=\frac{HC}{HD}\Rightarrow HB.HC=HA.HD=k$ *nên*

$HD=\frac{k}{AH}$ *không đổi, suy ra* D *cố định.*

Ta lại có $\widehat{ANM}=\widehat{ADC}(=\widehat{ABC})$. Xét ΔANI và ΔADC có $\widehat{NAI}$ chung và $\widehat{ANM}=\widehat{ADC}$ (cmt)

Do đó $\Delta ANI \quad \Delta ADC(g.g.)$ *suy ra* $\frac{AN}{AD}=\frac{AI}{AC}\Rightarrow AI=\frac{AN.AC}{AD}=\frac{AH^2}{AD}$ *không đổi, mà* A *cố định nên* I *cố định.*

Vậy MN đi qua điểm I cố định

Bài 4: (4,0 điểm)

1/

$\begin{cases} y^2-x^2=1+2x\,(1) \\ x^2+xy+y^2=1\,(2) \end{cases}$. Từ PT (1) ta có $y^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow y=x+1 \vee y=-x-1$,

xét các trường hợp ta có

TH1: $y=x+1$, thay vào PT (2) ta có $x^2+x(x+1)+(x+1)^2=1$

$$\Leftrightarrow 3x(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right..$$

TH2: $y=-x-1$, thay vào PT (2) ta có $x^2-x(x+1)+(x+1)^2=1$

$$\Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của hệ phương trình là S$\in \{(0;1);(-1;0);(0;-1);(-1;0)\}$.

2/ Xét đa thức $Px=f(x)-10x$, *ta có* $P(1)=0$ *và* $P(2)=0$, *mà đa thức* $P(x)$ *bậc* 3 *nên* $P(x)$ *có dạng*

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x+m) \Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)(x+m)+10x.(1)$$

Thay x =11 và x = −8 vào đa thức $f(x)$ ta có S=19.

Bài 5 (2,0 điểm)

Áp dụng BĐT AM – GM ta có

$$\sqrt{(4a-1).\frac{1}{3}} \le \frac{4a-1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{6a-1}{3} \Rightarrow \sqrt{4a-1} \le \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(6a-1). \quad (1)$$

$$\sqrt{(4b-1).\frac{1}{3}} \le \frac{4b-1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{6b-1}{3} \Rightarrow \sqrt{4b-1} \le \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(6b-1). \quad (2)$$

$$\sqrt{(4c-1)\frac{1}{3}} \le \frac{4c-1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{6c-1}{3} \Rightarrow \sqrt{4c-1} \le \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(6c-1). \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có $P \le \frac{\sqrt{3}}{3}.(6(a+b+c)-3)=\sqrt{3}$.

Vậy, P có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{3}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.