|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT HƯNG YÊN  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN HƯNG YÊN**  **ĐỀ ĐỀ XUẤT** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **LẦN THỨ XIV**  **MÔN: TOÁN - LỚP 11**  *Thời gian làm bài: 180 phút,* *không kể thời gian giao đề* |

**Câu 1 (4,0 *điểm*).** Cho dãy số  thỏa mãn 

a) Chứng minh dãy số  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Chứng minh rằng 

**Câu 2 (4,0 *điểm*).** Cho đa thức , trong đó  là tham số thực. Biết rằng  có  nghiệm thực. Chứng minh rằng tồn tại một nghiệm  của  thỏa mãn .

**Câu 3 (4,0 *điểm*).** Cho tam giác  ngoại tiếp . Đường tròn  tiếp xúc với  lần lượt tại .Gọi  là điểm bất kì trên ,  cắt  tại  và . cắt lại  tại . Lấy  đối xứng với  qua .  cắt  tại . Chứng minh rằng khi  di chuyển trên  thì  di chuyển trên đường thẳng cố định.

**Câu 4 (4,0 *điểm*).** Tìm tất cả các số nguyên dương sao cho và  có cùng tập ước nguyên tố.

**Câu 5 (4,0 *điểm*).** Cho số nguyên . Hãy xác định số nguyên dương  lớn nhất sao cho với mỗi đa giác lồi cạnh, tồn tại tập  đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng là cạnh hoặc đường chéo của đa giác đó, sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong tập đều có điểm chung.

**-------- HẾT --------**

***Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.***

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

**Câu 1:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.a)** | Từ cách cho dãy số ta có  Ta có  Xét hàm số , ta có  liên tục và nghịch biến trên  Ta có   bị chặn. | 0,5 |
| suy ra dãy  tăng và dãy  giảm.  Theo tiêu chuẩn Weierstrass suy ra  là các dãy hội tụ. | 0,5 |
| Giả sử  Từ .  Từ . | 0,5 |
| Giải hệ phương trình  .  Vậy . | 0,5 |
| **1.b)** | Từ giả thiết ta thấy .  Mà | 0,5 |
| Do đó: . | 0,5 |
| Ta lại có  suy ra  nếu  lẻ;  nếu  chẵn.  Với mọi *n* lẻ ta có  . | 0,5 |
| Do đó | 0,5 |

**Câu 2:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Ta có:  Giả sử các nghiệm của  là , vì  có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên    Khi đó:    Suy ra:    Suy ra tồn tại chỉ số  sao cho  Vậy tồn tại nghiệm  thỏa mãn . | 1,0  1,0  1,0  1,0 |

**Câu 3:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Do:  nên  đồng viên.  Kí hiệu  là phép nghịch đảo tâm , phương tích .  Gọi  cắt  tại  thì  là trung điểm .  Dễ thấy  nên ta có . Suy ra .  Tương tự gọi  là trung điểm  thì ta cũng có .  Vì các điểm trên  là điểm bất động của  nên ta có    Gọi  là giao khác  của  thì  nằm trên .    Lấy  là giao của  và  cắt  và cắt lại  lần lượt tại  và  tương ứng.  Ta có  là trung điểm  là trung điểm  nên .  Xét nên  nằm trên .  Mà  nên có  nằm trên .  Ta lại có  nên  nằm trên  nằm trên  (đpcm). | 0,5  1,0  1,0  1,0  0,5 |

**Câu 4:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Hiển nhiên *n* thỏa mãn đề bài thì *n* lẻ. Thử thấy  thỏa mãn.  Ta xét  Nếu  với  thì  có ước nguyên tố của  là 19, không thỏa mãn.  ---------------------------------------------------------------------------------  Nếu *n* có ước nguyên tố lớn hơn 3. Gọi *p* là ước nguyên tố lớn nhất của *n.* Ta sẽ chỉ ra  có ước nguyên tố .  Thật vậy, do *n* có ước nguyên tố lớn hơn 3 và *p* là ước nguyên tố lớn nhất của *n* nên .  Ta có .  Và ,  nên .  Do vậy  có ước nguyên tố .  ---------------------------------------------------------------------------------  Ta có .  Gọi *h* là cấp của 2 theo mod *q.* Khi đó. Do vậy  hoặc .  Nếu  thì  , vô lý.  ---------------------------------------------------------------------------------  Nếu  thì  , vô lý.  Do vậy , như vậy . Suy ra .  Do đó  có ước nguyên tố .  Do *n* lẻ  nên . Điều này vô lý vì  và *p* là ước nguyên tố lớn nhất của *.*  *Vậy*  *là số duy nhất thỏa mãn bài toán.* | 1,0  1,0  1,0  1,0 |

**Câu 5:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Ta có thể thấy .  Ta sẽ chỉ ra rằng  với .  Đầu tiên, xét một - giác lồi tùy ý . Khi đó tập  gồm các đoạn thẳng  với  và đoạn thẳng  thỏa mãn yêu cầu : hai đoạn thẳng bất kì đều có điểm chung. Vì vậy .  Giả sử , khi đó tồn tại tập  gồm ít nhất  đoạn thẳng, mỗi đoạn là cạnh hoặc đường chéo của một - giác lồi sao cho hai đoạn thẳng bất kì đều có điểm chung. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất hai đoạn thẳng có chung đỉnh, giả sử là . Theo chiều kim đồng hồ ta giả sử  là đỉnh đầu tiên nối với  và  là đỉnh cuối cùng nối với . Số các đoạn thẳng nhận  là đầu mút tối đa là .  Với đoạn  tùy ý của  mà  thì . Thật vậy, nếu  thì  không thể có điểm chung. Tương tự ta có . Xét đa giác , để cho tiện ta kí hiệu .  Ta chứng minh rằng số đoạn thẳng có dạng  của đa giác lồi  mà hai đoạn bất kì có điểm chung không vượt quá .  Thật vậy, ta chứng minh điều này bằng quy nạp. Với  ta được  thì  hoặc  và do đó chỉ có không quá một đoạn thẳng như vậy thôi. Giả sử rằng khẳng định đúng đến . Xét , nếu  thì  ta có không quá  đoạn thẳng. Nếu  tương tự. Vậy xét . Nếu  là các đoạn thẳng được nối, với  thì tứ giác  có hai cạnh đối diện  không giao nhau. Vậy trong hai điểm  có ít nhất một điểm được nối với không quá một điểm khác. Ta chỉ cần bỏ điểm này đi thì số đoạn thẳng cùng lắm giảm đi 1. Khi đó đa giác tạo bởi các đỉnh còn lại theo giả thiết quy nạp, số đoạn thẳng không vượt quá . Vậy số đoạn thẳng của đa giác đã cho không vượt quá .  Quay lại bài toán, thì số đoạn thẳng tối đa là , điều này mâu thuẫn với . Tóm lại .  Vậy | 0,5  0,5  0,5  1,0  1,0  0,5 |

**---------HẾT--------**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Người ra đề**  (*ký và ghi rõ họ, tên)*  *Vũ Thị Thuần (0976267264)*  *Hoàng Thị Minh Thúy (0962090111)* |