**GV phản biện vòng 1: Nguyễn Tú**

| | |
|---|---|
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** | **KỲ THI KHẢO SÁT HSG GIỎI** |
| **PHÒNG GD VÀ ĐÀO TẠO** | **NĂM HỌC 2023-2024** |

**ĐỀ SỐ 32**

**MÔN THI: TOÁN**

*Thời gian: 150 phút(Không tính thời gian giao đề)*

## PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

**Câu 1:** Tính giá trị của biểu thức $A=2x^2+2y^2-2x-2y+4xy-2022$ với $x+y=1$ ta được

**A.** $-3$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $27$.

**Câu 2:** Kết quả rút gọn của biểu thức $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$?

**A.** $x^4-1$. **B.** $x^{16}-1$. **C.** $x^6-1$. **D.** $x^8-1$.

**Câu 3:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+4y^2+4y-2x+3$ là

**A.** $-2$. **B.** $-5$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 4:** Cho đa thức $P(x)=x^4-3x^3-7x^2+ax+b$; $Q(x)=x^2+2x-3$. Xác định $a;b$ sao cho $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$?

**A.** $a=27, b=-18$. **B.** $a=27, b=18$.

**C.** $a=-27, b=-18$. **D.** $a=-27, b=18$.

**Câu 5:** Biểu thức $-3x^2+x+1$ đạt giá trị lớn nhất bằng

**A.** $\frac{5}{4}$. **B.** $-\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{13}{12}$. **D.** $\frac{-13}{12}$.

**Câu 6:** Biểu thức $(x^2+5x+6)(x-1)(x+6)+2058$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** $1$. **B.** $36$. **C.** $2022$. **D.** $2058$.

**Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị của $x$ thoả mãn $(x^2+x)^2+4(x^2+x)=12$.

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 8:** Để đa thức $f(n)=2n^3-3n^2-7n+9$ chia hết cho đa thức $g(n)=2n-1$. thì các giá trị $n\in\mathbb{Z}$ cần tìm là

**A.** $n\in\{-2;0;1;3\}$. **B.** $n\in\{-2;0;1\}$. **C.** $n\in\{-2;0\}$. **D.** $n\in\{0;2\}$.

**Câu 9:** Các giá trị $n\in\mathbb{N}$ để đa thức $n^3-3n^2-3n-1 \vdots n^2+n+1$ là

**A.** $n\in\{-1;0\}$. **B.** $n\in\{-1;1\}$.

**C.** $n\in\{-2;0\}$. **D.** $n\in\{0;1\}$.

**Câu 10:** Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai cạnh $AD$ và $BC$ cắt nhau tại $E$, hai cạnh $DC$ và $AB$ cắt nhau tại $F$. Kẻ tia phân giác của hai góc $CED$ và $BFC$ cắt nhau tại $I$. Số đo góc $EIF$ theo các góc trong tứ giác $ABCD$ là

**A.** $\widehat{EIF}=\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$. **B.** $\widehat{EIF}=\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$. **C.** $\widehat{EIF}=\frac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2}$. **D.** $\widehat{EIF}=\frac{\widehat{B}+\widehat{D}}{2}$.

**Câu 11:** Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} + \hat{B} = 220^o$. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại K.Số đo của góc $CKD$ là

**A.** $90^o$. **B.** $80^o$. **C.** $70^o$. **D.** $110^o$.

**Câu 12:** Một hộp có $52$ chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1,2,3,...51,52$, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Xét biến cố "Số mặt xuất hiện trên thẻ là số $10$". Xác suất của biến cố trên là

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $\frac{1}{10}$. **D.** $\frac{1}{52}$.

## PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

### Câu I. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$.

b) Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=2$. Tính $a^4+b^4+c^4$.

### Câu II. (3 điểm)

a) Xác định $a,\ b$ sao cho $2x^3+ax-b$ chia cho $x+1$ thì dư $-6$, chia cho $x-2$ dư $21$.

b) Cho $a-b=7$. Tính giá trị biểu thức : $A=a^2(a+1)-b^2(b-1)-3ab(a-b+1)+ab$.

### Câu III. (2 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $6x^2+5y^2=74$.

b) Cho $x,\ y$ là những số nguyên lớn hơn $1$ sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x=y$.

### Câu IV. (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, $M$ là một điểm tùy ý trên đường chéo $BD$, kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

a) Chứng minh $DE=CF$;

b) Chứng minh ba đường thẳng $DE, BF, CM$ đồng quy;

c) Xác định vị trí của $M$ để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

### Câu V. (1 điểm)

Chứng minh $\forall a,b,c>0$, ta có: $\frac{4}{2a+b+c}+\frac{4}{2b+c+a}+\frac{4}{2c+a+b} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

……………………………….. **HẾT** ………………………………..

*Họ tên học sinh: ..............................................; Số báo danh: ......................*

**HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN**

**PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)**

**BẢNG ĐÁP ÁN**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.C | 2.D | 3.D | 4.A | 5.C | 6.C | 7.B | 8.A | 9.D | 10.D |
| 11.C | 12.D | | | | | | | | |

**Câu 1:** Tính giá trị của biểu thức $A = 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 4xy - 2022$ với $x + y = 1$ ta được

**A.** $-3$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $27$.

**Giải.**

$A = 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 4xy$

$A = (x^2 - 2x + 1) + 2y(x - 1) + y^2 + (x^2 + 2xy + y^2) - 1$

$A = (x-1)^2 + 2(x-1)y + y^2 + (x^2 + 2xy + y^2) - 1$

$A = (x - 1 + y)^2 + (x + y)^2 - 1$

$A = (1-1)^2 + 1^2 - 1$

$A = 0$

**Chọn đáp án C**

**Câu 2:** Kết quả rút gọn của biểu thức $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$?

**A.** $x^4 - 1$. **B.** $x^{16} - 1$. **C.** $x^6 - 1$. **D.** $x^8 - 1$.

**Giải.**

$(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$= (x^4-1)(x^4+1)$

$= x^8 - 1$.

**Chọn đáp án D**

**Câu 3:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 4y^2 + 4y - 2x + 3$ là

**A.** $-2$. **B.** $-5$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Giải.**

Ta có $A = x^2 + 4y^2 + 4y - 2x + 3 = (x-1)^2 + (2y+1)^2 + 1$.

Do đó Min $A = 1$ tại $\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

**Chọn đáp án D**

**Câu 4:** Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + ax + b$; $Q(x) = x^2 + 2x - 3$. Xác định $a;b$ sao cho $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$?

**A.** $a=27, b=-18$.　　**B.** $a=27, b=18$.

**C.** $a=-27, b=-18$.　　**D.** $a=-27, b=18$.

**Giải.**

Thực hiện phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $Q(x)$ ta được thương $x^2-5x+6$ và dư $(a-27)x+b+18$

Để $P(x) \vdots Q(x)$ thì $(a-27)x+b+18$ với mọi $x$ $\Rightarrow \begin{cases} a-27=0 \\ b+18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=27 \\ b=-18 \end{cases}$

Vậy $a=27, b=-18$.

**Chọn đáp án A**

**Câu 5:** Biểu thức $-3x^2+x+1$ đạt giá trị lớn nhất bằng

**A.** $\frac{5}{4}$.　　**B.** $-\frac{5}{4}$.　　**C.** $\frac{13}{12}$.　　**D.** $\frac{-13}{12}$.

**Giải.**

$-3x^2+x+1=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{13}{12}\le\frac{13}{12}$.

Vậy biểu thức $-3x^2+x+1$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{13}{12}$ khi $x=\frac{1}{6}$.

**Chọn đáp án C**

**Câu 6:** Biểu thức $\left(x^2+5x+6\right)(x-1)(x+6)+2058$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

**A.** $1$.　　**B.** $36$.　　**C.** $2022$.　　**D.** $2058$.

**Giải.**

$$A=\left(x^2+5x+6\right)(x-1)(x+6)+2058=\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2+5x-6\right)+2058=\left(x^2+5x\right)^2-6^2+2058$$

$$=\left(x^2+5x\right)^2+2022\ge 2022.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left(x^2+5x+6\right)(x-1)(x+6)+2058$ là $2022$ khi $x=0$ hoặc $x=-5$.

**Chọn đáp án C**

**Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị của $x$ thoả mãn $\left(x^2+x\right)^2+4\left(x^2+x\right)=12$.

**A.** $1$.　　**B.** $2$.　　**C.** $3$.　　**D.** $4$.

**Giải.**

Ta có: $\left(x^2+x\right)^2+4\left(x^2+x\right)=12$

$(x+2)(x-1)\left(x^2+x+6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

**Chọn đáp án B**

**Câu 8:** Để đa thức $f(n)=2n^3-3n^2-7n+9$ chia hết cho đa thức $g(n)=2n-1.$ thì các giá trị $n\in\mathbb{Z}$ cần tìm là

**A.** $n\in\{-2;0;1;3\}$. **B.** $n\in\{-2;0;1\}$. **C.** $n\in\{-2;0\}$. **D.** $n\in\{0;2\}$.

**Giải.**

Ta có: $f(n)=2n^3-3n^2-7n+9=(2n-1)(n^2-n-4)+5$

Vì $(2n-1)(n^2-n-4)\vdots(2n-1)$ Do đó $f(n)=2n^3-3n^2-7n+9\vdots(2n-1)\Leftrightarrow 5\vdots 2n-1$

hay $2n-1\in U_{(5)}=\{-5;-1;1;5\}$.

Ta lập bảng

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2n-1$ | $-5$ | $-1$ | $1$ | $5$ |
| $n$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $3$ |

Vậy $n\in\{-2;0;1;3\}$.

**Chọn đáp án A**

**Câu 9:** Các giá trị $n\in\mathbb{N}$ để đa thức $n^3-3n^2-3n-1\vdots n^2+n+1$ là

**A.** $n\in\{-1;0\}$. **B.** $n\in\{-1;1\}$.

**C.** $n\in\{-2;0\}$. **D.** $n\in\{0;1\}$.

**Giải.**

Ta có: $n^3-3n^2-3n-1=n^3+n^2+n-4n^2-4n-4+3$

$=n(n^2+n+1)-4(n^2+n+1)+3$

Vì $n(n^2+n+1)-4(n^2+n+1)\vdots n^2+n+1$

Để đa thức $n^3-3n^2-3n-1\vdots n^2+n+1$ thì $3\vdots n^2+n+1$

Hay $n^2+n+1\in U(3)=\{1;3\}$

TH1: $n^2+n+1=1\Leftrightarrow n(n+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=0\\n=-1(KTM)\end{array}\right.$

TH2: $n^2+n+1=3\Leftrightarrow n(n+1)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=1(TM)\\n=-2(KTM)\end{array}\right.$

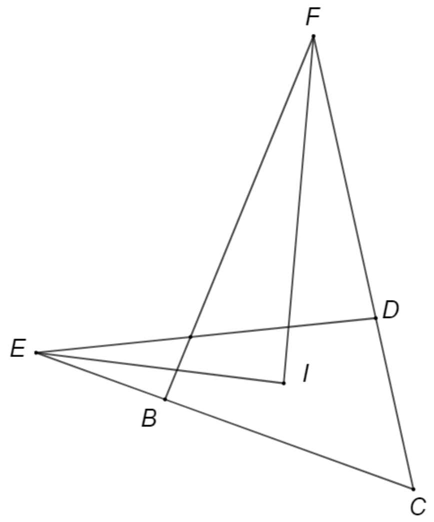
Vậy $n\in\{0;1\}$ thì đa thức $n^3-3n^2-3n-1\vdots n^2+n+1$.

**Chọn đáp án D**

**Câu 10:** Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai cạnh $AD$ và $BC$ cắt nhau tại $E$, hai cạnh $DC$ và $AB$ cắt nhau tại $F$. Kẻ tia phân giác của hai góc $CED$ và $BFC$ cắt nhau tại $I$. Số đo góc $EIF$ theo các góc trong tứ giác $ABCD$.

**A.** $\widehat{EIF}=\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$. **B.** $\widehat{EIF}=\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$. **C.** $\widehat{EIF}=\dfrac{\hat{C}+\hat{D}}{2}$. **D.** $\widehat{EIF}=\dfrac{\hat{B}+\hat{D}}{2}$.

**Giải.**




$FI$ cắt $BC$ tại $K$, suy ra $K$ thuộc đoạn $BC$

$\Rightarrow \widehat{EIF} = \widehat{EKI} + \widehat{IEK}$ ($\widehat{EIF}$ là góc ngoài của $\Delta IKE$)

$= \widehat{B} + \widehat{BFK} + \widehat{IEK}$ ($\widehat{CKF}$ là góc ngoài của $\Delta FBK$)

$\widehat{BFC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) \Rightarrow \widehat{BFK} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$.

$\widehat{AEB} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \Rightarrow \widehat{IEK} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$.

$\widehat{EIF} = \widehat{B} + 90^\circ - \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} + 90^\circ - \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 180^\circ - \dfrac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2}$

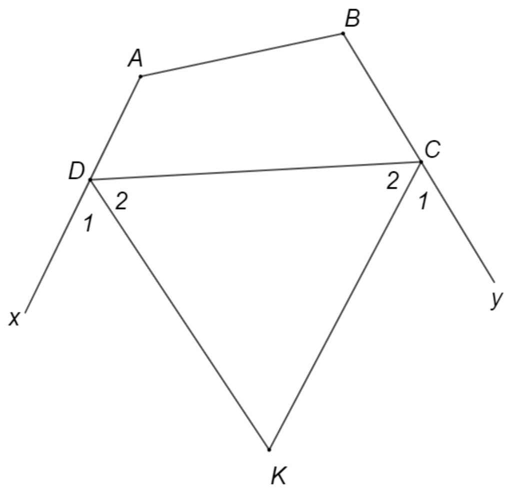
Vậy $\widehat{EIF} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2}$.

**Chọn đáp án D**

**Câu 11:** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{B} = 220^\circ$. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại K.Số đo của góc $CKD$ là

**A.** $90^\circ$. **B.** $80^\circ$. **C.** $70^\circ$. **D.** $110^\circ$.

**Giải.**




Ta có: $\widehat{CDx}+\widehat{DCy}=\widehat{A}+\widehat{B}=220^\circ$.

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{CDx}+\widehat{DCy}}{2}=110^\circ$ Do đó $\widehat{D_2}+\widehat{C_2}=110^\circ$.

Xét $\Delta CKD$ có: $\widehat{CKD}=180^\circ-\left(\widehat{D_2}+\widehat{C_2}\right)=180^\circ-110^\circ=70^\circ$.

**Chọn đáp án C**

**Câu 12:** Một hộp có $52$ chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1,2,3,...51,52$, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Xét biến cố "Số mặt xuất hiện trên thẻ là số $10$". Xác suất của biến cố trên là:

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $\dfrac{1}{10}$. **D.** $\dfrac{1}{52}$.

**Chọn đáp án D**

## PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

### Câu I. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$.

b) Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=2$. Tính $a^4+b^4+c^4$.

**Giải.**

a) Ta có: $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)-15$

Đặt $y=x^2+5x+9$.

Khi đó đa thức có dạng: $y(y+2)-15=y^2+2y-15=(y+5)(y-3)$

Từ đó suy ra: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15=\left(x^2+5x+9\right)\left(x^2+5x+1\right)$

b) Từ $a+b+c=0$

$\Rightarrow (a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0$

Mà $a^2+b^2+c^2=2 \Rightarrow ab+bc+ca=-1 \Rightarrow (ab+bc+ca)^2=1$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2bc^2a+2ca^2b=1$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=1 \Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=1$

Từ $a^2+b^2+c^2=2$

$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2=2^2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+2.1=4 \Rightarrow a^4+b^4+c^4=2$

**Câu II. (3 điểm)**

a) Xác định a, b sao cho $2x^3+ax-b$ chia cho $x+1$ thì dư $-6$, chia cho $x-2$ dư 21.

b) Cho $a-b=7$. Tính giá trị biểu thức : $A=a^2(a+1)-b^2(b-1)-3ab(a-b+1)+ab$.

**Giải.**

a) Theo định lý Bézout ta có: $f(-1)=-6; f(2)=21$

$\Rightarrow 2(-1)^3+a(-1)-b=-6 \Rightarrow a+b=4$ (1)

$\Rightarrow 2.2^3+a.2-b=21 \Rightarrow 2a-b=5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $3a=9 \Rightarrow a=3; b=1$

b) Ta có : $A=a^3+a^2-b^3+b^2-3ab(a-b)-3ab+ab$

$=a^3-3ab(a-b)-b^3+a^2+b^2-2ab$

$=(a-b)^3+(a-b)^2=7^3+7^2=392$.

**Câu III. (2 điểm)**

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $6x^2+5y^2=74$.

b) Cho $x, y$ là những số nguyên lớn hơn $1$ sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x=y$.

**Giải.**

a) Từ điều kiện đã cho $6x^2+5y^2=74 \Rightarrow y$ chẵn và $x \neq 0; y \neq 0$

Nếu cặp số $(x_0;y_0)$ là một cặp số nguyên thỏa mãn điều kiện thì các cặp số $(x_0;-y_0);(-x_0;y_0);(-x_0;-y_0)$ cũng thỏa mãn điều kiện, do đó chỉ cần xét $x>0, y>0$. Từ điều kiện suy ra $5y^2<74 \Rightarrow y^2<15 \Rightarrow 0<y<4 \Rightarrow y=2$ (vì y chẵn) $\Rightarrow x=3$

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện là $(3;2);(3;-2);(-3;2);(-3;-2)$.

b) Do $x, y$ là các số nguyên lớn hơn $1$ nên $x; y \ge 2$

$\Rightarrow -4xy + 1 < -7x + 7y < 4xy + 1$

$\Rightarrow 4x^2y^2 - 4xy + 1 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < 4x^2y^2 + 4xy + 1$

$\Rightarrow (2xy - 1)^2 < 4x^2y^2 - 7x + 7y < (2xy + 1)^2$

Suy ra $4x^2y^2 - 7x + 7y$ là số chính phương. Ta có $x; y \ge 2$ nên

$1 < 2xy - 1 < 2xy + 1$. Do đó: $4x^2y^2 - 7x + 7y = (2xy)^2 \Leftrightarrow x = y$

**Câu IV. (6 điểm)**

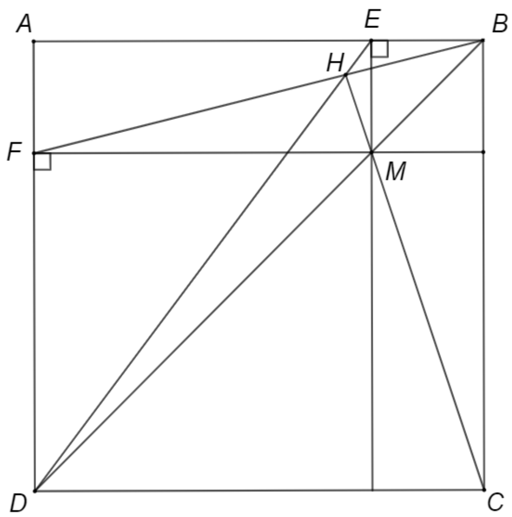
Cho hình vuông $ABCD$, $M$ là một điểm tùy ý trên đường chéo $BD$, kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

a) Chứng minh $DE = CF$;

b) Chứng minh ba đường thẳng $DE, BF, CM$ đồng quy;

c) Xác định vị trí của $M$ để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

**Giải.**




a) Chứng minh $DE = CF$

+ Có tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \begin{cases} AF = ME \\ AE = MF \end{cases}$

+ $\Delta FMD$ có $\widehat{MED} = 90^0$ (gt) và $\widehat{MDF} = 45^0$ (Do $DB$ là phân giác)

$\Rightarrow \Delta MDF$ vuông cân tại $F$ $\Rightarrow MF = FD$ nên $FD = AE (= FM) \Rightarrow \Delta AED = \Delta DFC$ (c-g-c)

$\Rightarrow DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng $DE, BF, CM$ đồng quy

+ Gọi giao điểm của $CF$ và $DE$ là $Q$. Vì $\Delta AED = \Delta DFC$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DCF}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 90^0$ (Do $\widehat{ADC} = 90^0$) $\Rightarrow \widehat{FCD} + \widehat{EDC} = 90^0$ Hay $\widehat{DQC} = 90^0$

$\Rightarrow DE \perp CF$ tại $Q$

+ Chứng minh tương tự ta được $CE \perp BF$

+ Gọi $EM \cap DC$ tại $K$. Có $DC // AB$ (Do $DFMK$ là hình vuông) mà $ME \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow EM \perp DC$ hay $\widehat{MKC} = 90^0$

+ C/m tứ giác $DFMK$ là hình chữ nhật (Do có ba góc vuông)

Mà $DM$ là phân giác của $\widehat{FDK}$ (Do $DB$ là phân giác của $\widehat{ADC}$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $DFMK$ là hình vuông $\Rightarrow MK = MF$

+ C/m tứ giác $EKCB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow KC = EB \Rightarrow AC = DK$

+ Mà $\Delta BEM$ vuông cân tại $E \Rightarrow EB = EM$ nên $EM = KC (= EB)$

+ $\Delta MEF = \Delta KCM$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{EFM}$

Gọi giao điểm của $CM$ và $EF$ là $H$ $\Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{KMC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{HME}$

Mà $\widehat{EMH} + \widehat{HMF} = 90^\circ$ (Do tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow \widehat{EFM} + \widehat{HMF} = 90^\circ$ hay $\widehat{FHM} = 90^\circ \Rightarrow CH \perp EF$

+ Xét $\Delta CEF$ có $CM \perp EF$ tại $H$ (cmt); $ED \perp CF$ (cmt); $FB \perp EC$ (cmt)

$\Rightarrow DE, BF, CM$ đồng quy (đpcm)

c) Xác định vị trí của $M$ để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất

Có tứ giác $MEAF$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow S_{MEAF} = AE.EM = AE.EB$ (Do $EB = EM$)

Áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$0 \le (AE - EB)^2 \Leftrightarrow 4AE.EB \le (AE + EB)^2 \Leftrightarrow AE.EB \le \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow S_{MEAF} \le \frac{AB^2}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $AE = EB$ hay $AE = EM$. Mà $AEMF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AEMF$ là hình vuông

$\Rightarrow AM$ là phân giác của $\widehat{EAF}$. Mà $AC$ là phân giác của $\widehat{BAD}$ $(E \in AB; F \in AD) \Rightarrow M \in AC$

Vậy $M$ là giao điểm của $AC$

và $BD$ thì $S_{AEMF}$ lớn nhất.

**Câu V. (1 điểm)**

Chứng minh $\forall a,b,c > 0$, ta có: $\frac{4}{2a+b+c} + \frac{4}{2b+c+a} + \frac{4}{2c+a+b} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

**Giải.**

Biến đổi tương đương: $\forall x, y > 0$

$$\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \ge 4xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c} \le \frac{1}{8a} + \frac{1}{4(b+c)} = \frac{1}{8a} + \frac{1}{4b+4c} \le \frac{1}{8a} + \frac{1}{16b} + \frac{1}{16c} \quad (1)$$

Tương tự $\frac{1}{2b+c+a} \le \frac{1}{8b} + \frac{1}{16c} + \frac{1}{16a} \quad (2)$

$$\frac{1}{2c+a+b} \le \frac{1}{8c} + \frac{1}{16a} + \frac{1}{16b} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cùng chiều (1); (2); (3) ta được:

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+c+a} + \frac{1}{2c+a+b} \le \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}$$ hay

$$\frac{4}{2a+b+c} + \frac{4}{2b+c+a} + \frac{4}{2c+a+b} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

**----------- Hết -----------**

**<u>Chú ý</u>:**

**- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.**

**- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.**