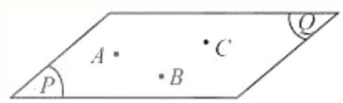
MỤC LỤC

▶BÀI ④. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

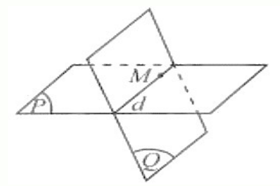
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

❶. *Vị trí tương đối giữ 2 mặt phẳng (α) và (β) có 3 vị trí tương đối*

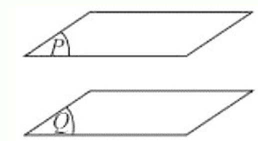
- Trường hợp 1: (P) và (Q) có ba điểm chung không thẳng hàng, ta nói hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau, kí hiệu $(P)\equiv(Q)$.
- Trường hợp 2: (P) và (Q) phân biệt và có một điểm chung, ta nói (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d đi qua điểm chung, ki hiệu $(P)\cap(Q)=d$.
- Trường hợp 3: (P) và (Q) không có bất kì điểm chung nào, nghĩa là $(P)\cap(Q)=\varnothing$, ta nói (P) và (Q) song song với nhau, kí hiệu (P)/¿(Q) hoặc (Q)/¿(P).



$(P)\equiv(Q)$



(P) cắt (Q)



$(P)\parallel(Q)$

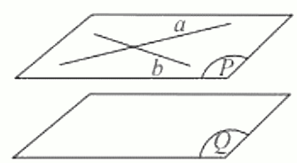
✎ ***Định nghĩa:*** Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung; *(α) // (β) ⇔ $(\alpha)\cap(\beta)$ = ∅*

✎ ***Chú ý:*** *(α) // (β), d ⊂ (α) ⇒ d // (β)*

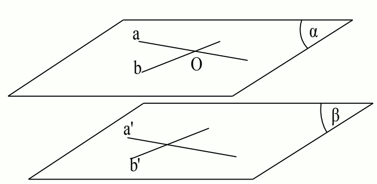
❷. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

✎ **Định lý ❶**:

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

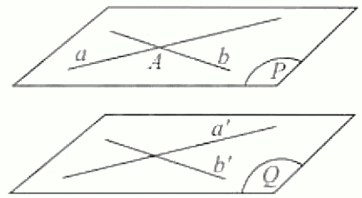


✎ **Hệ quả:** Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b lần lượt song song với hai đường thẳng a', b' nằm trong mặt phẳng (β) thì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β).

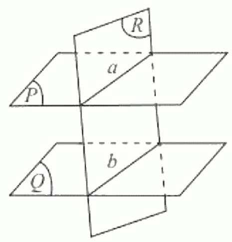


$$\begin{cases} a,b\subset(\alpha) \\ a\cap b=O \\ a//a', b//b' \\ a',b'\subset(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$$

Lưu ý: Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường

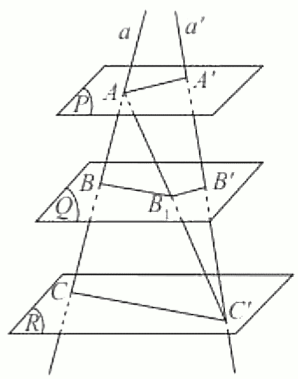


✎ **Định lý ❸**: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Nếu (R) cắt (P) thì cắt (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.



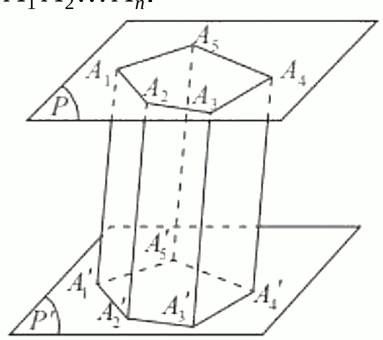
❹. Định lý talet trong không gian

- Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$



❺. Hình lăng trụ và hình hộp

✎ ***Hình lăng trụ:*** Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại $A_1', A_2', \ldots, A_n'$. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \ldots, A_nA_1A_1'A_n'$ và hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n, A_1'A_2'\ldots A_n'$ gọi là hình lăng trụ, kí hiệu $A_1A_2\ldots A_n \cdot A_1'A_2'\ldots A_n'$.



- Trong hình lăng trụ $A_1A_2\ldots A_n \cdot A_1'A_2'\ldots A_n'$, ta gọi:

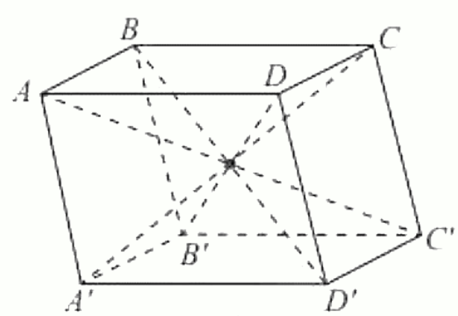
- Các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1', A_2', \ldots, A_n'$ là các đỉnh;
- Các hình bình hành $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \ldots, A_nA_1A_1'A_n'$ là các mặt bên;
- Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_nA_n'$ là các cạnh bên.
  Các cạnh bên song song vả bằng nhau.
- Các cạnh của hai đa giác đáy là các cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song và bằng nhau.

Chú ý: Hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, ...

Hình hộp: là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

Trong một hình hộp ta có:

- Sáu mặt là sáu hình bình hành. Mỗi mặt đều có một mặt song song với nó. Hai mặt như thế gọi là hai mặt đối diện; - Hai đỉnh không cùng nằm trên một mặt gọi là hai đỉnh đối diện;
- Đoạn thẳng nối hai đình đối diện gọi là đường chéo;
- Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

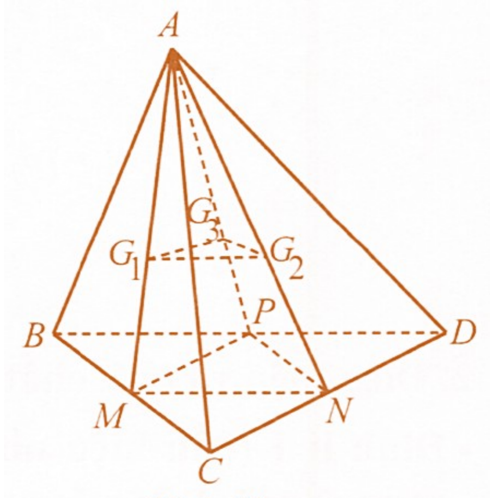
•Dạng ❶: Chứng minh hai mặt phẳng song song

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3)//(BCD)$..

Chứng minh tương tự ta cũng có $G_2G_3//(BCD)$.

Lời giải



Hình 30

Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CD, BD.

Vì $M\in AG_1$ và $\frac{AG_1}{AM}=\frac{2}{3}; N\in AG_2$ và $\frac{AG_2}{AN}=\frac{2}{3}$ nên $\frac{AG_1}{AM}=\frac{AG_2}{AN}$, suy ra $G_1G_2//MN$.

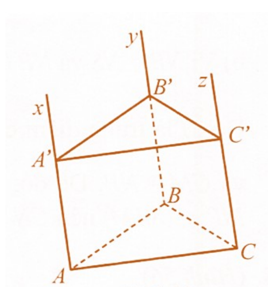
Mà $MN\subset(BCD)$ nên $G_1G_2//(BCD)$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $G_2G_3//(BCD)$.

Mà G_1G_2,G_2G_3 cắt nhau trong mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$. Vậy $(G_1G_2G_3)//(BCD)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC. Qua A,B,C lần lượt vẽ các tia Ax,By, Cz đôi một song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (P). Trên các tia Ax,By,Cz lần lượt lấy các điểm A',B',C' sao cho $AA'=BB'=CC'$. Chứng minh rằng $(ABC)//(A'B'C')$.

Lời giải



Hình 58

Vì $AA'//BB'$ và $AA'=BB'$ nên $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $A'B'//AB$. Mà $AB\subset(ABC)$

nên $A'B'//(ABC)$.

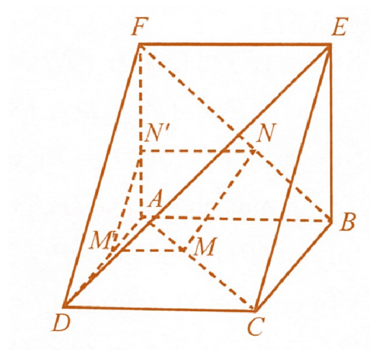
Tương tự ta có $B'C'//(ABC)$.

Từ đó, suy ra $(ABC)//(A'B'C')$.

Câu 3: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF)//(BCE)$; b) $(DEF)//(MM'N'N)$.

Lời giải



Hình 8

a) Ta có: $AD//BC \Rightarrow AD//(BCE)$; $AF//BE \Rightarrow AF//(BCE)$.

Ta có $AD \cap AF = A$ và $AD, AF \subset (ADF)$ nên $(ADF)//(BCE)$.

b) Trong tam giác ADC, ta có $MM'//CD$, theo định lí Thalès suy ra $\frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$.(1)

Trong tam giác AFB, ta có $NN'//AB$, theo định lí Thalès suy ra $\frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}$. (2)

Ta có: $AM = BN$ (giả thiết) và $AC = BF$ (vì $ABCD$ và $ABEF$ là các hình vuông). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{AM'}{AD}=\frac{AN'}{AF}$, theo định lí Thalès đảo trong tam giác ADF, suy ra $M'N'//DF$

Do đó, $DF//(MM'N'N)$. (4)

Lại có $NN'//AB$ (giả thiết), suy ra $NN'//EF$, suy ra $EF//(MM'N'N)$. (5)

Mặt khác, $DF\cap EF=F$ và $DF,EF\subset(DEF)$. (6)

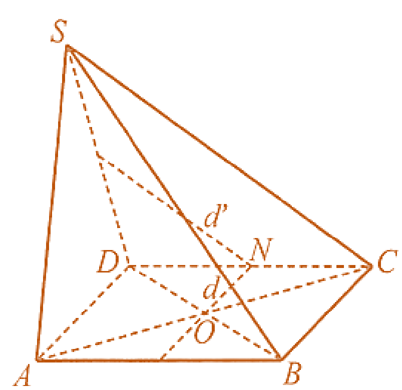
Từ (4), (5) và (6) suy ra $(DEF)//(MM'N'N)$.

•Dạng ❷: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và O là giao điểm của hai đường chéo. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SBC). Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD).

Lời giải



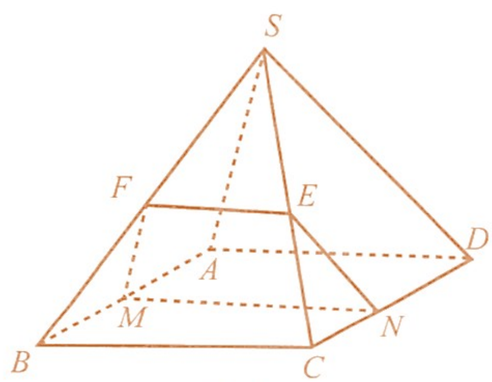
Hình 31

Do $(P)//(SBC),(ABCD)\cap(SBC)=BC,O$ là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ nên giao tuyến d của (P) và $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua O và song song với BC.

Gọi N là giao điểm của d và CD. Do $(SCD)\cap(SBC)=SC$, $(P)//(SBC), N$ là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (SCD) nên giao tuyến d' của (P) và (SCD) là đường thẳng đi qua N và song song với SC.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. (P) là mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD). Tìm giao tuyến của các mặt của hình chóp với mặt phẳng (P).

Lời giải



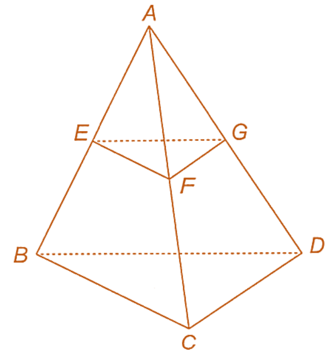
Hình 4

$(P)\cap(ABCD)=MN$ với $MN//BC//AD$. $(P)\cap(SAB)=MF$ với $MF//SA(F\in SB)$.

$(P)\cap(SDC)=NE$ với $NE//SD(E\in SC)$. $(P)\cap(SBC)=EF$ với $EF//BC//MN$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E là một điểm bất kì thuộc cạnh AB; (P) là mặt phẳng đi qua E và song song với mặt phẳng (BCD). Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt của hình tứ diện.

Lời giải



Hình 4.25

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (BCD) nên hai giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và hai mặt phẳng $(P),(BCD)$ song song với nhau. Trong mặt phẳng (ABC) vẽ $EF//BC(F\in AC)$ thì EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC).

Tương tự, trong mặt phẳng (ABD) vẽ $EG//BD(G\in AD)$ thì EG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Khi đó FG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD).

•Dạng ❸: Ứng dụng định lí Thalès

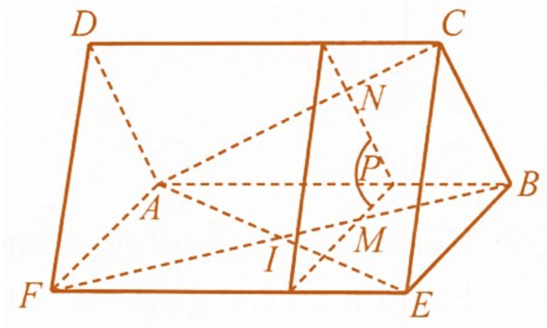
☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $(AFD)//(BEC)$.

b) Gọi M là trọng tâm của tam giác ABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD). Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng AC tại N. Tính $\frac{AN}{NC}$.

Lời giải



Hình 32

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD//BC$. Mà AD không thuộc mặt phẳng (BEC), suy ra $AD//(BEC)$. Tương tự, do $ABEF$ là hình bình hành nên $AF//BE$, suy ra $AF//(BEC)$. Mà AD, AF cắt nhau nên $(AFD)//(BEC)$.

b) Gọi I là giao điểm của AE và BF.

Ta có I là trung điểm đoạn AE và M là trọng tâm của tam giác ABE nên $M \in BI$ và $BM = \frac{2}{3}BI = \frac{1}{3}BF$, hay $FM = 2MB$.

Vì $(AFD)//(BEC), (AFD)//(P)$ nên $(P)//(BEC)$.

Ta có đường thẳng FB cắt ba mặt phẳng song song $(ADF), (P), (BCE)$ lần lượt tại F, M, B; đường thẳng AC cũng cắt ba mặt phẳng trên theo thứ tự tại A, N, C.

Áp dụng định lí Thalès trong không gian, ta có: $\frac{AN}{FM} = \frac{NC}{MB} \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{FM}{MB} = 2$. Vậy $\frac{AN}{NC} = 2$

Câu 2: Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song. Hai đường thẳng d, d' cắt ba mặt phẳng lần lượt tại A, B, C và A', B', C'. Biết rằng $AB = 2cm, BC = 6cm$ và $A'B' = 3cm$, tính $B'C'$.

Lời giải

Áp dụng định lí Thalès tính được $B'C' = 9$.

Câu 3: Một chiếc bình nước hình trụ được đặt trên bàn, lượng nước trong bình bằng đúng một nữa dung tích của bình. Hoàng đặt một chiếc ống hút vào trong bình sao cho một đầu của ống hút chạm vào đáy bình còn một đầu chạm vào miệng bình. Hoàng nói rằng độ dài của phần ống hút bị ướt bằng $\frac{1}{3}$ độ dài của toàn bộ ống hút. Hỏi Hoàng nói đúng hay sai? Vì sao?

Lời giải

Hoàng nói sai. Theo định lí Thalès trong không gian thì độ dài của phần ống bị ướt bằng $\frac{1}{2}$ độ dài của toàn bộ ống hút.

Ⓒ. Dạng toán rèn luyện

⬩Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

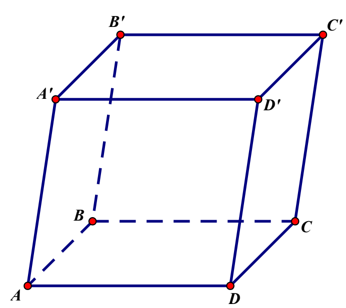
Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(BA'C')//(ACD')$. **B.** $(ADD'A')//(BCC'B')$.

C. $(BA'D)//(CB'D')$. **D.** $(ABA')//(CB'D')$.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$\begin{cases} BA'//CD' \\ A'C'//AC \end{cases} \Rightarrow (BA'C')//(ACD')$$

$$\begin{cases} AD//BC \\ AA'//BB' \end{cases} \Rightarrow (ADD'A')//(BCC'B')$$

$$\begin{cases} BD \,//\, B'D' \\ A'D \,//\, B'C \end{cases} \Rightarrow (BA'D) // (CB'D')$$

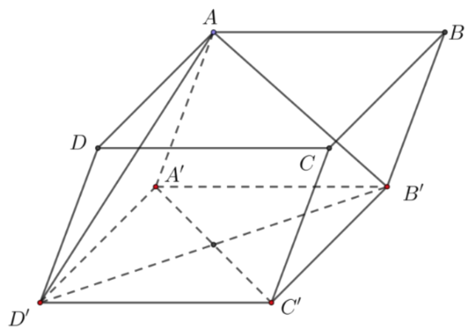
Mặt khác $B' \in (ABA') \cap (CB'D') \Rightarrow$ D sai.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(BA'C')$. **B.** $(C'BD)$. **C.** (BDA'). **D.** (ACD').

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'D'//BD$; $AD'//C'B \Rightarrow (AB'D')//(C'BD)$.

Câu 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có tâm lần lượt là O và O', không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M là trung điểm AB, xét các khẳng định

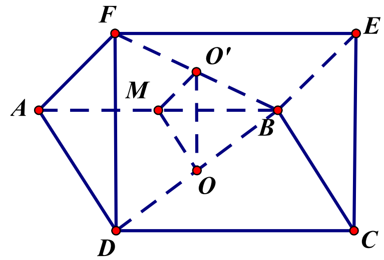
$(I):(ADF)//(BCE)$; $(II):(MOO')//(ADF)$; $(III):(MOO')//(BCE)$; $(IV):(ACE)//(BDF)$. Những khẳng định nào đúng?

A. (I). **B.** $(I),(II)$.

C. $(I),(II),(III)$. **D.** $(I),(II),(III),(IV)$.

Lời giải

Chọn C



Xét hai mặt phẳng (ADF) và (BCE) có : $\begin{cases} AD//BC \\ AF//BE \end{cases}$ nên $(I):(ADF)//(BCE)$ là đúng.

Xét hai mặt phẳng (ADF) và (MOO') có : $\begin{cases} AD//MO \\ AF//MO' \end{cases}$ nên $(II):(MOO')//(ADF)$ là đúng.

Vì $(I):(ADF)//(BCE)$ đúng và $(II):(MOO')//(ADF)$ đúng nên theo tính chất bắc cầu ta có $(III):(MOO')//(BCE)$ đúng.

Xét mặt phẳng $(ABCD)$ có $AC \cap BD = O$ nên hai mặt phẳng (ACE) và (BDF) có điểm O chung vì vậy không song song nên $(IV):(ACE)//(BDF)$ sai.

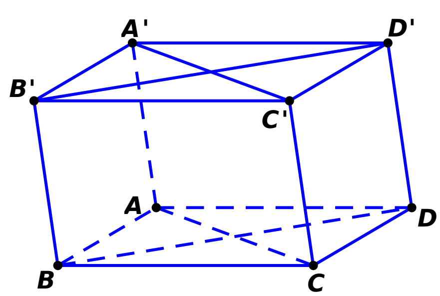
Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. $(ABCD)//(A'B'C'D')$. **B.** $(AA'D')//(BCC')$.

C. $(BDD')//(ACC')$. **D.** $(ABB')//(CDC')$.

Lời giải

Chọn C



A đúng vì hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là hai mặt đáy của hình hộp nên song song.

B đúng vì hai mặt phẳng $(AA'D')$ và (BCC') là hai mặt đối của hình hộp nên song song.

D đúng vì hai mặt phẳng (ABB') và (CDC') là hai mặt đối của hình hộp nên song song.

C sai vì hai mặt phẳng này có điểm chung là O với $O = AC \cap BD$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A'B'C'$, ACC'. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK).

A. (ABB'). **B.** (ACC'). **C.** $(BB'C')$. **D.** (ABC').

Lời giải

Chọn C

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, $B'C'$ và CC'.

Ta có $\begin{cases} IJ // MN \\ IJ \not\subset (BB'C) \\ MN \subset (BB'C) \end{cases}$ nên $IJ // (BB'C')$.

Ta có $\begin{cases} JK // NP \\ JK \not\subset (BB'C) \\ NP \subset (BB'C) \end{cases}$ nên $JK // (BB'C')$.

Từ đó suy ra $(IJK) // (BB'C')$.

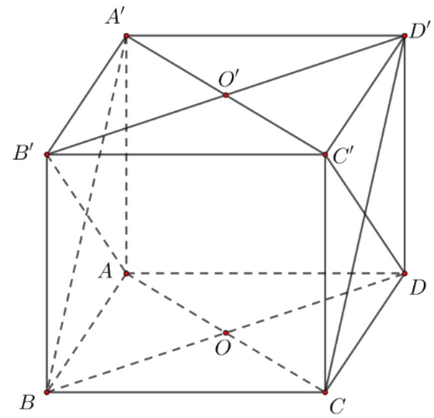
Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(BA'D') // (ADC')$. **B.** $(ABB') // (CDD')$.

C. $(B'AC)//(DA'C')$. **D.** $(ABO')//(OC'D')$.

Lời giải

Chọn A



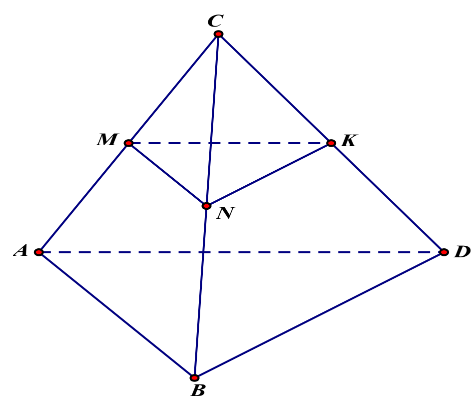
Ta thấy $AB' \cap A'B$, mà $(BA'D') \equiv (CBA'D')$ và $(ADC') \equiv (ADC'B')$ nên hai mặt này cắt nhau. song với mặt phẳng (*ABD*). Thiết diện của tứ diện *ABCD* cắt bởi mặt phẳng (*P*) là

A. Hình thang. **B.** Hình chữ nhật.

C. Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải

Chọn D



(*P*) đi qua *M* song song với (*ABD*) nên (*P*) cắt *BC* (gọi giao điểm là *N*) và cắt *CD* (gọi giao điểm là *K*) sao cho *MN // AB* và *MK // A**D.***

Khi đó $(P) \equiv (MNK) \Rightarrow$ Thiết diện của tứ diện *ABCD* cắt bởi mặt phẳng (*P*) là tam giác *MNK*.

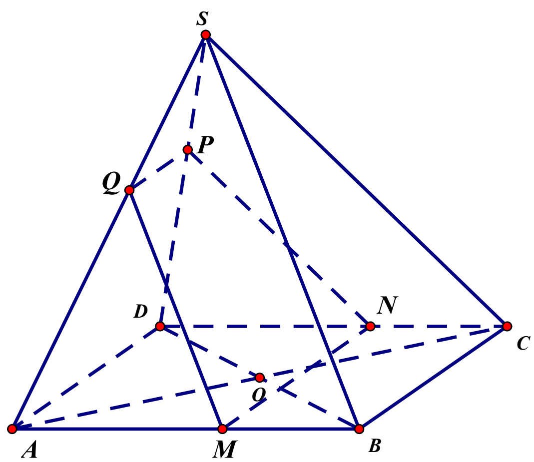
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng AB, $M \neq A; M \neq B$. Qua M dựng mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SBC). Thiết diện tạo với mặt phẳng (α) và chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang cân. **B.** Hình thang vuông.

C. Hình tam giác. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(SBC)\\(SBC)\cap(ABCD)=BC\\(\alpha)\cap(ABCD)=\{M\}\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha)\cap(ABCD)=MN; MN//BC$.

Tương tự $(\alpha)\cap(SAB)=MQ; MQ//SB$; $(\alpha)\cap(SDC)=NP; NP//SC$;

$(\alpha)\cap(SAD)=PQ; PQ//AD//BC$.

Thiết diện tạo thành là hình thang $MNPQ$ do SBC là tam giác đều nên $MQ=NP$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

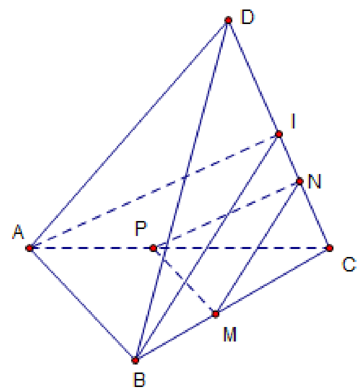
Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi I là trung điểm đoạn CD, M là điểm nằm trên đoạn BC (M khác B và C), (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (ABI). Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (α) là

A. Một tam giác vuông cân. **B.** Một tam giác đều.

C. Một hình bình hành. **D.** Một tam giác cân.

Lời giải

Chọn D

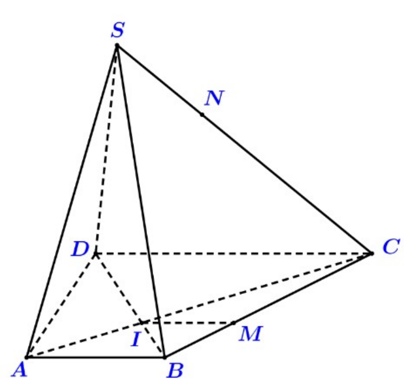


$(ABI)\cap(BCD)=BI$, (α) và (BCD) có điểm M chung. Vậy giao tuyến của (α) và (BCD) là đường thẳng qua M song song với IB, giả sử cắt CD tại N.

Lập luận tương tự ta được $NP//AI$, $P\in AC$; $PM//AB$.

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên tam giác ABI cân tại $I \Rightarrow \triangle MNP$ cân tại N

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $AB//CD, AB=a; CD=2a$, gọi I là giao điểm của AC và BD. Qua I kẻ đường thẳng song song CD cắt BC tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $CN=2NS$ (tham khảo hình vẽ).



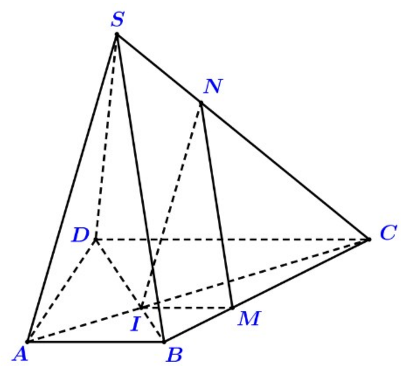
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(IMN)//(SAB)$. **B.** $(IMN)//(SAD)$.

C. $(IMN)//(SAC)$. **D.** $(IMN)//(SBD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $IM // CD \Rightarrow IM // AB \Rightarrow IM // (SAB)(1)$.

Trong $(ABCD): \frac{IA}{IC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IC}{AC} = \frac{2}{3} = \frac{CM}{CB}$.

Mà $\frac{CN}{CS} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CN}{CS} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow MN // SB \Rightarrow MN // (SAB)(2)$.

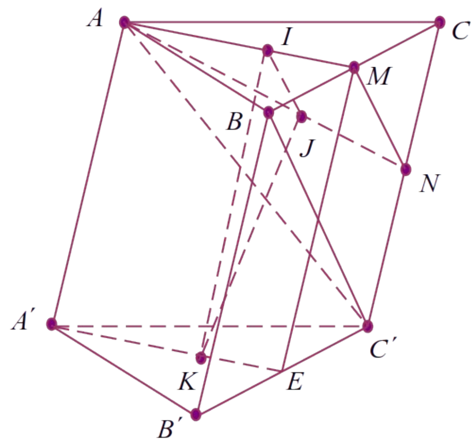
Từ $(1);(2) \Rightarrow (IMN)//(SAB)$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng (IJK)?

A. $(AA'C)$. **B.** $(A'BC')$. **C.** (ABC). **D.** $(BB'C')$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CC', $B'C'$. Suy ra $\frac{AI}{IM}=\frac{AJ}{JN}=2$ nên $IJ//MN$ (1).

Trong mặt phẳng $(AA'ME)$ ta có $\frac{AI}{IM}=\frac{A'K}{KE}=2\Rightarrow IK//ME$ mà $ME//BB'$ nên $IK//BB'$ (2).

Từ (1) và (2) do (IJK) và $(BB'C')$ là hai mặt phẳng phân biệt, $IJ, IK\in(IJK)$ nên $IJ//(BB'C')$, $IK//(BB'C')$ suy ra $(IJK)//(BB'C')$.

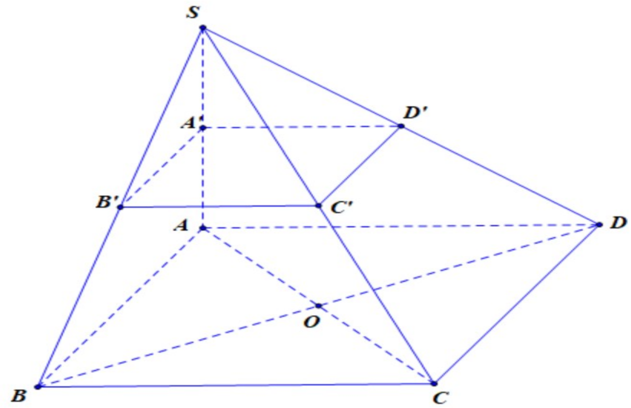
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A',B',C',D' lần lượt là trung điểm SA,SB,SC,SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A'C'\parallel BD$. **B.** $A'B'\parallel(SAD)$.

C. $A'C'\parallel(SBD)$. **D.** $(A'C'D')\parallel(ABC)$.

Lời giải

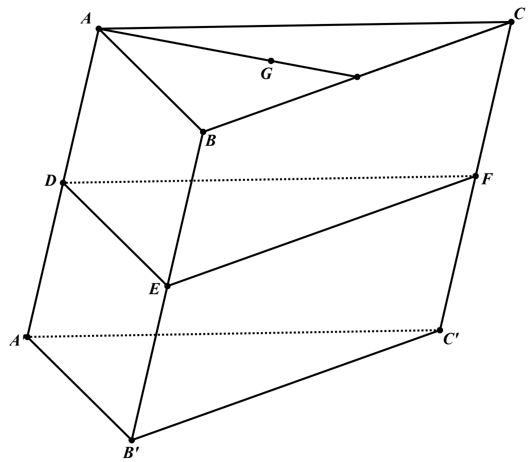
Chọn D



$$\begin{cases} A'D' \parallel AD \\ C'D' \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (A'C'D') \parallel (ABC)$$

.

Câu 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (như hình vẽ).



Lấy các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' và điểm G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(DEB) \parallel (A'B'F)$.

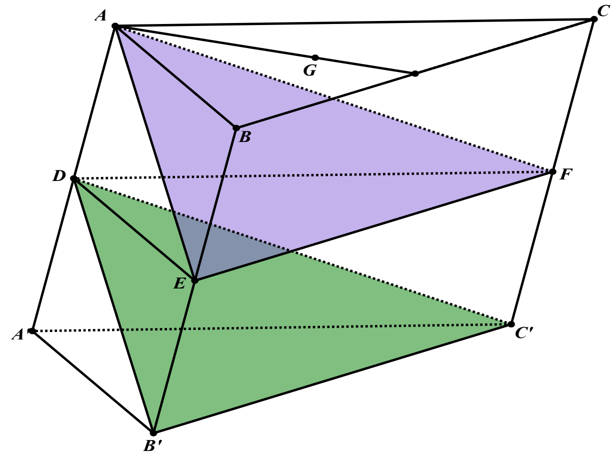
B. $(EFG) \parallel (BCD)$.

C. $(DB'C') \parallel (AEF)$.

D. $(DEG) \parallel (A'B'C)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có các tứ giác $B'C'FE$; $B'DAE$ là hình bình hành nên $B'C' \parallel (AEF)$ và $B'D \parallel (AEF) \Rightarrow (DB'C') \parallel (AEF)$.

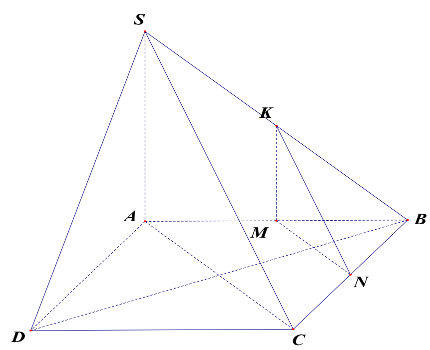
Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, SB. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A. $(MNK)//(SAC)$. **B.** $(MNK)//(SAD)$.

C. $(MNK)//(SCD)$. **D.** $(MNK)//(SAB)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

M là trung điểm AB; K là trung điểm SB.

$\Rightarrow MK//SA$ (1).

M là trung điểm AB; N là trung điểm BC.

$\Rightarrow MN//AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(MNK)//(SAC)$.

Câu 14: Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây?

A. Nếu hai mặt phẳng song song cùng cắt mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến tạo thành song song với nhau.

B. Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai đường thẳng chéo nhau những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

C. Nếu mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q).

D. Nếu mặt phẳng (P) có chứa hai đường thẳng phân biệt và hai đường thẳng đó cùng song song song với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

Lời giải

Chọn D

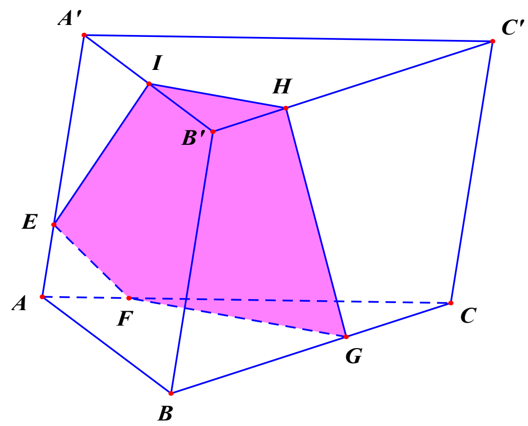
Nếu mặt phẳng (P) có chứa hai đường thẳng phân biệt và hai đường thẳng đó cùng song song song với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) là mệnh đề sai khi hai đường thẳng đó song song với nhau.

Câu 15: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Cắt hình lăng trụ bởi một mặt phẳng ta được một thiết diện. Số cạnh lớn nhất của thiết diện thu được là?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



Một hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả 5 mặt. Do đó một phẳng cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo một thiết diện là hình đa giác có nhiều nhất là 5 cạnh.

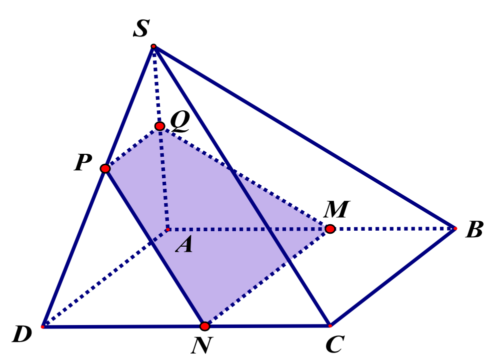
Qua cách dựng trực tiếp, ta thấy số cạnh lớn nhất của thiết diện thu được là 5

Câu 16: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. M là điểm nằm trên đoạn AB, qua M dựng mặt phẳng (α) song song với (SBC). Thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải

Chọn A



Do mặt phẳng (α) song song với (SBC) nên có:

giao tuyến của (α) và $(ABCD)$ là đường chứa M và song song với BC, cắt DC tại N;

giao tuyến của (α) và (SAB) là đường chứa M và song song với SB, cắt SA tại Q;

giao tuyến của (α) và (SCD) là đường chứa N và song song với SC, cắt SD tại P;

do $\left.\begin{array}{l} PQ=(\alpha)\cap(SAD) \\ (\alpha)\supset MN \\ (SAD)\supset AD \\ MN//AD \end{array}\right\} \Rightarrow PQ//MN$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.

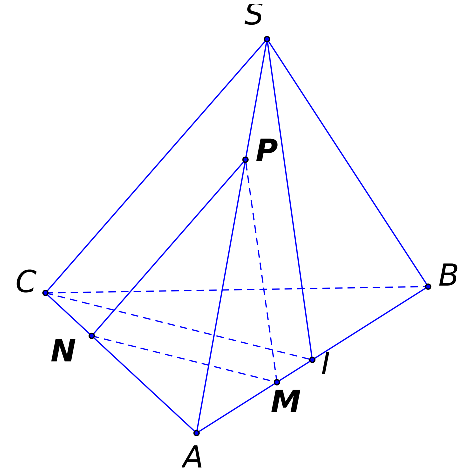
Câu 17: Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của AB. M là điểm di động trên AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và tứ diện $SABC$ là hình gì?

A. Tam giác cân tại M. **B.** Hình thoi.

C. Tam giác đều. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn A



Vẽ $MN//CI$ và $MP//SI$, khi đó thiết diện là tam giác MNP.

Vì $SABC$ là tứ diện đều nên $SI = CI$ (các đường cao của tam giác đều). Mặt khác ta có $\frac{MP}{SI} = \frac{AP}{SA} = \frac{NP}{SC} = \frac{MN}{CI}$.

Suy ra $MP = MN \neq NP$ (do $SC \neq CI$).

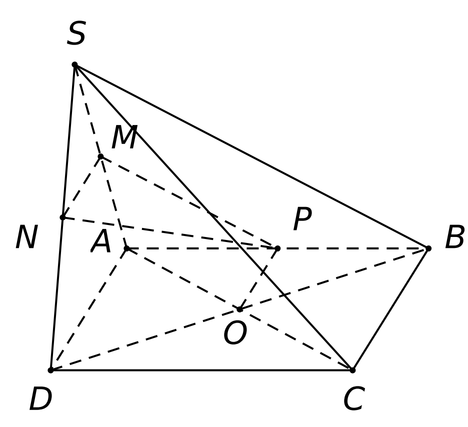
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(MON) // (SBC)$.	**B.** $(MON) // (SDC)$.

C. $(NMP) // (SBD)$.	**D.** $(MNP) // (BCD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $MN\,//\,AD$ (1)

Và OP là đường trung bình của tam giác BAD suy ra $OP\,//\,AD$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $MN\,//\,OP\,//\,AD \Rightarrow M, N, O, P$ đồng phẳng.

Lại có $MP\,//\,SB,\ OP\,//\,BC$ suy ra $(MNOP)\,//\,(SBC)$ hay $(MON)\,//\,(SBC)$.

Câu 19: Cho tứ diện đều $S.ABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và SC. Xét M là một điểm di động trên đoạn thẳng AI. Qua M kẻ mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (CIJ). Khi đó, thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện $S.ABC$ là hình gì?

A. Hình bình hành.

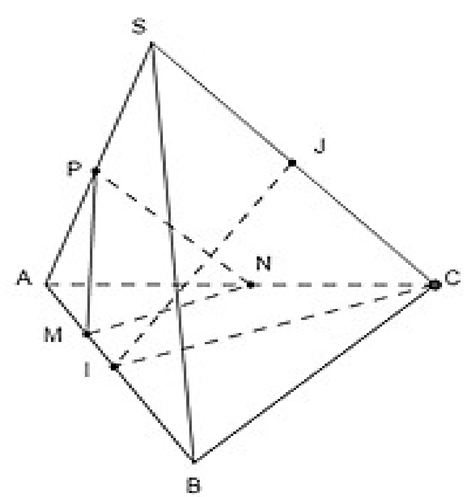
B. Tam giác đều.

C. Tam giác cân tại M.

D. Hình thang cân.

Lời giải

Chọn C



$$(\alpha)//(CIJ) \Rightarrow \begin{cases}(\alpha)//CI\\(\alpha)//SC\end{cases}$$

Vì $(\alpha)//CI$ và $CI \subset (ABC) \Rightarrow (ABC)\cap(\alpha) = MN//CI\ (N \in AC)$

$(\alpha)//SC$ và $SC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC)\cap(\alpha) = NP//SC\ (P \in SA)$

$\Rightarrow (\alpha) \equiv (MNP)$

Vậy thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện là tam giác ΔMNP.

Ta có $\begin{cases} MN//IC \\ PN//SC \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{IC} = \frac{AM}{IC} = \frac{AN}{AC} = \frac{PN}{SC} = \frac{AP}{SA} = k$

$\Rightarrow MP//SI \Rightarrow \frac{MP}{SI} = k$

Do tứ diện đều nên $\Delta SAB = \Delta ABC \Rightarrow SI = IC \Leftrightarrow MP = MN$

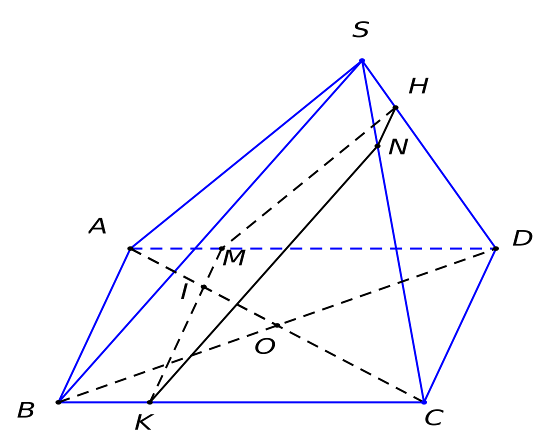
Vậy tam giác ΔMNP cân tại M.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là trung điểm của OA. Thiết diện của hình chóp với (α) đi qua I và song song với $mp(SAB)$ là

A. Tam giác.
B. Hình thang.
C. Ngũ giác.
D. Hình bình hành.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(\alpha)//(SAB) \Rightarrow \begin{cases} (\alpha)//AB \\ (\alpha)//SA \end{cases}$

$(\alpha)//AB \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MK//AB \, (I \in MK) \quad (1)$

$(\alpha)//SA \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = MH//SA$

$(\alpha)//AB \Rightarrow (\alpha)//CD \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = HN//CD \quad (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow MK // HN$.

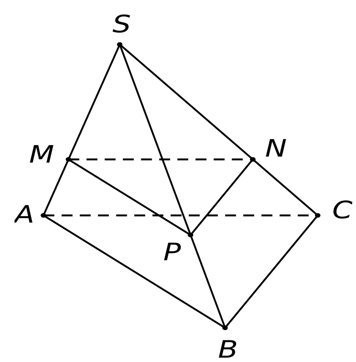
Vậy thiết diện của hình chóp với (α) đi qua I và song song với $mp(SAB)$ là hình thang $MHNK$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 2\sqrt{3}$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SA = 3AM$. Thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp $S.ABC$ có diện tích bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2\sqrt{3}.\sin 30^0 = 3.$

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SC và SB.

Vì $(P) // (ABC)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SC} = \frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}.$

Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}.$ Vậy $S_{\Delta MNP} = k^2.S_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.3 = \frac{4}{3}.$

•Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
a)	Hai mặt phẳng phân biệt không cắt nhau thì song song.		
b)	Nếu mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó song song với nhau.		
c)	Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.		
d)	Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.		

Câu 2. Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song nhau, nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A,B, C,D. Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A',B',C',D'.
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
a)	$mp(AA',BB')$ song song với $mp(CC',DD')$.		
b)	$A'B'//C'D'$		
c)	Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang		
d)	Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó $OO'//AA'$.		

Câu 3. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I,K,G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Gọi M,M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Khi đó:
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
a)	$AMM'A'$ là hình bình hành		
b)	$\frac{AI}{AM}=\frac{AG}{AN}=\frac{1}{3}$		
c)	(IKG) cắt $(BCC'B')$		
d)	$(A'KG)//(AIB')$		

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H,I,K lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC. Gọi M là giao điểm của AI và KD,N là giao điểm của DH và CI. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$HI//(ABCD)$		
b)	$(HIK)//(ABCD)$		
c)	SM và HI chéo nhau		
d)	(SMN) cắt (HIK)		

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$MN//(SBC)$		
b)	$(OMN)//(SBC)$		
c)	Gọi E là trung điểm đoạn AB và F là một điểm thuộc đoạn ON. Khi đó EF cắt với mặt phẳng (SBC).		
d)	Gọi G là một điểm trên mặt phẳng $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Khi đó GN cắt (SAB)		

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Gọi G_1,G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD,B'D'C$.

Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$A'D'CB$ là hình bình hành		
b)	$(A'BD)//(B'D'C)$		
c)	G_1,G_2 cùng thuộc AC'		
d)	$G_1G_2=\frac{2}{3}AC'$		

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là trọng tâm ΔABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF). Lấy N là giao điểm của (P) và AC. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$EFDC$ là hình thang		
b)	$FD//EC$		
c)	$(ADF)//(BCE)$		
d)	$\frac{AN}{NC}=3$		

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(BDA')//(B'D'C')$		
b)	Đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.		
c)	$AG_1=2G_1G_2$		
d)	Mặt phẳng $(A'B'G_2)$ cắt hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tạo thành một tứ giác là hình bình hành		

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	ON chéo nhau với SB		
b)	$(OMN)//(SBC)$		
c)	Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Khi đó PQ cắt (SBC)		
d)	Gọi R là trung điểm AD. Khi đó $(MOR)//(SCD)$.		

Câu 10. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$II'//BB'$		
b)	$AA'I'I$ là hình bình hành		
c)	IA' song song $(AB'C')$.		

d)	Giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$ là đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng $AI', A'I$		

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho biết tính đúng sai của mỗi phát biểu sau:

a) Hai mặt phẳng phân biệt không cắt nhau thì song song.

b) Nếu mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng đó song song với nhau.

c) Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

Phát biểu A đúng.

Phát biểu B sai vì trong giả thiết đã thiếu đi một yếu tố cần thiết là hai đường thẳng phải cắt nhau, khi đó ta mới kết luận hai mặt phẳng song song với nhau.

Phát biểu C sai vì hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng vẫn có thể trùng nhau.

Phát biểu D sai vì hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Câu 2. Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song nhau, nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A,B, C,D. Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A',B',C',D'.

a) $mp(AA',BB')$ song song với $mp(CC',DD')$.

b) $A'B'//C'D'$

c) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang

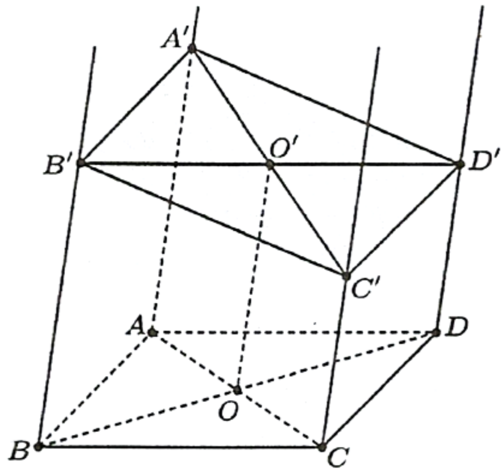
d) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó $OO'//AA'$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Chứng minh $mp\left(AA',BB'\right)$ và $mp\left(CC',DD'\right)$ song song:

Ta có $AA'//DD'$ và $AB//CD$ nên $mp\left(AA',BB'\right)//mp\left(CC',DD'\right)$.



b) Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành:

Ta có: $\begin{cases} mp\left(AA',BB'\right)//mp\left(CC',DD'\right) \\ (Q)\cap mp\left(AA',BB'\right)=A'B' \\ (Q)\cap mp\left(CC',DD'\right)=C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B'//C'D'$.(1)

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $A'D'//B'C'$. (2)

c) Từ (1) và (2) suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

d) Chứng minh $OO'//AA'$:

Ta có: $\begin{cases} \left(ACC'A'\right)\cap\left(BDD'B'\right)=OO' \\ AA'\subset\left(ACC'A'\right), BB'\subset\left(BDD'B'\right) \\ AA'//BB' \end{cases}$

$\Rightarrow OO'//AA'//BB'$ hay $OO'//AA'$.

Câu 3. Cho lăng trụ tam giác $ABC\cdot A'B'C'$ có I,K,G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Gọi M,M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Khi đó:

a) $AMM'A'$ là hình bình hành

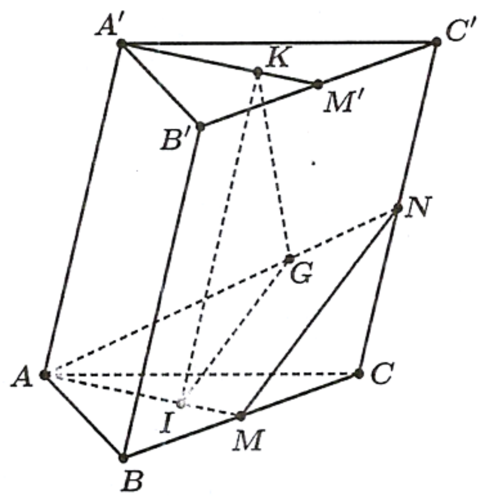
b) $\frac{AI}{AM}=\frac{AG}{AN}=\frac{1}{3}$

c) (IKG) cắt $\left(BCC^{'}B^{'}\right)$

d) $\left(A^{'}KG\right)//\left(AIB^{'}\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



Gọi $M,M^{'}$ lần lượt là trung điểm của $BC,B^{'}C^{'}$.

$MM^{'}$ là đường trung bình của hình bình hành $BCC^{'}B^{'}$ nên

a) $\begin{cases} MM^{'}//BB^{'} \\ MM^{'}=BB^{'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM^{'}//AA^{'} \\ MM^{'}=AA^{'} \end{cases} \Rightarrow AMM^{'}A^{'}$ là hình bình hành.

Vì I,K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác $ABC,A^{'}B^{'}C^{'}$ nên

$IM=KM^{'}=\frac{1}{3}A^{'}M^{'}=\frac{1}{3}AM,$ mà $IM//KM^{'}$ nên $IKM^{'}M$ là hình bình hành.

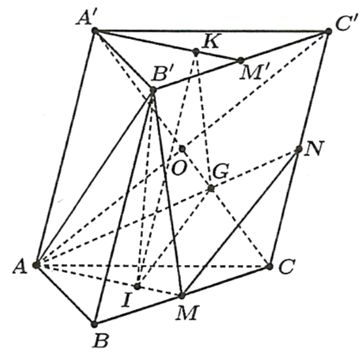
Suy ra $IK//MM^{'},MM^{'}\subset\left(BCC^{'}B^{'}\right)\Rightarrow IK//\left(BCC^{'}B^{'}\right)$.(1)

Gọi N là trung điểm của $CC^{'}$, tam giác AMN có

b) $\frac{AI}{AM}=\frac{AG}{AN}=\frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm)

Suy ra $IG//MN$ mà $MN\subset\left(BCC^{'}B^{'}\right)$ nên $IG//\left(BCC^{'}B^{'}\right)$.(2)

c) Từ (1) và (2) suy ra $(IKG)//(BCC'B')$.



Vì $(A'KG)\equiv(A'M'C),(AIB')\equiv(AMB')$, ta cần chứng minh $(A'M'C)//(AMB')$.

Dễ thấy $AMM'A'$ là hình bình hành nên $AM//A'M'$ mà $A'M'\subset(A'M'C)$ nên $AM//(A'M'C)$. (3)

Ta có: $\begin{cases} CM//B'M' \\ CM = B'M' \end{cases} \Rightarrow CMB'M'$ là hình bình hành, suy ra $B'M//CM',CM'\subset(A'M'C)\Rightarrow B'M//(A'M'C)$.(4)

d) Từ (3) và (4) suy ra $(A'M'C)//(AMB')$, hay $(A'KG)//(AIB')$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H,I,K lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC. Gọi M là giao điểm của AI và KD,N là giao điểm của DH và CI. Khi đó:

a) $HI//(ABCD)$

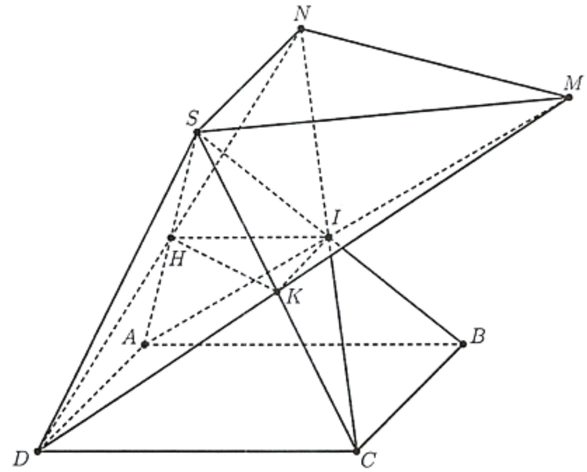
b) $(HIK)//(ABCD)$.

c) SM và HI chéo nhau

d) (SMN) cắt (HIK)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai



a) b) Vì HI là đường trung bình của tam giác SAB nên $HI//AB$,

mà $AB \subset (ABCD) \Rightarrow HI//(ABCD)$. (1)

Tương tự ta có: $KI//BC, BC \subset (ABCD) \Rightarrow KI//(ABCD)$. (2)

Mặt khác: $HI \subset (HKI), KI \subset (HKI), HI \cap KI = I$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(HIK)//(ABCD)$.

c) d)

Vì $\begin{cases} M \in AI, AI \subset (SAB) \\ M \in DK, DK \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAB) \cap (SCD)$

$\Rightarrow SM = (SAB) \cap (SCD).$

Khi đó: $\begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = SM \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \Rightarrow SM//AB//CD \Rightarrow SM//HI (1) \\ AB//CD \end{cases}$

Vì $\begin{cases} N \in DH, DH \subset (SAD) \\ N \in CI, CI \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N \in (SAD) \cap (SBC)$

$\Rightarrow SN = (SAD) \cap (SBC).$

Khi đó, ta có:

$\begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = SN \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \Rightarrow SN//AD//BC \Rightarrow SN//KI (2) \\ AD//BC \end{cases}$

Mặt khác ba điểm S, M, N không thẳng hàng. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $(SMN)//(HIK)$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Khi đó:

a) $MN//(SBC)$

b) $(OMN)//(SBC)$.

c) Gọi E là trung điểm đoạn AB và F là một điểm thuộc đoạn ON. Khi đó EF cắt với mặt phẳng (SBC).

d) Gọi G là một điểm trên mặt phẳng $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Khi đó GN cắt (SAB)

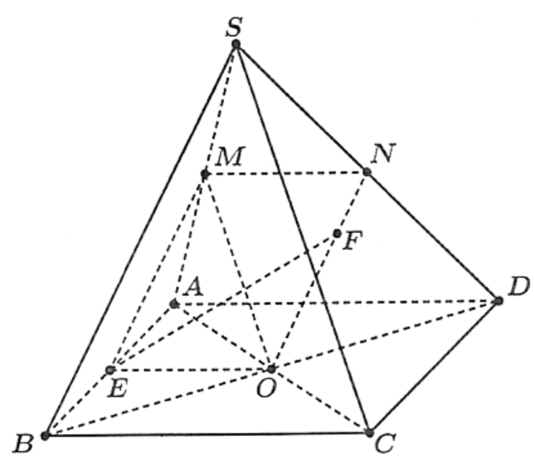
Lời giải

a) Đúng	**b) Đúng**	**c) Sai**	**d) Sai**

a) b) Vì MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN//AD \Rightarrow MN//BC \Rightarrow MN//(SBC)$. (1)

Tương tự, ta có O,N theo thứ tự là trung điểm của BD,SD nên ON là đường trung bình của tam giác $SBD \Rightarrow ON//SB \Rightarrow ON//(SBC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN)//(SBC)$.

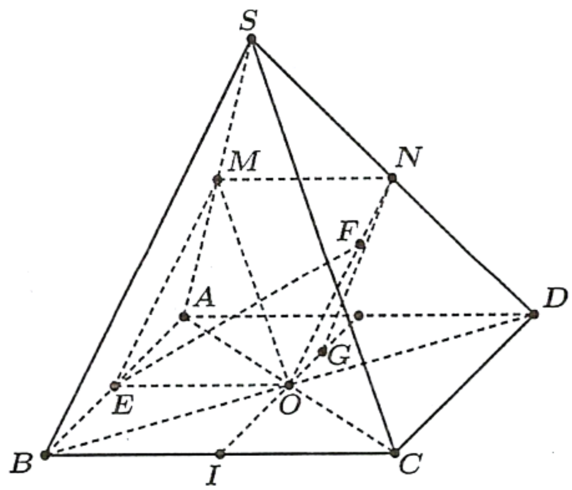


c) Ta có OE là đường trung bình của tam giác ABD nên $OE//AD \Rightarrow OE//MN$.

Do đó $E \in (OMN)$. Mặt khác $F \in ON, ON \subset (OMN) \Rightarrow F \in (OMN)$.

Ta có: $\begin{cases} EF \subset (OMN) \\ (OMN)//(SBC) \end{cases} \Rightarrow EF//(SBC)$.

d)



Vì G thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ và cách đều AB, CD nên G thuộc đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ (ứng với hai cạnh AB, CD).

Gọi I là trung điểm BC thì I, O, G thẳng hàng.

Ta có OI là đường trung bình của ΔABC nên $OI//AB \Rightarrow OI//(SAB)$.(3)

Tương tự, ta có $ON//SB \Rightarrow ON//(SAB)$.(4)

Từ (3), (4) suy ra $(OIN)//(SAB)$ mà $NG \subset (OIN)$ nên $NG//(SAB)$.

Câu 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD, B'D'C$.

Khi đó:

a) $A'D'CB$ là hình bình hành

b) $(A'BD)//(B'D'C)$

c) G_1, G_2 cùng thuộc AC'

d) $G_1G_2 = \frac{2}{3}AC'$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) b)

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\begin{cases} A'D'//BC \\ A'D'=BC \end{cases} \Rightarrow A'D'CB$ là hình bình hành.

Suy ra $A'B//CD' \Rightarrow A'B//(B'D'C)$. (1)

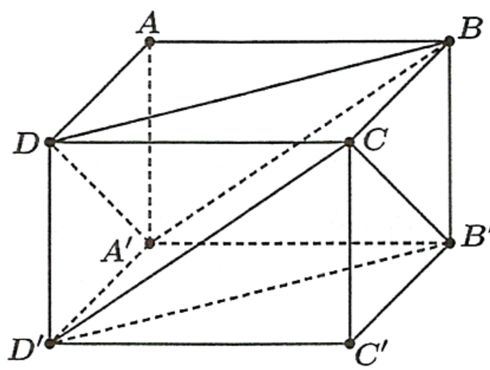
Tương tự, ta có: $\begin{cases} A'B'//CD \\ A'B'=CD \end{cases} \Rightarrow A'B'CD$ là hình bình hành.

Suy ra $A'D//B'C \Rightarrow A'D//(B'D'C)$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $(A'BD)//(B'D'C)$.

c) d)

Gọi O, O', I theo thứ tự là tâm của các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D'$, $ACC'A'$.



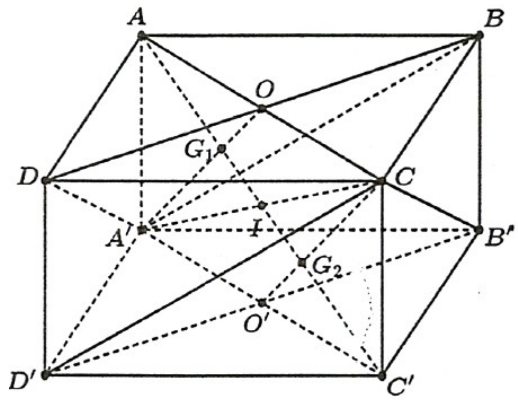
Vì G_1 là trọng tâm tam giác $AB'D$ nên $\frac{A'G_1}{A'O}=\frac{2}{3} \Rightarrow G_1$ là trọng tâm tam giác $A'AC$,

suy ra $G_1 = AI \cap A'O$. (3)

Tương tự, G_2 là trọng tâm tam giác $B'D'C$ nên $\frac{CG_2}{CO'}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow G_2$ là trọng tâm tam giác $A'C'C$, suy ra $G_2 = C'I \cap CO'$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra G_1, G_2 cùng thuộc AC'.



Chứng minh $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' = \frac{1}{3}AC'$:

Ta có: $\frac{AG_1}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG_1}{AC'} = \frac{1}{3}; \frac{C'G_2}{C'I} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C'G_2}{AC'} = \frac{1}{3}$.

Do vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' = \frac{1}{3}AC'$.

Vậy G_1, G_2 cùng thuộc AC', đồng thời chia AC' thành ba phần bằng nhau.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là trọng tâm ΔABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF). Lấy N là giao điểm của (P) và AC. Khi đó:

a) $EFDC$ là hình thang

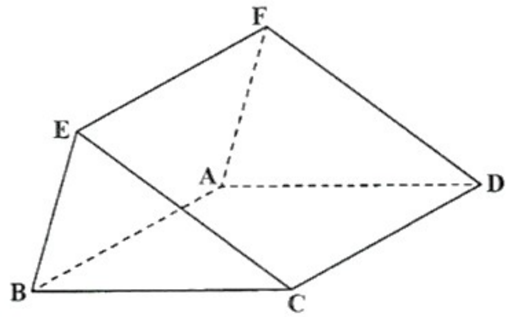
b) $FD//EC$

c) $(ADF)//(BCE)$.

d) $\frac{AN}{NC} = 3$

Lời giải

a) Sai	**b) Đúng**	**c) Đúng**	**c) Sai**



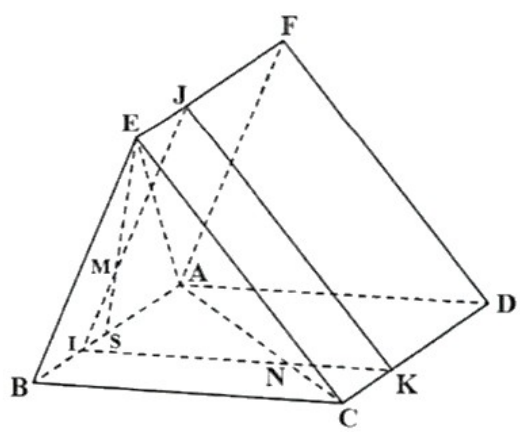
a) b) c) Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Chứng minh rằng: $(ADF)//(BCE)$.

Ta có $\begin{cases} EF//CD(//AB) \\ EF = CD(=AB) \end{cases} \Rightarrow EFDC$ là hình bình hành.

$\Rightarrow FD//EC$.

Ta có $\begin{cases} AD//BC; AF//BE \\ AD, AF \subset (ADF); AD \cap AF = A \Rightarrow (ADF)//(BCE) \\ BC, BE \subset (BEC); BC \cap BE = B \end{cases}$

d) Tính $\dfrac{AN}{NC}$.



Vẽ mp (P) chứa M và $(P)//(ADF)$ cắt AB, AC, CD, EF lần lượt tại I, N, K, J.

Ta có: $\dfrac{AI}{BI} = \dfrac{AN}{NC}(IN//BC)$

$$\frac{EJ}{IS}=\frac{ME}{MS}=2(IS//JE)$$

Ta có:

$BI=EJ$ (tứ giác BIJE là hình bình hành)

$$\Rightarrow \frac{BI}{IS}=2\Rightarrow \frac{BI}{2}=\frac{IS}{1}=\frac{BI+IS}{2+1}=\frac{BS}{3}$$

$$\Rightarrow BI=\frac{2}{3}BS; IS=\frac{1}{3}BS$$

$$AI=AS+AI=BS+\frac{1}{3}BS=\frac{4}{3}BS\Rightarrow >\frac{AI}{BI}=\frac{\frac{4}{3}BS}{\frac{2}{3}BS}=2\Rightarrow \frac{AN}{NC}=2$$

Ta có:

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau. Khi đó:

a) $(BDA')//(B'D'C')$.

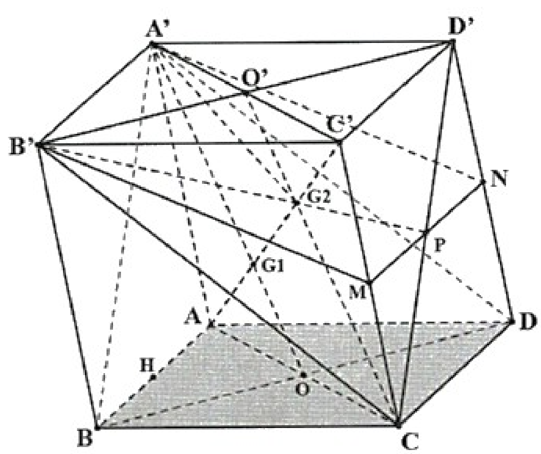
b) Đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) $AG_1=2G_1G_2$

d) Mặt phẳng $(A'B'G_2)$ cắt hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ tạo thành một tứ giác là hình bình hành

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng



a) Chứng minh: $(BDA')//(B'D'C)$.

Ta có $BA'D'C$ là hình bình hành nên $BA'//D'C$.

Ta có $BB'D'D$ là hình bình hành nên $B'D'//BD$.

Ta có $\begin{cases} BA'//D'C \\ BD//B'D' \\ BA', BD \subset (BA'D); BA' \cap BD = B \\ B'D', D'C \subset (B'D'C); B'D' \cap D'C = D' \end{cases}$

$\Rightarrow (BDA')//(B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' qua trọng tâm G_1, G_2 của tam giác BDA' và $B'D'C$.

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC; AC \subset (ACC'A') \\ O \in BD; BD \subset (BDA') \end{cases} \Rightarrow O \in (ACC'A') \cap (BDA')$.

Mà $A' \in (ACC'A') \cap (BDA')$ nên $A'O = (ACC'A') \cap (BDA')$

Trong $(ACC'A')$, gọi $E = A'O \cap AC'$.

Ta có $\dfrac{A'E}{EO} = \dfrac{A'C'}{AO} = 2$ (Thales)

Suy ra E trùng với trọng tâm G_1 của tam giác BDA'.(1)

Trong $(A'B'C'D')$, gọi $O' = A'C' \cap B'D'$.

$\Rightarrow \begin{cases} O' \in A'C'; A'C' \subset (ACC'A') \\ O' \in B'D'; B'D' \subset (B'D'C) \end{cases} \Rightarrow O' \in (ACC'A') \cap (B'D'C)$.

Mà $C \in (ACC'A') \cap (B'D'C)$ nên $CO' = (ACC'A') \cap (B'D'C)$.

Trong $(ACC'A')$, gọi $F = CO' \cap AC'$.

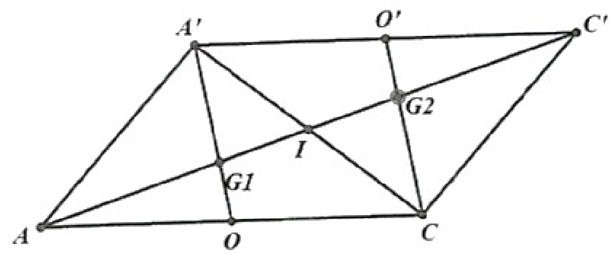
Ta có $\frac{CF}{FO}=\frac{AC}{CO}=2$ (Thales)

Suy ra F trùng với trọng tâm G_2 của tam giác $B'D'C$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AC' qua trọng tâm G_1,G_2 của tam giác BDA' 'và $B'D'C$.

c) Chứng minh G_1,G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Trong $(AA'C'C)$, gọi $I=A'C\cap AC'$.



Ta có G_1 là trọng tâm của tam giác $A'AC$ nên $AG_1=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC'=\frac{1}{3}AC'$.

Ta có G_2 là trọng tâm của tam giác $A'CC'$ nên $AG_2=\frac{2}{3}C'I=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC'=\frac{1}{3}AC'$.

Ta có $G_1G_2=AC'-AG_1-C'G_2=AC'-\frac{1}{3}AC'-\frac{1}{3}AC'=\frac{1}{3}AC'$.

Từ đó ta có $AG_1=G_1G_2=G_2C'\left(=\frac{1}{3}AC'\right)$.

Suy ra G_1,G_2 chia đoạn AC' ' thành ba phần bằng nhau.

d) Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Xét tam giác $B'D'C$, gọi $P=B'G_2\cap CD'$.

Suy ra P là trung điểm của CD'.

Trong $(A'B'G_2)$, vẽ $Px//A'B'$.

Trong $(CC'D'D), Px$ cắt CC', DD' lần lượt tại M và N.

Suy ra $MN//CD$ và $MN = CD$.

Ta có $\begin{cases}(A'B'G_2)\cap(A'B'C'D')=A'B' \\ (A'B'G_2)\cap(B'C'CB)=B'M \\ (A'B'G_2)\cap(CC'D'D)=MN \\ (A'B'G_2)\cap(AA'D'D)=NA'\end{cases}$

$\Rightarrow$ thiết diện của $(A'B'G_2)$ và hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là tứ giác $A'B'MN$.

Ta có $\begin{cases}MN//A'B' \\ MN = A'B'(=CD)\end{cases} \Rightarrow$ thiết diện $A'B'MN$ là hình bình hành.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Khi đó:

a) ON chéo nhau với SB

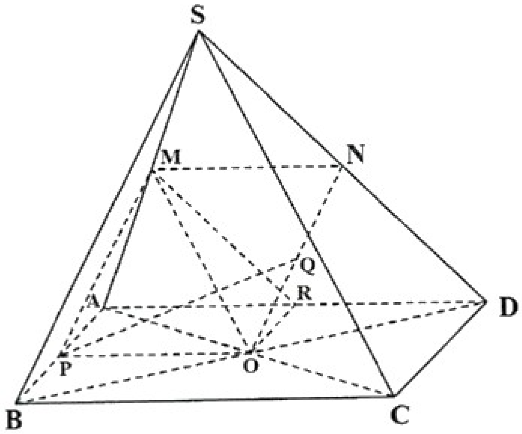
b) $(OMN)//(SBC)$.

c) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Khi đó PQ cắt (SBC)

d) Gọi R là trung điểm AD. Khi đó $(MOR)//(SCD)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng



a) b) Ta có $OM//SC$ (đường trung bình tam giác SAC). Ta có $ON//SB$ (đường trung bình tam giác SBD).

Ta có $\begin{cases} ON//SB; OM//SC \\ OM, ON \subset (OMN), OM \cap ON = O \\ SB, SC \subset (SBC), SB \cap SC = S \end{cases}$

$\Rightarrow (OMN)//(SBC)$

c) Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và ON. Chứng minh: $PQ//(SBC)$

Ta có $\begin{cases} OP//AB \\ AB//MN \end{cases}$

$\Rightarrow OP//MN \Rightarrow OMPN$ là hình thang $\Rightarrow P \in (OMN)$.

Ta có $\begin{cases} NP \subset (OMN) \\ (OMN)//(SBC) \end{cases} \Rightarrow NP//(SBC)$

d) Gọi R là trung điểm AD. Chứng minh: $(MOR)//(SCD)$.

Ta có $OR//CD$ (đường trung bình của tam giác ACD)

Ta có $\begin{cases} OM//SC(cmt) \\ OR//CD(cmt) \\ OM, OR \subset (MOR), OM \cap OR = O \\ SC, SD \subset (SCD), SC \cap SD = S \end{cases} \Rightarrow (MOR)//(SCD)$

Câu 10. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó:

a) $II'//BB'$

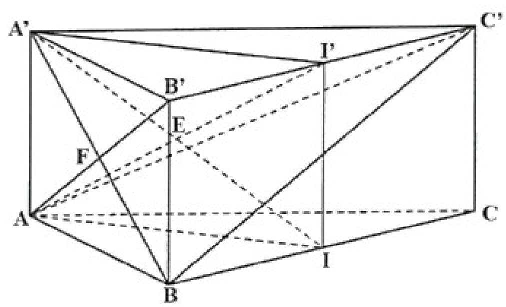
b) $AA'I'I$ là hình bình hành

c) IA' song song $(AB'C')$.

d) Giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$ là đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng $AI', A'I$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng



a) b) Ta có I', I là trung điểm của $B'C'$ và BC.

Suy ra II' là đường trung bình của hình bình hành $BB'C'C$.

Suy ra $II' = BB'$ và $II' // BB'$.

Ta có $\begin{cases} II' // AA' \left(// BB'\right) \\ II' = AA' \left(= BB'\right) \end{cases}$

$\Rightarrow AA'I'I$ là hình bình hành. $\Rightarrow AI // A'I'$.

c) Trong ($IAA'I'$), gọi $E = AI' \cap A'I$.

Suy ra $\begin{cases} E \in AI'; AI' \subset \left(AB'C'\right) \\ E \in A'I \end{cases} \Rightarrow$ Suy ra $E = A'I \cap \left(AB'C'\right)$.

d) Tìm giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$.

Trong $(AA'B'B)$, gọi $F = AB' \cap A'B$.

$$\Rightarrow \begin{cases} F \in AB';\, AB' \subset (AB'C') \\ F \in A'B;\, A'B \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow F \in (AB'C') \cap (A'BC') \quad (1)$$

Ta có $E = AI' \cap A'I$.

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in AI';\, AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I;\, A'I \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow E \in (AB'C') \cap (A'BC') (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EF = (AB'C') \cap (A'BC')$.

•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

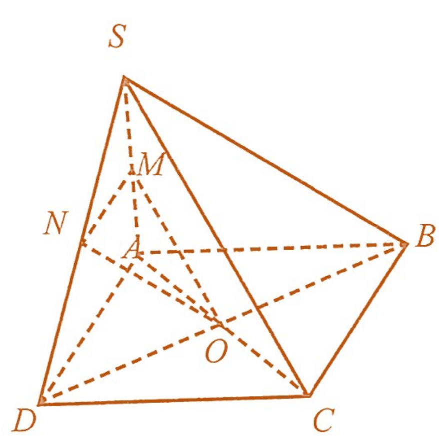
Câu 1: Khi cắt một chiếc bánh ga-tô hình hộp, Thuý nhận thấy vết cắt ở mặt trên và mặt dưới của bánh gợi nên hình ảnh về hai đường thẳng song song với nhau. Hỏi nhận xét của Thuý có đúng không? Vì sao?

Lời giải

Khi Thuý cắt bánh thì lưỡi dao di chuyển tạo thành một mặt phẳng cắt hai mặt trên và dưới của chiếc bánh. Vì mặt trên và mặt dưới của chiếc bánh song song với nhau nên các vết cắt (chính là giao tuyến của mặt phẳng cắt và hai mặt bánh) song song với nhau.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh $(OMN)//(SBC)$.

Lời giải



Hình 7

Ta có MO là đường trung bình của tam giác SAC, suy ra $MO//SC$. Do đó $MO//(SBC)$. (1)

Ta có NO là đường trung bình của tam giác SDB, suy ra $NO//SB$. Do đó $NO//(SBC)$. (2)

Mặt khác, $NO \cap MO = O$ và $NO, MO \subset (OMN)$. (3)

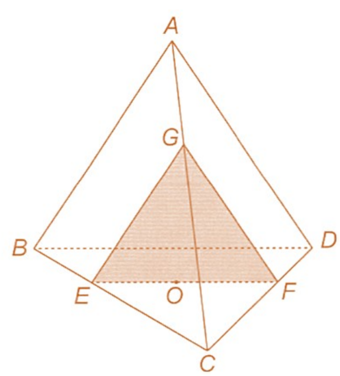
Từ (1), (2) và (3) suy ra $(OMN)//(SBC)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm O nằm trong tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng (ABD).

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt còn lại của tứ diện.

Lời giải



Hình 4.57

a) Trong mặt phẳng (BCD), vẽ đường thẳng qua O và song song với BD cắt các cạnh BC, CD lần lượt tại E, F. Khi đó EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

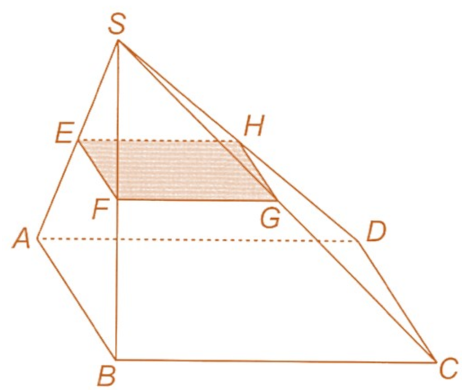
b) Trong mặt phẳng (ABC), vẽ $EG//AB$ $(G \in AC)$ thì EG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC). Khi đó FG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD).

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E là một điểm bất kì thuộc cạnh SA và (P) là mặt phẳng qua E song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt bên của hình chóp.

b) Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì? Giải thích vì sao.

Lời giải



Hình 4.58

a) Trong mặt phẳng (SAB), vẽ $EF//AB\,(F\in SB)$.

Trong mặt phẳng (SBC), vẽ $FG//BC\,(G\in SC)$.

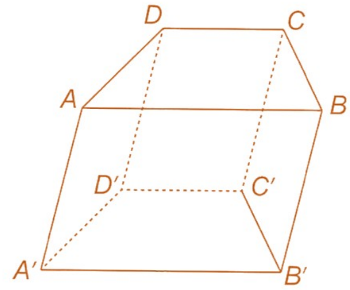
Trong mặt phẳng (SCD), vẽ $GH//CD\,(H\in SD)$.

Các giao tuyến cần tìm là các đường thẳng EF, FG, GH, HE.

b) Hình tạo bởi các giao tuyến là hình bình hành $EFGH$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang. Chứng minh rằng đáy $A'B'C'D'$ là hình thang.

Lời giải



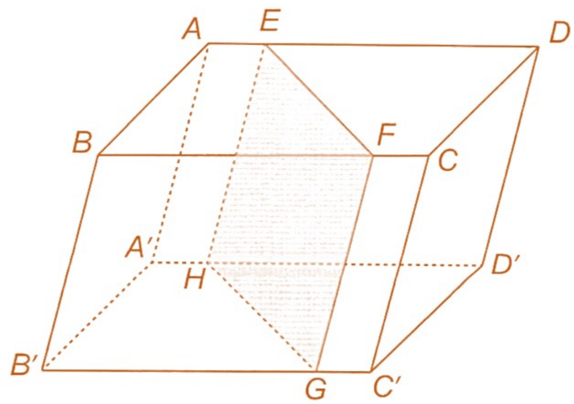
Hình 4.59

Giả sử $AB//CD$.

Các mặt $ABB'A'$ và $CDD'C'$ của hình lăng trụ là hình bình hành nên $AB//A'B'$ và $CD//C'D'$. Vì vậy ta có $A'B'//C'D'$, tức là tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh $AD, BC, B'C'$, $A'D'$ lần lượt tại E, F, G, H. Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

Lời giải



Hình 4.61

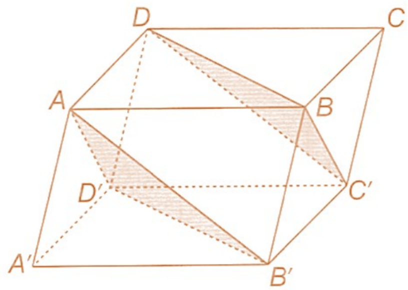
Vì hai mặt $(ABCD)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$ của hình hộp song song với nhau nên giao tuyến của mặt phẳng $\left(EFGH\right)$ và hai mặt phẳng đó song song với nhau, tức là $EF//HG$. Tương tự có $EH//FG$ nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $AB^{'}//C^{'}D$;

b) Hai mặt phẳng $\left(AB^{'}D^{'}\right)$ và $\left(C^{'}BD\right)$ song song với nhau.

Lời giải



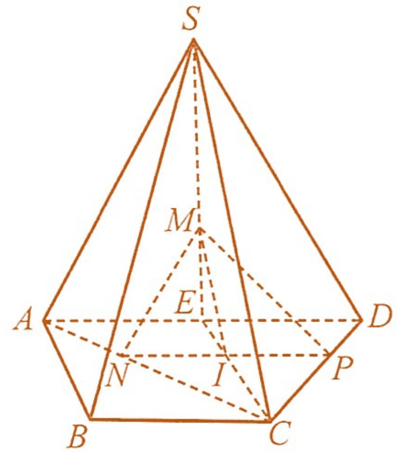
Hình 4.63

a) Theo bài tập $4.35c$ thì tứ giác $ADC^{'}B^{'}$ là hình bình hành, do đó $AB^{'}//C^{'}D$.

b) Từ câu a suy ra $AB^{'}//\left(C^{'}BD\right)$. Chứng minh tương tự có $AD^{'}//BC^{'}$ nên $AD^{'}//\left(C^{'}BD\right)$. Mặt phẳng $\left(AB^{'}D^{'}\right)$ có hai đường thẳng cắt nhau $AB^{'}$ và $AD^{'}$ cùng song song với mặt phẳng $\left(C^{'}BD\right)$ nên hai mặt phẳng $\left(AB^{'}D^{'}\right)$ và $\left(C^{'}BD\right)$ song song với nhau.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD. Gọi M là trọng tâm của tam giác SAD, N là điểm thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AN=\frac{1}{3}AC, P$ là điểm thuộc đoạn thẳng CD sao cho $DP=\frac{1}{3}DC$. Chứng minh rằng $(MNP)//(SBC)$.

Lời giải



Hình 59

Gọi E là trung điểm của AD và I là giao điểm của NP và EC.

Ta có $\frac{AN}{AC}=\frac{DP}{CP}=\frac{1}{3}$ nên $NP//AD$. Do $AD//BC$ nên $NP//BC$, suy ra $NP//(SBC)$.

Vì $NP//AD$ nên ta có $\frac{EI}{EC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$.

Do M là trọng tâm của tam giác SAD và E trung điểm của đoạn AD nên $M\in SE$ và $\frac{EM}{ES}=\frac{1}{3}$.

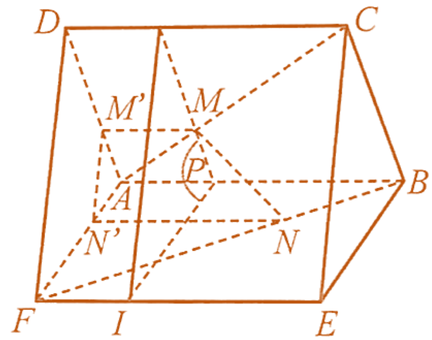
Như vậy $\frac{EI}{EC}=\frac{EM}{ES}$ nên $MI//SC$, suy ra $MI//(SBC)$. Từ đó, ta có $(MNP)//(SBC)$.

Câu 9: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC,BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BF}$. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB cắt AD tại M', qua N vẽ đường thẳng song song với AB cắt AF tại N'.

a) Chứng minh rằng $(MNN')//(CDE)$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD). Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng EF tại I. Tính $\frac{FI}{FE}$, biết $\frac{AM}{AC}=\frac{1}{3}$.

Lời giải



Hình 60

a) Ta có $MM' // AB, NN' // AB$ nên $MM' // NN'$. Suy ra M, M', N', N cùng thuộc một mặt phẳng.

Ta có $CD // AB$ và $EF // AB$ nên C, D, F, E cùng thuộc một mặt phẳng.

Do AB // CD nên $MM' // CD$, suy ra $MM' // (CDE)$.

Vì $\frac{AM}{AC} = \frac{AM'}{AD}$ và $\frac{BN}{BF} = \frac{AN'}{AF}$ nên $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF}$, suy ra $M'N' // DF$, mà $DF \subset (CDE)$ nên $M'N' // (CDE)$. Từ đó, suy ra $(MM'N') // (CDE)$, do đó $(MNN') // (CDE)$.

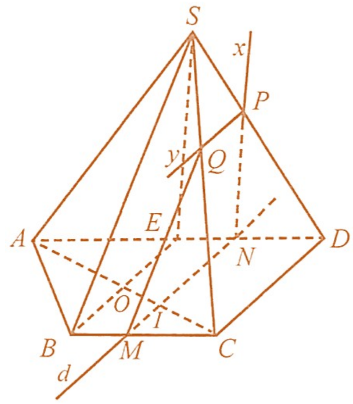
b) Ta có đường thẳng AC cắt ba mặt phẳng song song $(ADF), (P), (BCE)$ lần lượt tại A, M, C; đường thẳng FE cũng cắt ba mặt phẳng trên theo thứ tự tại F, I, E.

Áp dụng định lí Thalès trong không gian, ta có: $\frac{AM}{FI} = \frac{MC}{IE} = \frac{CA}{EF} \Rightarrow \frac{FI}{EF} = \frac{AM}{CA}$.

Mà $\frac{AM}{CA} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{FI}{FE} = \frac{1}{3}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có $AD // BC$, $AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm của AD, O là giao điểm của AC và BE, I là điểm nằm trên đoạn OC. Mặt phẳng (P) qua I và song song với (SBE). Tìm các giao tuyến của các mặt của hình chóp với mặt phẳng (P).

Lời giải



Hình 9

Ta có $(P)//(SBE),(ABCD)\cap(SBE)=BE$.

Mà $I\in(P)\cap(ABCD)$ nên $(P)\cap(ABCD)=d$ với $d//BE$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của d và $BC;N$ là giao điểm của d và AD.

Suy ra $(P)\cap(ABCD)=MN$.

Ta có $(P)//(SBE),(SBE)\cap(SAD)=SE$. Mà $N\in(P)\cap(SAD)$ nên $(P)\cap(SAD)=Nx$ với $Nx//SE$.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi P là giao điểm của Nx và SD. Suy ra $(P)\cap(SAD)=NP$.

Ta có $MN\subset(P),CD\subset(SCD),P\in(P)\cap(SCD),MN//CD$.

Suy ra $(P)\cap(SCD)=Py$ với $Py//MN//CD$.

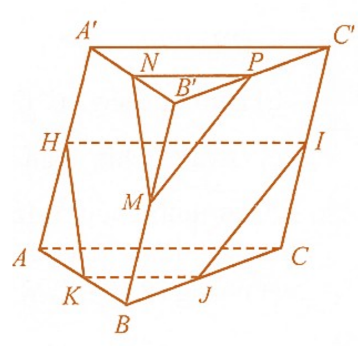
Trong mặt phẳng (SCD), gọi Q là giao điểm của Py và SC. Suy ra $(P)\cap(SCD)=PQ$.

Ta có $Q\in SC$, suy ra $Q\in(SCB)$. Mà $Q\in(P)$, suy ra $Q\in(SCB)\cap(P)$.

Tương tự, ta có $M\in(SCB)\cap(P)$. Suy ra $(P)\cap(SBC)=QM$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC\cdot A'B'C'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của $BB',A'B',B'C'$. H là điểm bất kì thuộc cạnh AA' và (P) là mặt phẳng đi qua H và song song với mặt phẳng (MNP). Chứng minh các đoạn giao tuyến của hình lăng trụ với mặt phẳng (P) tạo thành một hình thang.

Lời giải



Hình 10

Ta có $(P)//(MNP);(MNP)\cap\left(A'B'BA\right)=MN$. Suy ra $(P)\cap\left(A'B'BA\right)=Hx//MN$.

Trong mặt phẳng $\left(A'B'BA\right)$, gọi K là giao điểm của Hx và AB. Suy ra $(P)\cap\left(A'B'BA\right)=HK$.

Vì $(P)//(MNP)$ nên $NP//(P)$. Hơn nữa $NP//A'C'$. Suy ra $(P)//A'C'$.

Trong mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$, vẽ $HI//A'C',I\in CC'$.

Ta có $(P)\cap\left(ACC'A'\right)=HI$. Tương tự, ta có $(P)\cap\left(BCC'B'\right)=IJ$ với $J\in BC$ và $IJ//MP$.

Vì $K,J\in(P)\cap(ABC)$ nên $(P)\cap(ABC)=JK$.

Do đó các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình lăng trụ $ABCD\cdot A'B'C'D'$ tạo thành tứ giác $HIJK$.

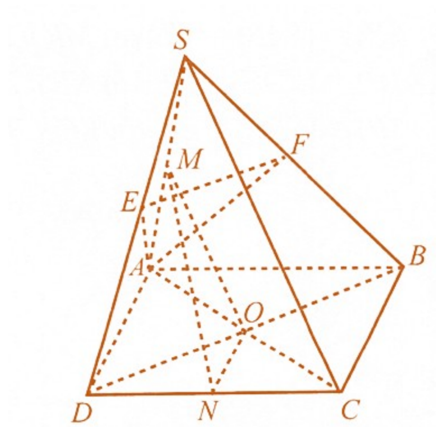
Mặt khác, $KJ//HI$ (do cùng song song với $A'C'$). Vậy tứ giác $HIJK$ là hình thang.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN)//(SBC)$.

b) Giả sử hai tam giác SAD và SAB là các tam giác cân tại A. Gọi AE và AF lần lượt là đường phân giác trong của hai tam giác SAD và SAB. Chứng minh $EF//(SBD)$.

Lời giải



Hình 2

a) Ta có $MO//SC$ (MO là đường trung bình của tam giác $SAC)$, suy ra $MO//(SCB)$; $NO//BC$ (NO là đường trung bình của tam giác $DCB)$, suy ra $NO//(SCB)$.

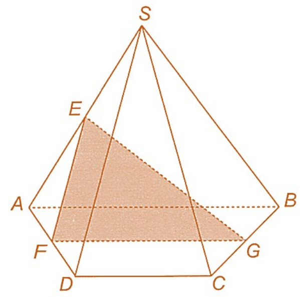
Mà $MO, NO \subset (OMN); MO \cap NO = O$. Vậy $(OMN)//(SBC)$.

b) Ta có hai tam giác SAD và SAB là các tam giác cân tại A, suy ra AE và AF vừa là đường phân giác vừa là đường trung tuyến lần lượt của hai tam giác SAD và SAB, suy ra E và F lần lượt là trung điểm của SD và SB.

Suy ra $EF//BD$ (EF là đường trung bình của tam giác $SDB)$.

Suy ra $EF//(SBD)$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD, BC (H.4.24).



Hình 4.24

Chứng minh rằng hai mặt phẳng (EFG) và (SCD) song song với nhau.

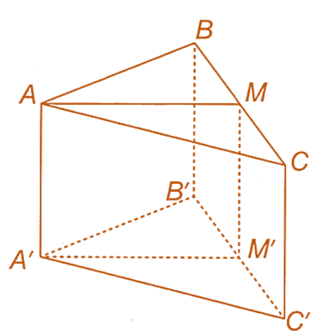
Lời giải

Vì EF là đường trung bình của tam giác SAD nên $EF//SD$. Vì EF không nằm trong mặt phẳng (SCD) nên $EF//(SCD)$.

Vì FG là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $FG//CD$. Vì FG không nằm trong mặt phẳng (SCD) nên $FG//(SCD)$.

Mặt phẳng (EFG) chứa hai đường thẳng cắt nhau EF và FG cùng song song với mặt phẳng (SCD) nên mặt phẳng (EFG) song song với mặt phẳng (SCD).

Câu 14: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Gọi M' là giao điểm của đường thẳng $B'C'$ và mặt phẳng (AMA') (H.4.26).



Hình 4.26

a) Chứng minh rằng $AM//A'M'$.

b) Chứng minh rằng M' là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Lời giải

a) Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ song song với nhau. Giao tuyến của mặt phẳng (AMA') với hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$ lần lượt là AM và $A'M'$ nên $AM // A'M'$.

b) Vì các cạnh bên của hình lăng trụ đôi một song song nên $AA' // BB'$. Vì AA' không nằm trong mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên $AA' // (BB'C'C)$. Mặt phẳng (AMA') chứa đường thẳng AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng này song song với AA', tức là $MM' // AA'$.

Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành có M là trung điểm của BC và $MM' // AA'$ nên M' là trung điểm của $B'C'$.

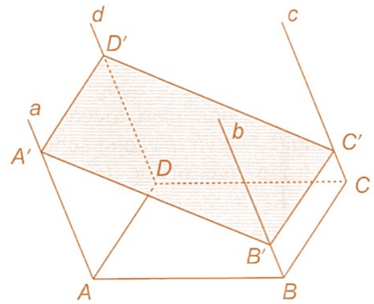
Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $mp(a,b)$ và $mp(c,d)$ song song với nhau.

b) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $mp(a,d)$ và $mp(b,c)$ song song với nhau.

c) Một mặt phẳng cắt bốn đường thẳng a, b, c, d lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Lời giải



Hình 4.56

a) Vì $a//d$ nên $a//mp(c,d)$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$, suy ra $AB//mp(c,d)$. Mặt phẳng $mp(a,b)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau là a và AB cùng song song với $mp(c,d)$ nên mặt phẳng $mp(a,b)$ song song với mặt phẳng $mp(c,d)$.

b) Chứng minh tương tự câu a.

c) Vì mặt phẳng $mp(a,b)$ song song với mặt phẳng $mp(c,d)$ nên giao tuyến của mặt phẳng $(A'B'C'D')$ với hai mặt phẳng đó song song với nhau, tức là $A'B'//C'D'$. Lập luận tương tự có $A'D'//B'C'$, suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

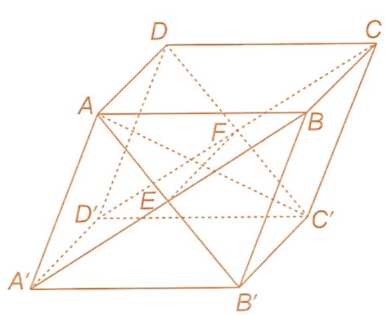
Câu 16: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(A'D'CB)$.

b) Chứng minh rằng $d//AD$.

c) Chứng minh rằng d đi qua trung điểm của các đường chéo của hình hộp.

Lời giải



Hình 4.62

a) Gọi E là giao điểm của AB' và $A'B$; F là giao điểm của CD' và $C'D$. Đường thẳng EF là giao tuyến của hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(A'D'CB)$.

b) Hai mặt phẳng $(ADC'B')$ và $(A'D'CB)$ chứa hai đường thẳng song song là AD và BC nên giao tuyến EF của hai mặt phẳng đó song song với AD.

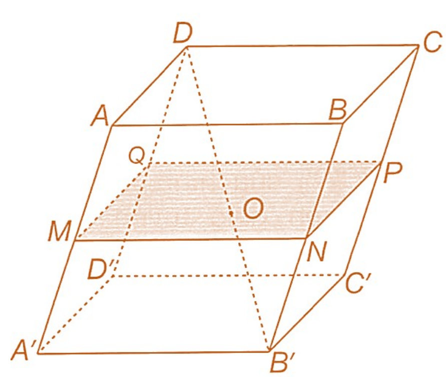
c) Tứ giác $ABCD$ và $BCC'B'$ là hình bình hành nên $AD // BC, AD = BC$ và $BC // B'C', BC = B'C'$. Do đó $AD // B'C'$ và $AD = B'C'$, suy ra $ADC'B'$ là hình bình hành. Vì E và F lần lượt là trung điểm của AB' và $C'D$ nên EF đi qua trung điểm của AC'. Vì các đường chéo của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường nên đường thẳng EF đi qua trung điểm của các đường chéo đó.

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của các đường chéo của hình hộp. Mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh rằng M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC', DD'.

b) Chứng minh rằng $ABCD.MNPQ$ là hình hộp.

Lời giải



Hình 4.64

a) Áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng $(ABCD),(MNPQ),(A'B'C'D')$ và hai cát tuyến AA' và DB' suy ra $\frac{AM}{MA'}=\frac{DO}{OB'}$. Vì O là trung điểm của DB' nên M là trung điểm của AA'.

Chứng minh tương tự với các điểm N,P,Q.

b) Vì M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA',BB' nên $MN//AB$ và $MN=AB$.

Tương tự $PQ//CD$ và $PQ=CD$.

Vì $AB//CD$ và $AB=CD$ nên $MN//PQ$ và $MN=PQ$, suy ra $MNPQ$ là hình bình hành. Vì các đường thẳng AM,BN,CP,DQ đôi một song song nên suy ra $ABCD.MNPQ$ là hình hộp.

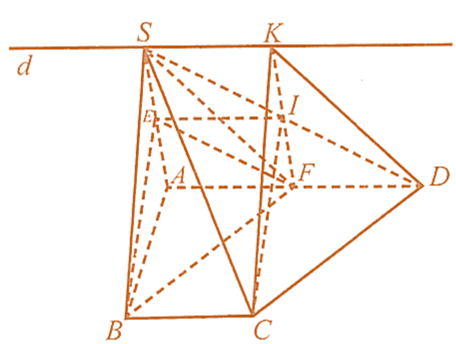
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD, AD//BC, AD=2BC$. Gọi E,F,I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,AD,SD.

a) Chứng minh: $(BEF)//(SCD)$ và $CI//(BEF)$.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

c) Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến vừa tìm được ở câu b, từ đó chứng minh $(SBF)//(KCD)$.

Lời giải



Hình 1

a) Ta có $EF//SD$ (đường trung bình của tam giác $SAD)$.

Suy ra $EF//(SCD)$ (vì $SD\subset(SCD)$).

Ta có $BF//CD$ ($BFDC$ là hình bình hành), suy ra $BF//(SCD)$ (vì $CD\subset(SCD))$.

Mặt khác $EF,BF\subset(BEF);EF\cap BF=F$.

Vậy $(BEF)//(SCD)$.

Ta có $EI//BC$ (vì cùng song song với AD) và $EI=BC=\frac{1}{2}AD$ (vì EI là đường trung bình của tam giác SAD và $AD=2BC$).

Ta có $EICB$ là hình bình hành nên $CI//BE$.

Mặt khác $BE\subset(BEF)$ suy ra $CI//(BEF)$.

b) Ta có $BC//AD$, suy ra giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và $d//BC//AD$.

c) Xét tam giác SAD có I là trung điểm của SD,F là trung điểm của AD.

Suy ra IF là đường trung bình của tam giác SAD, suy ra $IF//SA$ suy ra $KF//SA$. (1)

Mặt khác, $SK//AF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SKFA$ là hình bình hành. Suy ra $SK=AF$.

Suy ra $SK=FD($ vì $AF=FD)$. Tứ giác $SKDF$ có $SK=FD$ và $SK//FD$, nên $SKDF$ là hình bình hành. Suy ra $SF//KD$.

Ta có $SF//KD;BF//DC;F=SF\cap BF;D=KD\cap CD$.

Suy ra $(SBF)//(KCD)$.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh:

a) $(BDA')//(B'D'C)$.

b) Đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

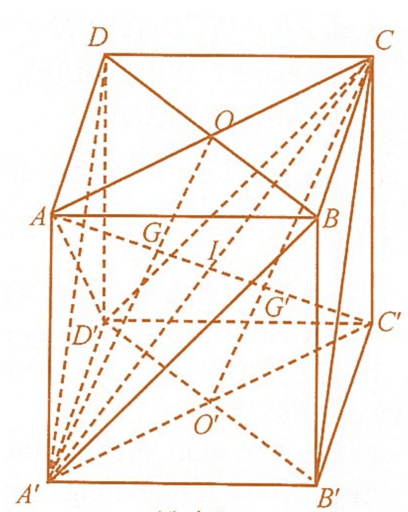
Lời giải

a) Ta có $DD'//BB'$ và $DD'=BB'$ ($ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp), suy ra $DD'B'B$ là hình bình hành, suy ra $BD//B'D'$ mà $B'D'\subset(B'D'C)$, suy ra $BD//(B'D'C)$. (1)

Chứng minh tương tự ta có $DA'//B'C$, mà $B'C\subset(B'D'C)$, suy ra $DA'//(B'D'C)$.(2)

Mặt khác, ta có $BD\cap DA'=D$ và $BD, DA'\subset(BDA')$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(BDA')//(B'D'C)$.



Hình 3

b) Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Trong hình bình hành $AA'C'C$ gọi I là giao điểm của AC' và $A'C$; $A'O, CO'$ cắt lần lượt tại G và G'.

Trong tam giác $AA'C$, ta có G là giao điểm của hai trung tuyến AI và $A'O$ nên G là trọng tâm của tam giác $AA'C$, suy ra G cũng là trọng tâm tam giác $A'BD$, tương tự G' là trọng tâm tam giác $B'D'C$

Vậy AC' đi qua trọng tâm của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) Ta có $AG = \frac{2}{3}AI = \frac{1}{3}AC'; C'G' = \frac{2}{3}C'I = \frac{1}{3}AC'$, suy ra G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.