TUYỂN TẬP
CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ
TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

SỬ DỤNG TỌA ĐỘ VECTƠ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

ĐỖ THANH SƠN
(GV Khối chuyên Toán – Tin, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài viết này đề cập một phương pháp giải một số dạng toán về đại số như chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa các căn thức bậc hai, giải phương trình, ... Vấn đề này không mới! Bạn đọc có thể đã biết trong một số tài liệu hiện hành (dưới dạng các bài tập), nhưng còn tản mạn chưa được hệ thống. Bài viết này cố gắng hệ thống hóa vấn đề, giúp bạn đọc có thể vận dụng phương pháp xác định tọa độ vectơ, hoặc tọa độ điểm giải quyết các dạng toán nói trên. Trước hết chúng ta nhắc lại vài điểm cơ bản về vectơ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

Cho ba vectơ $\vec{u} = (x_1, y_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2)$; $\vec{w} = (x_3, y_3)$ thỏa mãn điều kiện $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ (hoặc $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$) (*). Khi đó

Độ dài các vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lần lượt là

$$u = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},\ v = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},\ w = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}.$$

Ta biết rằng với điều kiện (*) thì $u + v \geq w$ hay $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$, hay $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. Kết quả đó gợi cho ta thiết lập mối quan hệ giữa các biểu thức đại số trong bài toán đang xét với độ dài của các vectơ trong mặt phẳng tọa độ.

Phương pháp. *Khi gặp các bài toán đại số mà mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \ldots$ được biểu diễn dưới dạng tổng của hai bình phương $\sqrt{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\sqrt{B} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \ldots$ Ta thiết lập các vectơ có tọa độ thích hợp trên hệ trục tọa độ Descartes Oxy sao cho độ dài các vectơ đó tương ứng bằng $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \ldots$ Sau đó nghiệm lại rằng tổng các vectơ bằng vectơ không (hoặc có một vectơ bằng tổng các vectơ còn lại), rồi sử dụng bất đẳng thức (BĐT) về độ dài ba cạnh của tam giác hoặc BĐT về độ dài đường gấp khúc để đi đến kết quả bài toán.*

Để làm rõ cho phương pháp, chúng tôi xin đưa ra một số thí dụ minh họa sau đây.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có* $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2\sqrt{2}$.

Lời giải. Vế trái của BĐT có thể viết dưới dạng $\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 1}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy chọn $\vec{u} = ((x+1), 1)$; $\vec{v} = ((1-x), 1)$; $\vec{w} = (2, 2)$. Khi đó $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$;

$$u = \sqrt{x^2 + 2x + 2};\ v = \sqrt{x^2 - 2x + 2};\ w = 2\sqrt{2}.$$

Từ BĐT tam giác $u + v \geq w$ ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Thí dụ 2. *Với a, b là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{2b^2 - 6b + 9} + \sqrt{2b^2 - \frac{10ab}{3} + \frac{13a^2}{9}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13a^2}{9} - 4a + 4} \geq \frac{15\sqrt{13}}{13} \qquad (1)$$

Lời giải. Ta biến đổi các biểu thức

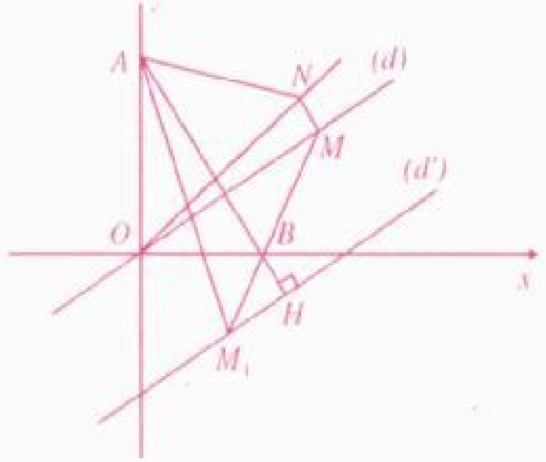
$$\sqrt{2b^2 - 6b + 9} = \sqrt{b^2 + (b-3)^2};$$

$$\sqrt{2b^2 - \frac{10ab}{3} + \frac{13a^2}{9}} = \sqrt{(b-a)^2 + \left(b - \frac{2a}{3}\right)^2}.$$

Xét các điểm $M\left(a, \frac{2a}{3}\right)$; $N(b, b)$; $A(0, 3)$; $B(2, 0)$ và lập các vectơ $\overrightarrow{AN} = (b, b-3)$; $\overrightarrow{MN} = \left(b - a, b - \frac{2a}{3}\right)$; $\overrightarrow{BM} = \left(a - 2, \frac{2a}{3}\right)$.

Khi đó $AN = \sqrt{b^2 + (b-3)^2}$;

$$MN = \sqrt{(b-a)^2 + \left(b - \frac{2a}{3}\right)^2};\ BM = \sqrt{\frac{13a^2}{9} - 4a + 4}.$$



Giả sử M_1 là điểm được xác định bởi $\overline{BM} = -2\overline{BM_1}$ (2) ; (d) là đường thẳng có phương trình (PT) : $2x - 3y = 0$ đi qua M ; (d') // (d) và (d') đi qua M_1. Từ (2) ta xác định được $MM_1 = \frac{3}{2}BM$ và PT của (d') là $2x - 3y - 9 = 0$. Gọi H là giao điểm của (d') với AB, ta thấy $AB \perp (d')$ tại H và $AH = \frac{15\sqrt{13}}{13}$. Theo BĐT về độ dài đường gấp khúc ta có

$$AN + NM + MM_1 \ge AM_1 \ge AH = \frac{15\sqrt{13}}{13}.$$

BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của (d) với AB, còn N là giao điểm của AB với đường $y = x$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ PT :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right), \text{ lúc đó } a = \frac{18}{13}.$$

Tọa độ của N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right), \text{ lúc đó } b = \frac{6}{5}.$$

Tóm lại, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(a, b) = \left(\frac{18}{13}; \frac{6}{5}\right).$$

Thí dụ 3. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$F(x) = \sqrt{2}\,|\cos x| + |\sin x + \cos x|.$$

Lời giải. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta chọn điểm $A(\cos x, 0)$; $B(0, \cos x)$; $C(-\sin x, 0)$ và lập các vectơ $\overrightarrow{AB} = (-\cos x, \cos x)$; $\overrightarrow{BC} = (-\sin x, -\cos x)$; $\overrightarrow{CA} = (\cos x + \sin x, 0)$.

Ta có $AB = \sqrt{2}\,|\cos x|$; $BC = 1$; còn $CA = |\sin x + \cos x|$. Theo BĐT tam giác $AB + CA \ge BC$, suy ra $F(x) \ge 1$. Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $F(x)$ là 1, đạt được khi và chỉ khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$\left|\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}\right| = \sqrt{5}.$$

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại dưới dạng

$$\left|\sqrt{(x-1)^2 + 4} - \sqrt{(x-3)^2 + 1}\right| = \sqrt{5} \qquad (1)$$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lập các vectơ $\vec{u} = (x - 1, 2)$, $\vec{v} = (x - 3, 1)$, suy ra $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (2, 1)$. Hiển nhiên rằng $w = \sqrt{5}$. Áp dụng BĐT tam giác ta có $|u - v| \le w$ (2). Từ (1), (2) ta thấy việc giải PT (1) được chuyển về giải PT $\frac{x-1}{2} = x - 3$. PT này có nghiệm $x = 5$. Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Chúng ta tiếp tục sử dụng phương pháp trên vào bài toán chứng minh BĐT với các biến ràng buộc.

Thí dụ 5. *Chứng minh*

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}\right)$$

trong đó a, b, c, d là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{|bc - ad|}{|ac + bd|} = \sqrt{3}$.

Lời giải. Điều kiện ràng buộc của bài ra có thể viết dưới dạng $\left|\dfrac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{1 + \frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}}\right| = \sqrt{3}$.

Đặt $k_1 = \frac{b}{a} > 0$; $k_2 = \frac{d}{c} > 0$ khi đó $b = k_1 a$; $d = k_2 c$. Xét các điểm $A(a, b)$ thuộc nửa đường thẳng $y = k_1 x$ và $B(c, d)$ thuộc nửa đường thẳng $y = k_2 x$ (với $x > 0$) trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Trong tam giác OAB (O là gốc tọa độ) mà $\widehat{AOB} = 60^0$ ta có BĐT : $AB \ge \frac{1}{2}(OA + OB)$, trong đó $OA = \sqrt{a^2 + b^2}$; $OB = \sqrt{c^2 + d^2}$; còn $AB = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $OA = OB \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Để kết thúc bài báo xin mời các bạn tự thử sức mình với các bài toán sau :

1. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{x^2+4}+2\sqrt{x^2-4x+5} \geq 5$

với mọi $x \leq \dfrac{4}{3}$;

b) $\sqrt{x^2+4}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+2x+2} \geq \dfrac{7\sqrt{5}}{6}$

với mọi $x \geq -\dfrac{2}{3}$;

(*HD*: Chọn $A\ (0, 2)$; $B(-1, -1)$; $M\ (x, 0)$; cò M_1 là điểm xác định bởi $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{BM_1}$).

c) $\sqrt{a^2-4a+8}+\sqrt{10b^2-18b+9}+\sqrt{10b^2-2ab+a^2} \geq \sqrt{29}$

với mọi số thực a, b.

(*HD*: Chọn $A(0, 3)$; $B(2, -2)$; $M(b, 3b)$, $N(a, 0)$)

d) $\sqrt{10x^2-24x+16}+\sqrt{13y^2-18xy+10x^2}+\sqrt{13y^2-6yz+z^2}+\sqrt{z^2-12z+40} \geq 6\sqrt{2}$

với mọi x, y, z.

(*HD*: Chọn $A(-2, 6)$; $B(4, 0)$; $M(0, z)$; $N(2y, 3y)$; $P(3x, x)$).

e) $\sqrt{5b^2-8b+4}+\sqrt{5b^2-8ab+5a^2}+2\sqrt{5a^2-4a+1} \geq \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ với mọi a, b.

2. Giải phương trình

$$\left|\sqrt{x^2+4x+13}-\sqrt{x^2-2x+2}\right|=5.$$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $P=\sqrt{2}|\sin x|+|\sin x-\cos x|$;

b) $Q=\sqrt{x^2-4x+13}+\sqrt{x^2+6x+10}$;

c) $R=\sqrt{4a^2-2\sqrt{3}+1}+\dfrac{4}{3}\sqrt{4a^2-2\sqrt{3}a+3}$.

(*HD*: Chọn $A(0, 1)$; $B\ (\sqrt{3}, 0)$; $M(a, \sqrt{3}a)$).

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BÀI TOÁN ĐẠI SỐ NHỜ ĐỊNH LÍ VIÈTE

HOÀNG NGỌC ĐAN
(GV THCS Lê Quý Đôn, Hà Nội)

Ta đã biết định lí Viète: *Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.*

Nhờ định lí này, ta đã giải được rất nhiều bài toán đại số. Trong bài viết này, chúng tôi xin bắt đầu từ một bài toán sau đây.

Bài toán mở đầu. *Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.*

Chứng minh rằng $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0\ (*)$

Lời giải. Ta có

$$S_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$$

$$= (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1^n + x_2^n)$$

$$= -\frac{b}{a}S_{n+1} - \frac{c}{a}S_n.$$ Từ đó suy ra hệ thức (*).

Dưới đây chúng tôi xin trình bày một số bài toán giải được nhờ ứng dụng bài toán trên.

Bài toán 1. *Cho x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$.*

Hãy tính $x_1^7 + x_2^7$.

Lời giải. Theo bài toán mở đầu ta có

$$S_{n+2} - 2S_{n+1} - 2S_n = 0$$

với $S_1 = 2, S_2 = 8$. Từ đó tính được $S_7 = 1136$.

Bài toán 2. *Tìm đa thức bậc 7 có hệ số nguyên và nhận $\alpha = \sqrt[7]{\dfrac{3}{5}} + \sqrt[7]{\dfrac{5}{3}}$ là nghiệm.*

Lời giải. Đặt $x_1 = \sqrt[7]{\dfrac{3}{5}}$, $x_2 = \sqrt[7]{\dfrac{5}{3}}$, ta có

$x_1 + x_2 = \alpha$, $x_1.x_2 = 1$.

Do đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - \alpha x + 1 = 0$.

Theo bài toán mở đầu ta có :

$S_{n+2} - \alpha S_{n+1} + S_n = 0$ với $S_1 = \alpha$, $S_2 = \alpha^2 - 2$.

Từ đó tính được

$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = \alpha^7 - 7\alpha^5 + 14\alpha^3 - 7\alpha$.

Mặt khác

$$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = \left(\sqrt[7]{\frac{3}{5}}\right)^7 + \left(\sqrt[7]{\frac{5}{3}}\right)^7 = \frac{34}{15}.$$

Suy ra $\alpha^7 - 7\alpha^5 + 14\alpha^3 - 7\alpha = \dfrac{34}{15}$

hay $15\alpha^7 - 105\alpha^5 + 210\alpha^3 - 105\alpha - 34 = 0$.

Vậy đa thức cần tìm là

$$15x^7 - 105x^5 + 210x^3 - 105x - 34.$$

Bài toán 3. *Giả sử x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$.*

Chứng minh rằng $S_n = x_1^n + x_2^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ là số nguyên không chia hết cho 5.

Lời giải. a) Trước hết ta chứng minh $S_n \in \mathbb{Z}$ bằng phương pháp quy nạp :

Với $n = 1$: $S_1 = 6 \in \mathbb{Z}$.

Với $n = 2$: $S_2 = 34 \in \mathbb{Z}$.

Giả sử $S_k \in \mathbb{Z}$ và $S_{k+1} \in \mathbb{Z}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, ta cần chứng minh $S_{k+2} \in \mathbb{Z}$.

Thật vậy, theo bài toán mở đầu ta có :

$$S_{k+2} - 6S_{k+1} + S_k = 0$$

tức là $S_{k+2} = 6S_{k+1} - S_k$.

Do S_k và $S_{k+1} \in \mathbb{Z}$ nên từ kết quả trên có $S_{k+2} \in \mathbb{Z}$.

Vậy $S_n \in \mathbb{Z}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$).

b) Từ kết quả :

$$S_{n+2} = 6S_{n+1} - S_n = 6(6S_n - S_{n-1}) - S_n$$
$$= 35S_n - 5S_{n-1} - S_{n-1}.$$

Suy ra S_{n+2} và $-S_{n-1}$ chia cho 5 có cùng số dư.

Ta có $S_n, -S_{n+3}, S_{n+6}, -S_{n+9}, \ldots$ chia cho 5 có cùng số dư.

Mà $S_1 = 6$, $S_2 = 34$, $S_3 = 198$ đều không chia hết cho 5 nên S_n ($n \in \mathbb{N}^*$) không chia hết cho 5.

Bài toán 4. *Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá* $(4+\sqrt{15})^7$.

Lời giải. Đặt $x_1 = 4+\sqrt{15}$, $x_2 = 4-\sqrt{15}$. Ta có $x_1.x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 8$.

Khi đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1{}^n + x_2{}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài toán mở đầu ta có: $S_{n+2} - 8S_{n+1} + S_n = 0$.

Ta tính được $S_1 = 8$, $S_2 = 62$, $S_3 = 488$, $S_4 = 3842$, $S_5 = 30248$, $S_6 = 238142$, $S_7 = 1874888$.

Vậy $x_1^7 = 1874888 - x_2^7$.

Mà $0 < x_2^7 = (4-\sqrt{15})^7 < 1$ nên

$1874887 < 1874888 - x_2{}^7 < 1874888$. Do đó

$1874887 < x_1^7 = (4+\sqrt{15})^7 < 1874888$.

Vậy số nguyên lớn nhất không vượt quá $(4+\sqrt{15})^7$ là 1874887.

Bài toán 5. *Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số* $(7+4\sqrt{3})^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), *có ít nhất n chữ số 9 ngay sau dấu phẩy.*

Lời giải. Đặt $x_1 = 7+4\sqrt{3}$, $x_2 = 7-4\sqrt{3}$. Ta có $x_1 + x_2 = 14$, $x_1.x_2 = 1$.

Khi đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 14x + 1 = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n = (7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Ta chứng minh được $S_n \in \mathbb{Z}$ bằng phương pháp quy nạp và vì $S_n > 0$ nên $S_n \in \mathbb{N}^*$.

Vì $0 < 7-4\sqrt{3} = \dfrac{1}{7+4\sqrt{3}} < \dfrac{1}{11} < \dfrac{1}{10}$ nên

$$0 < (7-4\sqrt{3})^n < \frac{1}{10^n}.$$

Từ đó suy ra

$$(7+4\sqrt{3})^n < S_n < (7+4\sqrt{3})^n + \frac{1}{10^n};$$

$$S_n - \frac{1}{10^n} < (7+4\sqrt{3})^n < S_n$$

mà $S_n \in \mathbb{N}^*$ nên $(7+4\sqrt{3})^n$ có ít nhất n chữ số 9 ngay sau dấu phẩy.

Xin mời các bạn hãy ứng dụng bài toán mở đầu để giải các bài tập sau đây.

Bài 1. Cho phương trình

$$x^2 + 5(m^2+1)x + 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (x_1 và x_2).

b) Chứng minh rằng $S_n = x_1^n + x_2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) là số nguyên.

c) Tìm số dư trong phép chia S_{2005} cho 5.

Bài 2. Xét phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0 \ (a, b \in \mathbb{Q}).$$

a) Chứng minh rằng $a = -5$, $b = 3$ là cặp số hữu tỉ duy nhất làm cho phương trình đã cho có ba nghiệm trong đó có một nghiệm là $2+\sqrt{5}$.

b) Kí hiệu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình trên. Đặt $S_n = x_1{}^n + x_2{}^n + x_3{}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), hãy tính S_1, S_2, S_3.

Chứng minh rằng $S_n \in \mathbb{Z}$.

c) Tìm số dư của phép chia S_{2005} cho 4.

Bài 3. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px - 1 = 0$ (với $p \in \mathbb{Z}$ và p lẻ).

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$S_n = x_1{}^n + x_2{}^n$ và $S_{n+1} = x_1{}^{n+1} + x_2{}^{n+1}$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau.

Bài 4. Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(7+4\sqrt{3})^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có ít nhất n chữ số 9 ngay sau dấu phẩy.

Bài 5. Chứng minh rằng phần thập phân của số $(5+\sqrt{26})^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ bắt đầu bằng n chữ số giống nhau.

Bài 6. a) Chứng minh rằng

$$d_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(với $n \in \mathbb{N}$) là số tự nhiên.

b) Tìm tất cả các giá trị của n để d_n là số chính phương.

Bài 7. Tìm chữ số đơn vị trong biểu diễn thập phân của số $(15+\sqrt{220})^{19} + (15+\sqrt{220})^{82}$.

(Các bạn có thể xem thêm bài "Ứng dụng của một hệ thức truy hồi" của tác giả Nguyễn Đức Trường, THTT số 320, tháng 2-2004).

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ BẰNG CÁCH ĐÁNH GIÁ

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT Lê Quý Đôn, Biên Hòa, Đồng Nai)

Có nhiều cách giải phương trình vô tỉ, chẳng hạn phương pháp giải phương trình vô tỉ bằng cách dùng các biểu thức liên hợp (xem THTT số 333 tháng 3-2005). Trong bài viết này xin giới thiệu phương pháp giải phương trình vô tỉ bằng cách đánh giá và thường gặp hai cách đánh giá sau đây.

Cách 1. Tìm một nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}=6 \qquad (1)$$

Lời giải. Điều kiện $x<2$.

Với phương trình vô tỉ dạng này ta thường dự đoán nghiệm là các giá trị của x mà biểu thức dưới căn nhận giá trị là một số chính phương. Nhận thấy nghiệm của (1) phải lớn hơn 1. Bằng cách thử ta thấy rằng (1) có một nghiệm là $x=\frac{3}{2}$. Ta chứng minh đó là nghiệm duy nhất của (1). Thật vậy

* Với $x<\frac{3}{2}$ ta có $\sqrt{\frac{6}{3-x}}<2$ và $\sqrt{\frac{8}{2-x}}<4$.

Do đó $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}<6$. Suy ra (1) không có nghiệm trong $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$.

* Với $\frac{3}{2}<x<2$, chứng minh tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}>6.$$

Suy ra (1) không có nghiệm trong $\left(\frac{3}{2};2\right)$.

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{2}$.

Ta thấy giải phương trình bằng cách đánh giá này thì điều quan trọng là phải đoán được nghiệm của nó. Để đoán nghiệm ta nên chỉ ra khoảng chứa nghiệm và xét trường hợp đặc biệt để tìm ra nghiệm trong đó.

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(1+\sqrt{1+x+x^2}\right)=0 \quad (2)$$

Lời giải

$$(2)\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{(3x)^2+3}\right)+(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{(3x)^2+3}\right)=-(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right).$$

Nhận thấy nếu $3x=-(2x+1)\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$ thì các biểu thức trong căn ở hai vế bằng nhau. Vậy $x=\frac{-1}{5}$ là một nghiệm của (2). Hơn nữa, nghiệm của (2) nằm trong khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Ta chứng minh $x=-\frac{1}{5}$ là nghiệm duy nhất của (2).

* Với $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{5}$ ta có $3x<-2x-1<0$

$\Rightarrow (3x)^2>(2x+1)^2$

$\Rightarrow 2+\sqrt{(3x)^2+3}>2+\sqrt{(2x+1)^2+3}$.

Từ đó suy ra

$$3x\left(2+\sqrt{(3x)^2+3}\right)>-(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{(3x)^2+3}\right)+(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)>0.$$

Vậy (2) không có nghiệm trong $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{5}\right)$.

* Chứng minh tương tự ta cũng đi đến (2) không có nghiệm trong $\left(-\frac{1}{5};0\right)$.

Vậy PT (2) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{5}$.

Cách 2. Đánh giá hai vế

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ xác định trên D.

Nếu $\begin{cases} f(x) \geq m(x) \\ g(x) \leq m(x) \end{cases}$ $\forall x \in D$ thì

$$f(x) = g(x) \text{ với } x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m(x) \\ g(x) = m(x). \end{cases}$$

Trong cách đánh giá này ta thường dùng các bất đẳng thức quen thuộc để đánh giá hai vế. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = 2(x-1)^4(2x^2-4x+1) \quad (3)$$

Lời giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = (x-1)^2$, ta có $0 \leq t \leq 1$.

PT (3) trở thành

$$\sqrt{1+\sqrt{1-t}} + \sqrt{1-\sqrt{1-t}} = 2t^2(2t-1).$$

Nhận thấy $2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$1+\sqrt{t} = 2t^4(2t-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} = 2(2t-1)^2.$$

Vì $t \leq 1$ nên $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^3\sqrt{t}} \geq 2$.

Từ đó suy ra $t = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy nghiệm của PT (3) là $x = 2$.

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4) \quad (4)$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1$ hoặc $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Gọi vế trái và vế phải của (4) thứ tự là A và B.

Áp dụng BĐT Bunhiacovski cho hai bộ số $(1, 1, -x)$ và $(\sqrt{3x^2-1}, \sqrt{x^2-x}, \sqrt{x^2+1})$ ta có

$$A \leq \sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Do $x \geq 1$ hoặc $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $5x^2 - x > 0$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$B = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[5x^2 - x + 2(x^2+2)\right]$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{(5x^2-x)2(x^2+2)} = \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$ và $x = \frac{4}{3}$.

Vậy nghiệm của PT (4) là $x = -1$.

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$\sqrt{13x^2-6x+10} + \sqrt{5x^2-13x+\frac{17}{2}} + \sqrt{17x^2-48x+36} = \frac{1}{2}(36x-8x^2-21) \quad (5)$$

Lời giải. Gọi vế trái và vế phải của (5) theo thứ tự là C và D. Ta có

$$C = \sqrt{(3x+1)^2+(2x-3)^2} + \sqrt{\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{x^2+(4x-6)^2} \geq |3x+1| + \left|2x-\frac{5}{2}\right| + |x|$$

$$\geq \left|3x+1+2x-\frac{5}{2}+x\right| = \left|6x-\frac{3}{2}\right| \geq 6x - \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$.

Mặt khác $D = \frac{1}{2}\left[12x-3-2(4x^2-12x+9)\right] = \frac{1}{2}\left[12x-3-2(2x-3)^2\right] \leq \frac{1}{2}(12x-3) = 6x - \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{3}{2}$.

Vậy nghiệm của PT (5) là $x = \frac{3}{2}$.

Cuối cùng, chúng tôi xin đưa ra một số bài để các bạn luyện tập.

Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$;

2. $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 4$;

3. $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}$;

4. $(x+2)\sqrt{x+1} = 2x+1$;

5. $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$;

6. $32x^2 - 4x + 1 = \sqrt{4x(8x+1)}$.

có nghiệm trong $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Vậy PT (2) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{5}$.

MỘT SỐ GỢI Ý
KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Mỗi đề thi tuyển sinh vào Đại học thường có một câu về phương trình lượng giác (PTLG). Phương pháp thường gặp khi giải PTLG là thực hiện một số phép biến đổi lượng giác hợp lí để đưa bài toán về PT tích, đặt ẩn số phụ để quy về PT bậc hai, bậc ba, từ đó đưa về PT lượng giác cơ bản... Ta nói biến đổi hợp lí vì các đồng nhất thức lượng giác thường rất đa dạng.

Ví dụ, nếu cần biến đổi $\cos^4 x - \sin^4 x$, thì tùy theo đầu bài cụ thể, chúng ta sử dụng một trong các đồng nhất sau :

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Trong bài viết, xin được bỏ qua các phép biến đổi đơn giản hoặc viết nghiệm của các PT cơ bản.

1/ Biến đổi trực tiếp về phương trình cơ bản

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\cos^3 x.\sin 3x + \sin^3 x.\cos 3x = \frac{3}{8} \quad (1)$$

Lời giải. Biến đổi vế trái của (12) ta có

$$\cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x) + \sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x)$$
$$= 3\cos^3 x.\sin x - 3\sin^3 x.\cos x$$
$$= 3\sin x.\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= \frac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

PT (1) trở thành $\sin 4x = \frac{1}{2}$.

Lưu ý. Các đồng nhất lượng giác thường gặp khi giải toán :

$$\cos^3 x.\sin 3x + \sin^3 x.\cos 3x = \frac{3}{4}\sin 4x \ ;$$

$$\cos^3 x.\cos 3x + \sin^3 x.\sin 3x = \cos^3 2x \ ;$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$= \frac{1+\cos^2 2x}{2} = \frac{3+\cos 4x}{4} \ ;$$

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$= \frac{1+3\cos^2 2x}{4} = \frac{5+3\cos 4x}{8} .$$

2/ Đặt ẩn số phụ để đưa về phương trình bậc hai, bậc ba, ...

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x . \qquad (2)$$

Lời giải

(2) $\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 3\sin x\cos x$.

Đặt $t = \sin x + \cos x$ thì $t = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \Rightarrow$ $|t| \le \sqrt{2}$, lúc đó $\sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$. PT đã cho trở thành

$$t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 2t - 5) = 0.$$

Chú ý đến ĐK : $|t| \le \sqrt{2}$ ta nhận được $t = -1$.

Với $t = -1$ ta được $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lưu ý. Nếu đặt $t = \sin x + \cos x$ thì $\sin 2x = t^2 - 1$; $\sin.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$;

Nếu đặt $t = \sin x - \cos x$ thì $\sin 2x = 1 - t^2$; $\sin.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Trong cả hai phép đặt trên, đều có ĐK $t \le \sqrt{2}$.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x \quad (3)$$

Lời giải

(3) $\Leftrightarrow 2\sin^2 x.\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x$.

Nhận thấy nếu $\cos x = 0$, (3) không thỏa mãn. Chia cả hai vế của (3) cho $\cos^3 x$, ta được

$$2\text{tg}^2 x + 3\text{tg}x.(1 + \text{tg}^2 x) - 4\text{tg}^3 x = 6.$$

Đặt $t = \text{tg}x$ thì

$$t^3-2t^2-3t+6=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2-3)=0.$$

Từ đó, dễ dàng tìm được

$\text{tg}x = 2$; $\text{tg}x = -\sqrt{3}$; $\text{tg}x = \sqrt{3}$.

Lưu ý. Nếu trong PT chỉ có các số hạng bậc nhất và bậc ba đối với sin$x$ và cosx, thì ta có thể chia hai vế của PT cho $\cos^3 x$ hoặc $\sin^3 x$ để đưa PT đã cho về PT bậc ba của tg$x$ hoặc cotgx.

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\text{tg}x + 2\sin 2x = 3 \qquad (4)$$

Lời giải. ĐK $\cos x \neq 0$.

Đặt tg$x$ = t, ta được PT

$$t+\frac{4t}{1+t^2}=3 \Leftrightarrow t^3-3t^2+5t-3=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2-2t+3)=0.$$

Vì $t^2-2t+3>0$ nên ta được nghiệm : $t = 1 \Rightarrow \text{tg}x = 1$.

Lưu ý. Nếu PT có các số hạng : tg$x$, cotg$x$ và cos2x, sin2x, ... thì ta đặt tg$x$ = t khi đó :

$$\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos 2x=\frac{1-t}{1+t^2};\ \text{tg}2x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Sau đó biến đổi về một PT bậc cao đối với t.

3/ Biến đổi về phương trình tích

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x} \qquad (5)$$

Lời giải. ĐK $\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$.

$$2(\cos 3x-\sin 3x)+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[4(\cos^3 x+\sin^3 x)-3(\cos x+\sin x)\right]+$$

$$+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x.\cos x}=0.$$

Nhận thấy các số hạng có thừa số chung

cos$x$ + sinx.

Dễ dàng biến đổi PT (5) thành

$$(\cos x+\sin x)\left[2(1-4\cos x\sin x)+\frac{1}{\sin x.\cos x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(2\sin^2 2x-\sin 2x-1)=0.$$

Ta được:

$$\cos x+\sin x=0;\ \sin 2x=1;\ \sin 2x=-\frac{1}{2}.$$

Lưu ý. Các số hạng có chứa thừa số (cos$x$+sin) là: cos2x; $\cos^3 x + \sin^3 x$; $\cos^4 x - \sin^4 x$; cos3x − sin3x; 1 + tg$x$; tg$x$ − cotg$x$;...

Cũng tương tự, các bạn tự viết các số hạng có chứa thừa số (cos$x$ − sin$x$).

Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2} \quad (6)$$

Lời giải

$$(6) \Leftrightarrow \cos x.(\cos x+\cos 2x) + \sin x(\cos 2x-\cos x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x.\cos 2x+\sin x.\cos 2x-\sin x\cos x-\sin^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.(\cos x+\sin x)-\sin x(\cos x+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos 2x-\sin x)=0.$$

Ta được :

$$\cos x+\sin x=0;\quad \cos 2x-\sin x=0.$$

Lưu ý. Nếu trong PT có chứa các số hạng là tích của nhiều thừa số đối với sin hoặc cosin thì nói chung, ta phải sử dụng công thức biến tích thành tổng sau đó tìm cách đưa về PT tích hoặc đặt ẩn số phụ để được PT bậc 2, 3...

4/ Cách đánh giá hai vế

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x \qquad (7)$$

Lời giải. Ta có $4\sin^2 3x.\sin^2 x=5+\sin 3x$.

Vì $0 \le \sin^2 3x \le 1$; $0 \le \sin^2 x \le 1$; $\sin 3x \ge -1$;

nên $4\sin^2 3x.\sin^2 x \le 4 \le 5+\sin 3x$

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 3x.\sin^2 x=1\\ \sin 3x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 3x=-1\\ \sin^2 x=1.\end{cases}$$

Từ phương trình $\sin^2 x=1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$.

- $\sin x = 1 \Rightarrow \sin 3x = -1$ (thỏa mãn).
- $\sin x = -1 \Rightarrow \sin 3x = 1$ (loại).

Lưu ý. Các BĐT thường dùng để ước lượng:

$|\sin x| \le 1$; $|\cos x| \le 1$; $|a\sin x+b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Nếu m, n là các số tự nhiên lớn hơn 2 thì

$\sin^m x \pm \cos^n x \le \sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Bài tập. Giải các phương trình sau:

1. $\sin^2 3x=4\cos 4x+3$;

2. $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x =$
$= \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x$;

3. $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$;

4. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right).\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\cos^4 4x$.

TÌM THÊM ĐIỀU THÚ VỊ TỪ MỘT BÀI TOÁN LƯỢNG GIÁC

TRỊNH TUÂN
(GV Đại học Thủy Lợi Hà Nội)

Trong các kì thi đại học hàng năm, khi đứng trước các bài toán tam giác lượng không ít các bạn đã lúng túng! Trong bài viết này từ một bài toán quen thuộc chúng tôi muốn tìm hiểu thêm các bài toán "vệ tinh"của nó. Việc làm này phần nào gây được nhiều hứng thú trong học tập của các bạn, góp phần giúp các bạn đỡ lúng túng hơn trong các kì thi.

Hẳn các bạn đã từng biết bài toán (BT) quen thuộc sau đây.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC.

Đặt $T=\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$, chứng minh rằng:

1.a) $T<2$ khi tam giác ABC tù;

$T=2$ khi tam giác ABC vuông;

$T>2$ khi tam giác ABC nhọn;

1.b) $T\le\frac{9}{4}$.

Việc chứng minh (1.a), (1.b) xin dành cho bạn đọc. Bây giờ chúng ta đi tìm mối quan hệ của nó với một số bài toán khác.

Bài toán 2. Các góc của tam giác ABC thỏa mãn

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C<2.$$

Chứng minh $\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B<1$.

(Đề thi ĐHQG Hà Nội - 1996)

Lời giải. Từ giả thiết và nhờ BT (1.a) ta thấy tam giác ABC tù. Nếu góc A hoặc B tù thì điều chứng minh là hiển nhiên, nếu góc C tù thì khi đó

$$\hat{A}+\hat{B}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\hat{B}<\frac{\pi}{2}-\hat{A}$$

$$\Rightarrow\ 0\le\operatorname{tg}B<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\operatorname{cotg}A.$$

Vậy: $\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B<\operatorname{tg}A.\operatorname{cotg}A=1$.

Bài toán 3. Các góc của tam giác ABC thỏa mãn $\cos2A+\cos2B+\cos2C\ge-1$.

Chứng minh rằng $\sin A+\sin B+\sin C\le1+\sqrt{2}$.

(Đề thi ĐHQG Hà Nội 1999)

Lời giải. Từ giả thiết :

$$-1\le\cos2A+\cos2B+\cos2C$$

$$=3-2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$$

$$\Rightarrow\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le2.$$

Sử dụng BT (1.a) ta thấy tam giác ABC không nhọn. Giả sử góc A lớn nhất, khi đó $\hat{A}\ge\frac{\pi}{2}$, lúc đó $b^2+c^2\le a^2$.

Mặt khác

$$\sin^2B+\sin^2C\ge\frac{1}{2}(\sin B+\sin C)^2\qquad(2)$$

Từ (1), (2) ta có

$\sin B+\sin C\le\sqrt{2}\sin A\Leftrightarrow\sin A+\sin B+\sin C\le(1+\sqrt{2})\sin A\le1+\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

Nhận xét. Lời giải này còn giúp các bạn nhận được lời giải cho bài toán sau đây.

Bài toán 4. Tam giác ABC có cạnh a, b, c thỏa mãn $b^2+c^2\le a^2$ và $\sin A+\sin B+\sin C=1+\sqrt{2}$. Tính các góc A, B, C.

(Đề thi ĐH Ngoại thương TP. HCM, khối A, 1998)

Kết quả là: $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=\hat{C}=45^\circ$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng:

$$(\sin A)^{2\sin B}+(\sin B)^{2\sin C}+(\sin C)^{2\sin A}>2.$$

Bất đẳng thức trên còn đúng nữa không khi tam giác ABC là tam giác vuông?

(Đề thi ĐHSP Hà Nội II, khối A - 1999)

Có lẽ các bạn cảm thấy khó khăn khi gặp phải dạng toán này? Song thực chất chỉ cần so sánh các số mũ này với 2. Tức là $2\sin B<2$, $2\sin C<2$, $2\sin A<2$ vì ở đây tam giác ABC nhọn.

Như vậy $(\sin A)^{2\sin B}>\sin^2A$; $(\sin B)^{2\sin C}>\sin^2B$ và $(\sin C)^{2\sin A}>\sin^2C$. Cộng các BĐT này theo vế và sử dụng BT (1.a) chúng ta nhận được điều phải chứng minh.

Bây giờ giả sử tam giác ABC vuông tại C. Khi đó

$(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A}$

$= (\sin A)^{2\sin B} + \sin^2 B + 1$

$> \sin^2 A + \sin^2 B + 1 = \sin^2 A + \cos^2 A + 1 = 2.$

Nghĩa là BĐT trên vẫn đúng khi tam giác ABC vuông.

Bài toán 6. Tam giác ABC có hai góc nhọn A, B và thỏa mãn $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt{\sin C}$. Tính số đo góc C.

Lời giải. Vì $\sin C \in (0; 1]$ nên

$\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt{\sin C} \geq \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$.

Suy ra $\hat{C} \leq \frac{\pi}{2}$. Mặt khác, giả thiết cho các góc A, B nhọn. Vì vậy tam giác ABC là tam giác không có góc tù.

Từ giả thiết $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt{\sin C}$ suy ra

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sqrt{\sin C} + \sin^2 C$.

Chúng ta lại tiếp tục sử dụng BT (1.a) nhận được $\sqrt{\sin C} + \sin^2 C \geq 2$. Vậy $\hat{C} = 90^0$.

Nhận xét. Các bạn để ý rằng bậc của căn thức trong bài toán 6 có thể thay đổi mà không ảnh hưởng đến kết quả.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC với độ dài các trung tuyến là m_a, m_b, m_c *và* R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Đặt $T = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$. Chứng minh rằng:

- $T > 6R^2$ khi tam giác ABC nhọn;
- $T = 6R^2$ khi tam giác ABC vuông;
- $T < 6R^2$ khi tam giác ABC tù.

Lời giải. Áp dụng công thức đường trung tuyến và định lí sin trong tam giác, ta có

$T = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

$= 3R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$.

Nhờ BT (1.a) ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$.

Lời giải. Sử dụng BĐT Bunhiacovski, công thức đường trung tuyến, định lí sin trong tam giác và BT (1.b) ta có

$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) =$

$= \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

$= 9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq \frac{81R^2}{4}$

$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Các bạn để ý rằng khi đánh giá vế trái của BT 8 qua BĐT Cauchy ta nhận được:

Bài toán 9. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$m_a m_b m_c \leq \frac{27R^3}{8}.$$

(Đề thi ĐH Ngoại Thương, khối A - 1996)

Bài toán 10. Cho tam giác ABC. Đặt

$$M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của M.

(Đề thi ĐH Thủy Lợi Hà Nội - 1998)

Lời giải. $M = \dfrac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} - 1$

$= \dfrac{3}{3 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} - 1.$

Chúng ta thấy rằng M đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ đạt giá trị lớn nhất.

Nhờ BT (1.b) có có $M \leq 3$.

Vậy Max(M) = 3 đạt được khi tam giác ABC đều.

Xin gửi đến các bạn một số bài toán kiểu như (1. a), (1.b) để các bạn tìm hiểu.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có

1) $\cot g A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{ABC}}$.

2) $a = r\left(\cot g \dfrac{B}{2} + \cot g \dfrac{C}{2}\right)$.

3) $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

4) $S_{ABC} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9} p^2$ (p là nửa chu vi ΔABC).

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN

VŨ TIẾN VIỆT
(GV Toán - Tin học, Học viện An ninh Hà Nội)

Chứng minh các bất đẳng thức (BĐT) luôn là những bài toán hấp dẫn. Với bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn một số bất đẳng thức (thậm chí có bài toán thi vô địch Quốc tế) được chứng minh nhờ một bất đẳng thức đơn giản của kiến thức bậc Trung học cơ sở.

Bài toán xuất phát. *Cho a, b là hai số bất kì và x, y là hai số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y} \qquad (*)$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\geq(a+b)^2xy$$

$$\Leftrightarrow\quad a^2y^2+b^2x^2\geq 2abxy$$

$$\Leftrightarrow\quad (ay-bx)^2\geq 0.$$

BĐT sau cùng hiển nhiên đúng. Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Sử dụng BĐT (*) hai lần ta nhận được

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \qquad (**)$$

với ba số bất kì a, b, c và ba số dương x, y, z.. Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Bài toán 1. *Cho hai số a, b bất kì. Chứng minh rằng* $a^4+b^4\geq\frac{(a+b)^4}{8}$.

Chứng minh. Sử dụng BĐT (*) hai lần ta có

$$a^4+b^4=\frac{a^4}{1}+\frac{b^4}{1}\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}\right)^2$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)^2}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^4}{8}.$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 2. *Cho các số dương x, y, z thỏa mãn* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq 1.$$

(Câu V trong đề thi khối *A* vào Đại học năm 2005).

Chứng minh. Sử dụng BĐT (*) hai lần ta có

$$\frac{1}{2x+y+z}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}{2x+y+z}\leq\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x+y}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x+z}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^2}{x+y}+\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^2}{x+z}$$

$$\leq\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{y}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{x}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{z}=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{x+2y+z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

$$\frac{1}{x+y+2z}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right).$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên và chú ý tới giả thiết dẫn đến

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1.$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{4}$.

Bài toán 3. *Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

(Bất đẳng thức Nasơbit)

Chứng minh. Sử dụng BĐT (**) ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Vì thế ta chỉ cần chứng minh BĐT

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2}.$$

Nhưng BĐT này tương đương với

$2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ (luôn đúng).

Từ đó suy ra BĐT cần chứng minh. Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 4. *Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

(Vô địch Quốc tế năm 1995 tổ chức tại Canađa).

Chứng minh. Sử dụng BĐT (**) với lưu ý rằng $a^2b^2c^2=1$ ta có

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$=\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}$$

$$\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Vì thế ta cần chứng minh $ab+bc+ca\geq 3$, nhưng BĐT này được suy ra từ BĐT Cauchy và lưu ý rằng $abc=1$.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 5. *Cho các số dương a, b, c, p, q. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{pb+qc}+\frac{b}{pc+qa}+\frac{c}{pa+qb}\geq\frac{3}{p+q}.$$

(Với $p=q=1$ ta trở về bài toán 3).

Chứng minh. Sử dụng BĐT (**) ta có

$$\frac{a}{pb+qc}+\frac{b}{pc+qa}+\frac{c}{pa+qb}$$

$$=\frac{a^2}{pba+qca}+\frac{b^2}{pcb+qab}+\frac{c^2}{pac+qbc}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{(p+q)(ab+bc+ca)}.$$

Vì thế ta chỉ cần chứng minh $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq 3$ và BĐT này đã được chứng minh trong lời giải bài toán 3.

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 6. *Cho ba số dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\geq\frac{9}{x+y+z}.$$

Chứng minh. Sử dụng BĐT (**) ta có

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}=\frac{(\sqrt{2})^2}{x+y}+\frac{(\sqrt{2})^2}{y+z}+\frac{(\sqrt{2})^2}{z+x}$$

$$\geq\frac{(3\sqrt{2})^2}{2(x+y+z)}=\frac{9}{x+y+z}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Để kết thúc, xin mời các bạn tự giải các bài toán sau đây.

1. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq a+b+c.$$

2. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

a) $\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{1}{2}$;

b) $\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geq\frac{3}{4}$.

3. Cho các số dương a, b, c, d, e. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\geq\frac{5}{2}$.

4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn

$$3(ab+bc+ca)=1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c}.$$

NĂM LỜI GIẢI HAY CHO MỘT BÀI TOÁN ĐẸP

TRẦN NAM DŨNG
(ĐHKHTN, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

LTS. *Cùng đi tới đích có nhiều con đường khác nhau. Giải một bài toán bằng nhiều cách không phải là mục đích của người làm toán. Tuy nhiên lướt qua các con đường ấy ta tìm được những cách tối ưu. Đó cũng là một phẩm chất có được từ việc học toán. Tòa soạn THTT mở thêm chuyên mục* ***Nhiều cách giải cho một bài toán.*** *Chúng tôi mong muốn nhận được nhiều cách giải hay, phát triển theo nhiều tuyến kiến thức khác nhau và sử dụng những công thức khác nhau chứ không phải chỉ thay đổi chút ít để kể được nhiều cách. Mong được các bạn hưởng ứng viết bài và tìm đọc chuyên mục mới. Sau đây xin giới thiệu một bài viết đầu tiên.*

Những bài toán đẹp thường có những lời giải hay, lời giải tự nhiên. Điều quan trọng hơn, vì tính tự nhiên của chúng, những lời giải đó sẽ không đơn thuần là một lời giải mà còn là khuôn mẫu có thể áp dụng cho những bài toán khác.

Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét một ví dụ như vậy: Một bài toán với năm lời giải khác nhau. Chúng ta sẽ không đơn thuần đưa ra năm lời giải mà còn bình luận về con đường đi đến những lời giải đó, phạm vi áp dụng của các phương pháp tương ứng. Cuối cùng, chúng ta sẽ đưa ra một số bài toán áp dụng có thể giải bằng những ý tưởng đã được áp dụng trong năm lời giải.

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng $a + b + c \le 3$.

Lời giải 1. Đây là một bất đẳng thức có điều kiện. Một trong những phương pháp xử lí những bài toán này là khử điều kiện ngay từ đầu. Coi điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ như phương trình bậc hai theo a, ta được

$$a=\frac{-bc+\sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}}{2}.$$

Một cách tự nhiên, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho căn thức trong biểu thức trên, ta có đánh giá

$$a\le\frac{-bc+\dfrac{4-b^2+4-c^2}{2}}{2}=\frac{8-(b+c)^2}{4}.$$

Từ đó $$a+b+c=\frac{8-(b+c)^2+4(b+c)}{4}$$
$$=\frac{12-(b+c-2)^2}{4}\le\frac{12}{4}=3.$$

Bình luận. Đây là một cách phá điều kiện trực tiếp.

Lời giải 2. Ta lại xử lí điều kiện theo một kiểu khác đó là hoán đổi vai trò giữa điều kiện và điều cần chứng minh. Điều kiện là một biểu thức phức tạp, còn điều cần chứng minh lại đơn giản. Nếu đảo lại, $a+b+c = 3$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + abc$ sẽ thế nào? Thử với bộ (0, 1, 2) ta có dự đoán "Nếu $a + b + c = 3$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + abc \ge 4$". (*)

Chúng ta phải trả lời hai câu hỏi:

1) Dự đoán đó có đúng không?

2) Nếu (*) đúng thì có thể suy ra bài toán ban đầu không?

Đối với việc giải bài toán ban đầu của chúng ta thì câu hỏi 2) quan trọng hơn, vì thế ta sẽ trả lời trước câu hỏi này.

<u>Mệnh đề.</u> Nếu (*) đúng thì bài toán ban đầu cũng đúng.

Thật vậy, giả sử (*) đã được chứng minh và giả sử rằng a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Ta sẽ chứng minh rằng $a + b + c \le 3$. Giả sử ngược lại rằng $a + b + c = 3k > 3$. Đặt $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$ thì $a' + b' + c' = 3$. Vì (*) đã được chứng minh nên từ đây ta suy ra $a'^2 + b'^2 + c'^2 + a'b'c' \ge 4$.

Nhưng do $k > 1$ nên từ đây, suy ra
$a^2 + b^2 + c^2 + abc > a'^2 + b'^2 + c'^2 + a'b'c' \ge 4$.
Mâu thuẫn.

Bây giờ, để giải quyết bài toán ban đầu, chỉ cần chứng minh BĐT (*). Bài này có thể giải bằng nhiều cách, ví dụ bằng phương pháp dồn biến quen thuộc.

Đặt $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4$; $t = \dfrac{b+c}{2}$.

Sau đây ta sẽ lần lượt chứng minh

i) $f(a, b, c) \ge f(a, t, t)$;

ii) $f(a, t, t) \ge 0$ với $a + 2t = 3$.

Thật vậy. Xét $f(a, b, c) - f(a, t, t) =$
$$= (b^2+c^2-2t^2) + a(bc-t^2) = \frac{(2-a)(b-c)^2}{4} \ge 0,$$

tức i) được chứng minh.

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $f(a, t, t) \geq 0$ với $a + 2t = 3$. Bằng phép thế $a = 3 - 2t$, điều này tương đương với $(t-1)^2(5-2t) \geq 0$, đúng do $2t = b+c < 3$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bình luận. Cách xử lí điều kiện bằng đảo đề giúp chúng ta đơn giản hóa điều kiện, biến thành một bài toán với điều kiện dễ sử dụng hơn. Chi tiết về phương pháp dồn biến các bạn có thể tham khảo các bài viết trong cuốn "Tài liệu bồi dưỡng giáo viên chuyên Toán", Hè 2005, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Lời giải 3. Lời giải 3, có thể nói, xuất phát từ ý tưởng dồn biến ở lời giải trên. Nhưng lần này không đổi chỗ giả thiết và kết luận nữa, mà thực hiện dồn biến ngay ở điều kiện. Cụ thể là nếu đặt $t = \dfrac{b+c}{2}$ sẽ có đánh giá:

$$4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc - 4$$
$$= a^2 + 2t^2 + at^2 + (b^2 + c^2 - 2t^2) + a(bc - t^2)$$
$$= a^2 + 2t^2 + at^2 + \frac{(2-a)(b-c)^2}{4} \geq a^2 + (2+a)t^2$$

Từ đây suy ra $t^2 \leq 2-a$ sẽ có đánh giá

$$a + b + c = a + 2t \leq a + 2\sqrt{2-a} =$$
$$= a + 2.\sqrt{1.(2-a)} \leq a+1+2-a=3.$$

Bình luận. Lời giải rất ngắn gọn và ấn tượng. Lời giải này, có thể nói, được gợi ý từ cách chứng minh của (*). Tuy nhiên, chúng ta có thể đi đến ý tưởng này một cách độc lập và có thể áp dụng với các bài toán khác. Tạm đặt tên ý tưởng là dồn biến trong điều kiện.

Lời giải 4. Từ điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ta suy ra $a, b, c \in (0; 2)$. Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số $2 - a$, $2 - b$, $2 - c$ ta có

$$27(2-a)(2-b)(2-c) \leq (2-a + 2-b + 2-c)^3$$
$$\Leftrightarrow\ 27(8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) - abc) \leq (6-a-b-c)^3$$
$$\Leftrightarrow\ 27(8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + a^2 + b^2 + c^2 - 4) \leq (6 - a - b - c)^3$$
$$\Leftrightarrow\ 27(s^2 - 4s + 4) \leq (6 - s)^3$$
$$\Leftrightarrow\ (s - 3)(s^2 + 12s + 36) \leq 0.$$

Từ đó suy ra $s \leq 3$.

Bình luận. Đây có lẽ là lời giải kém tự nhiên nhất trong các lời giải đã trình bày. Tuy nhiên, việc sử dụng các BĐT hệ quả dạng $(a-\alpha)(a-\beta) \leq 0$ với $a \in [\alpha; \beta]$, hay $(a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha) \geq 0$ với $a, b, c \geq \alpha$ ... là các thủ thuật rất hữu hiệu để đánh giá các đại lượng trung bình $s = a + b + c$, $t = ab + bc + ca$, $p = abc$ thông qua nhau.

Lời giải 5. Cũng do điều kiện $a, b, c \in (0; 2)$ đã gợi chúng ta đi đến phép thế lượng giác. Rõ ràng có thể đặt $a = 2\cos A$ và $b = 2\cos B$, với A, B là các góc nhọn. Khi đó, tính c theo a, b, ta được

$$c = \frac{-ab + \sqrt{(4-a^2)(4-b^2)}}{2}$$
$$= \frac{-4\cos A\cos B + 4\sin A\sin B}{2}$$
$$= -2\cos(A+B) = 2\cos(\pi - A - B).$$

Vậy $c = 2\cos C$ với $A + B + C = \pi$. Như thế điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ đã được số hóa thành $a = 2\cos A$, $b = 2\cos B$, $c = 2\cos C$ với $A + B + C = \pi$, $A, B, C > 0$. Yêu cầu của bài toán trở thành bất đẳng thức quen thuộc trong tam giác:

$$P = \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Đó là một lời giải ngắn gọn cho bất đẳng thức

$$P = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$\leq 2\sin\frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = \frac{3}{2} - 2\left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}.$$

Bình luận. Phương pháp lượng giác hóa để phá điều kiện giúp chúng ta đưa được nhiều bất đẳng thức đại số có điều kiện về các bất đẳng thức trong tam giác. Như vậy phương pháp này chỉ thực sự hiệu quả nếu chúng ta nắm vững các bất đẳng thức cơ bản trong tam giác. Ngoài ra, việc biết các hệ thức lượng trong tam giác như $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$, $\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C$, ... cũng là điều kiện quan trọng để "nhìn" ra các phép lượng giác hóa.

Cuối cùng, để nhìn rõ hơn tính hiệu quả của từng phương pháp, cũng như để nhìn thấy những khó khăn mà chúng ta có thể gặp phải, ta hãy xem xét hướng tổng quát sau đây.

Bài toán 2. Tìm tất cả những giá trị $k \geq 0$ sao cho với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn các điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + kabc = 3 + k$ và $a + b + c \leq 3$.

Kết quả của bài toán 2 là $k \leq \dfrac{3}{2}$. Các phương pháp nào trong các phương pháp đã trình bày giải quyết được bài toán trên đây? Tham số $k = 1$ có phải là một giá trị rất đặc biệt để có nhiều lời giải hay? Chúng tôi xin dành câu trả lời cho bạn đọc. Ngoài ra, để khám phá khả năng áp dụng của từng phương pháp, chúng tôi đưa ra các bài tập đề nghị dưới đây. Hãy giải lại các bài toán khá quen thuộc này bằng các cách tiếp cận khác nhau.

Bài tập

1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

a) $x + y + z \leq \dfrac{3}{2}$;

b) $xy + yz + zx \leq \dfrac{3}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2$;

c) $xy + yz + zx \leq \dfrac{1}{2} + 2xyz$.

2. (USAMO 2001) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ thì ta có $0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2$.

3. (IMO 2005) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz \geq 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

4. (VMO 1996) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16.$$

Chứng minh rằng

$$a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

5. (VMO 1999) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}.$$

6. (VietnamTST 2001) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c}$.

7. (VMO 2002) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng $2(a + b + c) - abc \leq 10$.

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ VÀ TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Trong các đề thi tốt nghiệp Trung học phổ thông và tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng thường có câu về tích phân. *Phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần* thường được sử dụng để tính tích phân đó. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu (có tính hướng dẫn) một số cách đổi biến số phù hợp với các hàm số dưới dấu tích phân và phương pháp tích phân từng phần để lấy tích phân một số dạng hàm số thường gặp trong các kì thi nói trên. Lưu ý rằng chúng tôi dành cho bạn đọc thực hiện các phép biến đổi hoặc tính ra đáp số khi phép toán chỉ còn đơn giản.

1. Phương pháp đổi biến số

• *Nếu hàm số dưới dấu tích phân có chứa* $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ *, ta có thể tìm cách giải theo một trong hai hướng sau*

Hướng thứ nhất. Đặt $x=\frac{a}{b}\sin t$; $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *lúc đó* $dx=\frac{a}{b}\cos t.dt$; $\sqrt{a^2-b^2x^2}=a\cos t$.

Hướng thứ hai. Đặt $t=\sqrt{a^2-b^2x^2}$.

Thí dụ 1. *(Đổi biến số theo* sin*t).*

Tính $I=\int_0^1 x^2\sqrt{4-3x^2}\,dx$

Lời giải. Đặt $x=\frac{2}{\sqrt3}\sin t$; $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$dx=\frac{2}{\sqrt3}\cos t.dt$; $\sqrt{4-3x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$;

$x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$. Lúc đó

$$I=\frac{4}{3\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}4\sin^2 t.\cos^2 t.dt=\frac{4}{3\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2t.dt$$

$$=\frac{2}{3\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 4t).dt=\frac{2}{3\sqrt3}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

• *Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng* $f(x)=\frac{1}{(a^2+b^2x^2)^n}$; $n=1, 2, \ldots$ *thì để lấy tích phân hàm* $f(x)$ *ta đặt* $x=\frac{a}{b}.\mathrm{tg}t$; $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Thí dụ 2. *(Đổi biến số theo* tg*t).*

Tính $I=\int_0^1\frac{dx}{(1+3x^2)^2}$.

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{tg}t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì

$dx=\frac{1}{\sqrt3}(1+\mathrm{tg}^2 t)dt$; $1+3x^2=1+\mathrm{tg}^2 t$.

$x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$. Ta có

$$I=\frac{1}{\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{1+\mathrm{tg}^2 t}=\frac{1}{\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t.dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t).dt=\frac{1}{2\sqrt3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

• Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $\sqrt{a.e^x+b}$, ta có thể tìm cách giải theo hướng: Đặt $t=\sqrt{ae^x+b}$.

Thí dụ 3. Tính $I=\int_{\ln 4}^{\ln 12}\sqrt{e^x-3}.dx$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{e^x-3}\Rightarrow e^x=t^2+3$;

$e^x dx=2tdt\Rightarrow dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+3}$;

$x=\ln 4\Rightarrow t=1; x=\ln 12\Rightarrow t=3$.

$$I=\int_1^3\frac{2t^2dt}{t^2+3}=2\int_1^3 dt-6\int_1^3\frac{1}{t^2+3}dt=4-6I_1$$

Tính $I_1=\int_1^3\frac{dt}{t^2+3}$.

Hướng dẫn. Đặt $t=\sqrt3\mathrm{tg}u$, $u\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Phương pháp tích phân từng phần

• *Nếu hàm số dưới dấu hàm số tích phân có dạng* $p(x).f(x)$ *trong đó* $p(x)$ *là một đa thức,* $f(x)$ *là một hàm lượng giác thì cách giải chung là đặt*

$$\begin{cases}u=p(x),\\ dv=f(x).\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=p'(x)dx\\ v=\int f(x).\,dx\end{cases}$$

Thí dụ 4. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x\cos 2x.dx$

Lời giải. $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin 3x-\sin x).dx$

Đặt $\begin{cases} u=\frac{x}{2} \\ dv=(\sin 3x-\sin x).dx \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{2} \\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x \end{cases}$

$I=\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-$

$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)dx$

$I=0+\left(\frac{1}{18}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{5}{9}.$

• *Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $p(x).f(e^x)$ trong đó $p(x)$ là một đa thức thì cách giải chung là đặt*

$\begin{cases} u=p(x), \\ dv=f(e^x).dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=p'(x)dx \\ v=\int f(e^x).dx \end{cases}$

Thí dụ 5. Tính $I=\int_0^1(2x-1).e^x.dx$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=2x-1 \\ dv=e^x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=e^x \end{cases}$

$I=(2x-1).e^x\Big|_0^1-\int_0^1 2.e^x.dx$

$=e+1-2e^x\Big|_0^1=-e+3.$

• *Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $p(x).ln(f(x))$ trong đó $p(x)$ là một đa thức hoặc là hàm số lượng giác, thì cách giải chung là*

Đặt $\begin{cases} u=\ln(f(x)), \\ dv=p(x).dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{f'(x)}{f(x)}dx \\ v=\int p(x).dx. \end{cases}$

Thí dụ 6. Tính $I=\int_0^1\frac{\ln(x+1)dx}{(x+2)^2}$

$\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ dv=\frac{dx}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x+1} \\ v=\frac{-1}{x+2} \end{cases}$

$I=-\frac{1}{x+2}.\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

$=-\frac{1}{3}\ln 2+I_1$

Với

$I_1=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int_0^1\frac{dx}{x+1}-\int_0^1\frac{dx}{x+2}=\ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_0^1$

$=\ln\frac{4}{3}.$

Để kết thúc bài báo mời các bạn thử sử dụng hai phương pháp trên để giải các bài tập sau đây.

Tính các tích phân :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x.dx}{1+\sin 2x}$; 2) $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{x.e^x}{\sqrt{e^x+1}}.dx$;

3) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$; 4) $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Giải đáp bài: ĐÃ CHUẨN CHƯA?

(*Đề đăng trên THTT số 343, tháng 1.2006*)

• Nhận xét rằng: Biểu thức ở vế trái bất đẳng thức đã cho có dạng hoán vị vòng quanh nên chỉ được xem biến bất kì nào đó là lớn nhất hoặc nhỏ nhất mà thôi. Do đó đoạn lập luận sau trong lời giải bài toán: *Giả sử* $x \geq y \geq z \geq 0$...

Ta có $$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{2}{3} \quad (1)$$

Tương tự có $$\frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2}{3} \quad (3)$$

là không chính xác! (Không thể suy ra được các BĐT (2) và (3) bằng phép tương tự vì vai trò của x, y, z trong bài là không bình đẳng).

Sau đây là một lời giải đúng của bài toán (theo bạn *Nguyễn Thị Hạnh Dung*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**). Ta có

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}$$

$$\geq \frac{2(1+x^2)}{2(1+z^2)+(1+y^2)}+\frac{2(1+y^2)}{2(1+x^2)+(1+z^2)}$$

$$+\frac{2(1+z^2)}{2(1+y^2)+(1+x^2)}=M.$$

Đặt $1+x^2=a$; $1+y^2=b$; $1+z^2=c$ (a, b, c dương).

Lúc đó $M=\frac{2a}{2c+b}+\frac{2b}{2a+c}+\frac{2c}{2b+a}$.

Đặt $N=\frac{c}{2c+b}+\frac{a}{2a+c}+\frac{b}{2b+a}$;

$P=\frac{b}{2c+b}+\frac{c}{2a+c}+\frac{a}{2b+a}$ thì $2N+P=3$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$M+N=\frac{2a+c}{2c+b}+\frac{2b+a}{2a+c}+\frac{2c+b}{2b+a} \geq 3$, suy ra

$$2M+2N \geq 6 \quad (4)$$

$2P+\frac{M}{2}=\frac{2b+a}{2c+b}+\frac{2c+b}{2a+c}+\frac{2a+c}{2b+a} \geq 3$, suy ra

$$P+\frac{M}{4} \geq \frac{3}{2} \quad (5)$$

Cộng theo vế các BĐT (4) và (5) ta có

$\frac{9M}{4}+(2N+P) \geq \frac{15}{2}$. Mà $2N+P=3$ nên $M \geq 2$.

Từ đó ta có BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Ngoài bạn Dung, hai bạn sau cũng có đáp án đúng: *Đỗ Văn Đức*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, **Hà Tây**; *Hoàng Đức Ý*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa.**

NGỌC HIỂN

LỜI GIẢI MỘT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Vận dụng bất đẳng thức để đánh giá hai vế một PT không mẫu mực đôi khi tỏ ra khá hiệu quả. Chẳng hạn đối với PT vô tỉ sau

Giải PT

$$\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-2x+2}$$
$$=\sqrt{2(x^2+9)}.$$

Lời giải. Chứng minh được với các số thực a, b, c, d tùy ý thì

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Gọi $f(x)$ là vế trái của PT đã cho, ta có

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+x^2}+\sqrt{(3-x)^2+2^2}+\sqrt{(1-x)^2+1}.$$

Áp dụng (1) ta có

$$\sqrt{(x-1)^2+x^2}+\sqrt{(3-x)^2+2^2} \geq \sqrt{2^2+(x+2)^2} \quad (2)$$

Đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $2(x-1)=x(3-x)$. Lại có

$$\sqrt{2^2+(x+2)^2}+\sqrt{(1-x)^2+1} \geq$$
$$\geq \sqrt{(3-x)^2+(x+3)^2}=\sqrt{2(x^2+9)} \quad (3)$$

Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi
$$2=(x+2)(1-x).$$

Theo dõi các kết quả trên ta thấy $f(x) \geq \sqrt{2(x^2+9)}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2(x-1)=x(3-x) \\ 2=(x+2)(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Mời các bạn cho biết ý kiến của mình! Lời giải của bạn như thế nào?

BÙI TUẤN ANH
(*GV THPT Yên Thủy A, Hòa Bình*)

Bất đẳng thức Schur VÀ ỨNG DỤNG

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

I. BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

Nếu a, b, c và t là các số thực dương bất kì thì

$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)$
$+c^t(c-a)(c-b)\geq 0$ (1)

Chứng minh.
Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$.
Khi đó

$a^t \geq b^t \Rightarrow a^t(a-b)(a-c) \geq b^t(a-b)(b-c)$
$\Rightarrow a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a) \geq 0.$

Mặt khác $c^t(c-a)(c-b)\geq 0$.

Vậy $a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+$
$+c^t(c-a)(c-b)\geq 0.$

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❒

II. HỆ QUẢ

1) Nếu $t=1$ ta có:

$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+$
$+c(c-a)(c-b)\geq 0$ (2)

BĐT (2) tương đương với các BĐT sau:

- $a^3+b^3+c^3+3abc \geq$
  $\geq a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$ (3)
- $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\leq abc$ (4)
- $4(a+b+c)(ab+bc+ca)\leq (a+b+c)^3+9abc$ (5)

III. ỨNG DỤNG

Ở phần tiếp theo chúng tôi trình bày một số áp dụng của BĐT *Schur* dưới dạng (2), (3), (4), (5) qua một số thí dụ.

Thí dụ 1. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$.
Chứng minh rằng:

$$0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$$

(Đề thi Toán Quốc tế – 1984)

Lời giải. Ta có

- $xy+yz+zx-2xyz$
  $=(x+y+z)(xy+yz+zx)-2xyz$
  $=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+xyz\geq 0$

- $xy+yz+zx-2xyz\leq \frac{7}{27}$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx)-2xyz \leq$

$\leq \frac{7}{27}(x+y+z)^3.$

$\Leftrightarrow 7(x^3+y^3+z^3)+15xyz \geq$
$\geq 6(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)$ (6)

Theo BĐT (3) ta có
$6(x^3+y^3+z^3+3xyz)$
$\geq 6(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2).$
$x^3+y^3+z^3\geq 3xyz.$

Từ đó và theo BĐT *Cauchy* suy ra (6)

Vậy BĐT (6) là đúng.

Dấu bằng ở (6) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Thí dụ 2. Giả sử a, b, c là ba số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1 \qquad (7)$$

(Đề thi Toán Quốc tế – 2000)

Lời giải. Đặt $x = a, y = 1, z=\frac{1}{b}=ac$

thì $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$.

BĐT (7) $\Leftrightarrow \frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{yzx}\le 1 \quad (8)$

Từ đó và BĐT (4) thì BĐT (8) đúng. Suy ra BĐT (7) đúng.

Dấu bằng ở (7) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 3. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca) \qquad (9)$$

(Đề thi Olympic Toán Châu Á – Thái Bình Dương – 2004)

Lời giải. BĐT (9) tương đương với

$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2+b^2+c^2) + 8$
$\ge 9(ab + bc + ca)$.

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$;
$(a^2b^2 + 1) + (b^2c^2 + 1) + (c^2a^2 + 1)$
$\ge 2(ab + bc + ca)$;

$a^2b^2c^2 + 1 + 1 \ \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge \frac{9abc}{a+b+c}$

$\ge 4(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2$ (theo BĐT (5))

$\Rightarrow a^2b^2c^2 + 2 \ge 2(ab+bc+ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy $(a^2b^2c^2 + 2) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3) +$
$+ 4(a^2 + b^2 + c^2) \ge$

$\ge 2(ab + bc + ca) + 4(ab + bc + ca)$
$+ 3(a^2 + b^2 + c^2) \ge 9(ab + bc + ca)$.

Vậy BĐT (9) đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thí dụ 4. Cho ba số thực dương a, b, c, thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.
Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge 9$.

(Đề thi Olympic Toán Ba Lan - 2005)

Lời giải. Theo BĐT (3) ta có:
$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge (a + b + c)(ab + bc + ca)$.

Ta có $(a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca) = 9$
$\Rightarrow a + b + c \ge 3$, suy ra $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge 9$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Thí dụ 5. Tìm số thực k lớn nhất sao cho với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$, ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3k \ge (k+1)(a+b+c) \qquad (10)$$

(Đề thi chọn HSG Toán Quốc gia THPT năm 2006 – Bảng B)

Lời giải. Giả sử số thực k thỏa mãn đề bài

Chọn $a = b = \frac{1}{n+1}, c = (n+1)^2 \ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Từ (10) suy ra

$$k \le \frac{n^2+2n+1+\frac{1}{(n+1)^4}-\frac{2}{n+1}}{n^2+2n+\frac{2}{n+1}-1}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1+\frac{1}{(n+1)^4}-\frac{2}{n+1}}{n^2+2n+\frac{2}{n+1}-1}=1,$

nên $k \le 1$. Với $k = 1$ BĐT (10) trở thành

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \ge 2(a+b+c) \qquad (11)$$

Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$ thì x, y, z là các số dương và $xyz = 1$.

BĐT (11) tương đương với

$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \ge 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 3)$
$\ge 2(xy + yz + zx)(x + y + z)$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)$
$\ge x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 6 \quad (12)$

Mặt khác $x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 3$.

Suy ra

$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)$
$\ge x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 6$
$\ge x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 6$

theo BĐT (3).

Vậy BĐT (12) đúng $\Rightarrow$ BĐT (11) đúng. Dấu bằng ở (11) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Như vậy giá trị lớn nhất của k là 1.

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc.

Bài 1. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

a) $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \ge a+b+c.$

b) $\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc} \le$

$\le \max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2, \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2, \left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}.$

(Đề chọn đội tuyển của Mỹ thi Toán Quốc tế - 2000)

c) $(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\ge\frac{9}{4}.$

(Đề thi Olympic Toán của Iran – 1996)

d) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge$

$\ge ab\sqrt{2a^2+2b^2}+bc\sqrt{2b^2+2c^2}+ca\sqrt{2c^2+2a^2}$.

Bài 2. Cho ba số thực a, b, c thuộc khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)}{\sin(b+c)}+\frac{\sin b\sin(b-c)\sin(b-a)}{\sin(c+a)}+\frac{\sin c\sin(c-a)\sin(c-b)}{\sin(a+b)}\ge 0.$$

(Đề chọn đội tuyển của Mỹ thi Toán Quốc tế - 2003)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

HÌNH THÀNH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD-ĐT Nghệ An)

Có rất nhiều hướng để hình thành các bất đẳng thức (BĐT) nói chung và BĐT trong hình học nói riêng. Trong bài viết này trình bày một cách hình thành một số BĐT trong tam giác từ một BĐT cơ bản trong hình học lớp 10.

Cho tam giác ABC với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gọi S là diện tích ΔABC; r và R là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác; m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C theo thứ tự. Trong hình học 10 ta đã biết: Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có $|\vec{a}|^2 \geq 0$. Giả sử M là một điểm bất kì cùng các số thực α β, γ, ta có $\left(\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right)^2 \geq 0$.

Bình phương vô hướng hai vế của

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ dẫn tới

$2\,\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2$.

Từ đó qua phép biến đổi tương đương ta đi đến bất đẳng thức sau:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2) \geq \geq a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta \qquad (*)$$

Dấu bằng trong BĐT (*) xảy ra khi và chỉ khi $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Bây giờ ta xét các vị trí đặc biệt của M và chọn các số α, β, γ thích hợp để có các bất đẳng thức khác mang bản chất hình học hơn.

I. Các bất đẳng thức liên quan đến đường trung tuyến

a) Khi M là trọng tâm tam giác ABC, ta sẽ có các BĐT liên quan đến đường trung tuyến. Lúc đó BĐT (*) trở thành:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha m_a^2+\beta m_b^2+\gamma m_c^2) \geq \frac{9}{4}(a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta) \qquad (1^*)$$

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ thay vào (1*) được:

$$am_a^2+bm_b^2+cm_c^2 \geq \frac{9}{4}abc \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) có các dạng tương đương sau:

- $\dfrac{m_a^2}{h_a}+\dfrac{m_b^2}{h_b}+\dfrac{m_c^2}{h_c} \geq \dfrac{9}{2}R$
  (do $2S = \dfrac{abc}{2R} = ah_a = bh_b = ch_c$).
- $3(a^3+b^3+c^3)+9abc$
  $\leq 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$
  (dùng công thức đường trung tuyến).

– Chọn $\alpha = p-a$, $\beta = p-b$, $\gamma = p-c$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Thay vào (1*).

Ta biến đổi $a^2(p-b)(p-c)$

$$= ap(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}\right)$$

$$= S^2\left(\frac{p}{p-a}-1-\frac{a}{p}\right) = S\left(\frac{p^2r}{p-a}-pr-ra\right).$$

Biến đổi tương tự với $b^2(p-a)(p-c)$ và $c^2(p-a)(p-b)$ rồi áp dụng hệ thức

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{4R+r}{pr}$$

(Xem THTT số 337 tháng 7.2005 trang 6 hệ thức 17, hoặc quyển *Phương trình bậc ba và các hệ thức hình học trong tam giác* của Tạ Duy Phượng, hệ thức (16) ta thu được :

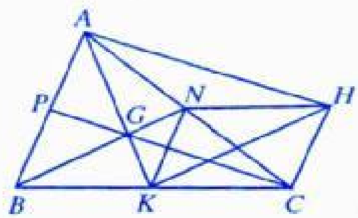
$$(p-a)m_a^2+(p-b)m_b^2+(p-c)m_c^2 \geq 9S(R-r).$$

– Chọn $\alpha = \dfrac{a}{m_a}$, $\beta = \dfrac{b}{m_b}$, $\gamma = \dfrac{c}{m_c}$ thay vào (1*) ta được

$$a.m_b.m_c + b.m_c.m_a + c.m_a.m_b \geq \frac{9}{4}abc \quad (3)$$

– Chọn $\alpha = bc$, $\beta = ca$, $\gamma = ab$, thay vào (1*) ta có

$$\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{9}{4}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca}\right) \quad (4)$$



b) Bây giờ ta gọi AK, BN, CP theo thứ tự là các đường trung tuyến của tam giác ABC; dựng hình bình hành $APCH$, dễ thấy

$AK = m_a$, $KH = m_b$, $HA = m_c$, $NH = \dfrac{a}{2}$, $NA = \dfrac{b}{2}$, $NK = \dfrac{c}{2}$ (hình vẽ).

Áp dụng bất đẳng thức (*) cho tam giác AKH với M trùng N, ta thu được:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2) \geq 4(m_a^2\beta\gamma + m_b^2\alpha\gamma + m_c^2\alpha\beta) \quad (2^*)$$

Từ BĐT này bằng cách chọn α, β, γ thích hợp ta được lớp các BĐT mới dưới đây:

– Chọn $\alpha = m_a$, $\beta = m_b$, $\gamma = m_c$ thay vào (2*) ta được:

$$a^2.m_a + b^2.m_b + c^2.m_c \geq 4m_a.m_b.m_c \quad (5)$$

– Chọn $\alpha = \dfrac{m_a}{a}$, $\beta = \dfrac{m_b}{b}$, $\gamma = \dfrac{m_c}{c}$ thay vào (2*) ta có:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \geq 4m_a.m_b.m_c \quad (6)$$

– Chọn $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$ thay vào (2*) sau khi biến đổi ta thu được:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)} \quad (7)$$

Áp dụng BĐT Ptolémée cho các tứ giác $GNAP$, $GKCN$, $GPBK$ và biến đổi ta được:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \geq a^2.m_a + b^2.m_b + c^2.m_c \quad (8)$$

Kết hợp (5), (7) và (8) ta được dãy BĐT kép sau:

$$4m_a.m_b.m_c \leq bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)} \quad (9)$$

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ thay vào (2*), sau khi kết hợp với (4) ta có tiếp:

$$\frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{4abc} \geq \frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{9(a^3+b^3+c^3)}{4(ab+bc+ca)} \quad (10)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có

$$\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{(m_a+m_b+m_c)^2}{a+b+c}.$$

Từ đây kết hợp với (10) suy ra

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{a+b+c}{2}\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}} \quad (11)$$

– Chọn $\alpha = b^2c^2$, $\beta = c^2a^2$, $\gamma = b^2a^2$ thay vào (2*), sau đó sử dụng BĐT

$3[(a.m_a)^2 + (b.m_b)^2 + (c.m_c)^2] \geq$
$\geq (a.m_a + b.m_b + c.m_c)^2$, ta được:

$$a.m_a + b.m_b + c.m_c \leq \frac{3}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \quad (12)$$

c) Gọi L là *điểm Lemoine* của tam giác ABC nghĩa là giao điểm của ba đường thẳng đối xứng với ba trung tuyến qua ba đường phân giác trong tương ứng theo từng đỉnh của ΔABC. Khi đó dễ thấy :

$$LA = \frac{2m_a bc}{a^2+b^2+c^2}, \quad LB = \frac{2m_b ac}{a^2+b^2+c^2}, \quad LC = \frac{2m_c ba}{a^2+b^2+c^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) cho tam giác ABC với M trùng L ta được :

$$4(\alpha+\beta+\gamma)[\alpha(bcm_a)^2 + \beta(acm_b)^2 + \gamma(abm_c)^2] \geq (a^2+b^2+c^2)^2(a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta) \quad (3^*)$$

Trong BĐT này ta cũng chọn các bộ số α, β, γ thích hợp để được các BĐT mới.

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, thay vào (3*) ta được BĐT:

$$4(bcm_a^2 + acm_b^2 + abm_c^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2 \quad (13)$$

BĐT này còn được viết ở dạng sau:

$ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 \geq$
$\geq a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b).$

Kết hợp các BĐT (10) và (13), ta có

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq 4(bcm_a^2 + acm_b^2 + abm_c^2)^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^2 \quad (14)$$

– Chọn $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thay vào (3*) ta được:

$$(bc.m_a)^2 + (ca.m_b)^2 + (ab.m_c)^2 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{12} \quad (15)$$

– Chọn $\alpha = a^3$, $\beta = b^3$, $\gamma = c^3$ thay vào (3*)

$$a.m_a^2 + b.m_b^2 + c.m_c^2 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2(ab+bc+ca)}{4(a^3+b^3+c^3)} \quad (16)$$

Qua các kết quả trên ta thấy rằng để thu được các BĐT đẹp ta cần có sự lựa chọn bộ số α, β, γ thích hợp. Đồng thời sự chuyển hoá vị trí của M như đã xét ở các phần (b) và (c) cũng đưa tới các BĐT đẹp khác. Ta cần chú ý rằng, nếu điểm M thoả mãn $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, thì không nên chọn các số α, β, γ tỉ lệ với x, y, z vì lúc đó xảy ra dấu đẳng thức.

(Kì sau đăng tiếp)

HÌNH THÀNH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

(Tiếp theo kì trước)

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD-ĐT Nghệ An)

II. Các bất đẳng thức liên quan đến đường tròn ngoại tiếp

Khi cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. BĐT (*) trở thành

$$R^2(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta \qquad (4^*)$$

Đến đây bằng một số phép biến đổi, ta có một số trường hợp đặc biệt của nó.

– Chọn $\alpha = \beta = \gamma$ thay vào (4*) được $R^2 \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$;

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ thay vào (4*) được $R \geq 2r$;

– Chọn $\alpha = \beta = -\gamma$ thay vào (4*) được $R^2 + a^2 + b^2 \geq c^2$;

– Chọn $\alpha = bc$, $\beta = ca$, $\gamma = ab$ thay vào (4*) ta được

$$(ab+bc+ca)\sqrt{\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}} \geq 4S \qquad (17)$$

– Chọn $\alpha = b+c$, $\beta = c+a$, $\gamma = a+b$, thay vào (4*) và biến đổi ta được

$$8R(R-2r) \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \quad (18)$$

Để ý rằng $a = 2R.\sin A$, $b = 2R.\sin B$, $c = 2R.\sin C$ thì BĐT (4*) có dạng

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 4(\beta\gamma.\sin^2 A + \alpha\gamma.\sin^2 B + \alpha\beta.\sin^2 C) (5^*)$$

BĐT này gợi cho ta nhiều liên tưởng tới tính lượng giác của nó.

– Chọn $\alpha = c$, $\beta = a$, $\gamma = b$ thay vào (5*) có

$$p^2 \geq ab.\sin^2 A + bc.\sin^2 B + ca.\sin^2 C \qquad (19)$$

– Chọn $\alpha = \cos A$, $\beta = \cos B$, $\gamma = \cos C$ thay vào (5*) với chú ý $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$, ta được BĐT

$$(R+r)^2 \geq a^2.\cos B.\cos C + b^2.\cos C.\cos A + c^2.\cos A.\cos B \qquad (20)$$

III. Các bất đẳng thức về đường tròn nội tiếp

Áp dụng BĐT (*) cho trường hợp M trùng với tâm T đường tròn nội tiếp tam giác ABC được

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha TA^2 + \beta TB^2 + \gamma TC^2) \geq a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta. \qquad (6^*)$$

Từ BĐT này ta chọn các bộ số (α, β, γ) thích hợp sẽ đi tới các BĐT mới.

– Chọn $\alpha = \beta = \gamma$ thay vào (6*) được BĐT

$$TA^2 + TB^2 + TC^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \qquad (21)$$

– Chọn $\alpha = \dfrac{a}{TA}$, $\beta = \dfrac{b}{TB}$, $\gamma = \dfrac{c}{TC}$ thay vào (6*) và biến đổi ta được

$$a.\sin\frac{A}{2} + b.\sin\frac{B}{2} + c.\sin\frac{C}{2} \geq p \qquad (22)$$

– Chọn $\alpha = p-a$, $\beta = p-b$, $\gamma = p-c$ thay vào (6*) ta được

$$\frac{TA^2}{r_a} + \frac{TB^2}{r_b} + \frac{TC^2}{r_c} \geq 8(R-r)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r_a^3} + \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} \geq \frac{8R-9r}{S^2} \qquad (23)$$

– Chọn $\alpha = \sin\dfrac{A}{2}$, $\beta = \sin\dfrac{B}{2}$, $\gamma = \sin\dfrac{C}{2}$ thay vào (6*). Sau khi biến đổi ta có tiếp

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq \frac{1}{r}\left(a.\cos\frac{A}{2}+b.\cos\frac{B}{2}+c.\cos\frac{C}{2}\right) \qquad (24)$$

Như vậy mới chỉ qua năm trường hợp đặc biệt của điểm M mà ta đã đề xuất được 24 BĐT.

Dưới đây chúng tôi đưa ra một số BĐT khác có được bằng cách làm như trên, bạn đọc tự giải xem như bài tập.

Bài 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq 6r^2 + 24Rr - p^2$$

trong đó r_a, r_b, r_c là các bán kính đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C của tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC và một điểm P tùy ý trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh BC, CA và AB theo thứ tự. Đặt $PA = d_1$, $PB = d_2$, $PC = d_3$, $PA_1 = r_1$, $PB_1 = r_2$, $PC_1 = r_3$. Chứng minh rằng:

a) $3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \geq d_1^2.\sin^2 A + d_2^2.\sin^2 B + d_3^2.\sin^2 C$;

b) $(a^2+b^2+c^2)(S_a^2 + S_b^2 + S_c^2) \geq S^2(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2)$;

c) $\sqrt{IA^2 + IB^2 + IC^2} \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.

Ở đây I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. S, S_a, S_b, S_c là diện tích các tam giác ABC, PBC, PCA và PAB tương ứng.

Bài 3. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha MB^2.MC^2 + \beta MC^2.MA^2 + \gamma MA^2.MB^2) \geq a^2.MA^2.\beta\gamma + b^2.MB^2.\alpha\gamma + c^2.MC^2.\alpha\beta,$$

với α, β, γ là các số thực tùy ý.

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Sử dụng số vô tỉ ĐỂ GIẢI TOÁN

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Các bạn học sinh THCS được làm quen với số vô tỉ từ lớp 7, nhưng sử dụng số vô tỉ để giải toán lại là một công việc còn mới mẻ bởi các em rất ít được làm các bài toán dạng này. Với kiến thức về số vô tỉ ở THCS, ta có thể giải được một số bài toán hay, khó với lời giải ngắn gọn, đẹp.

Trước hết ta cần nhớ chú ý quan trọng sau: *Với a là số nguyên dương không chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.*

Sau đây là một số bài toán ứng dụng.

Bài toán 1. *Cho a, b, c, m, n là các số hữu tỉ và $a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $x = m + n\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) thì $x = m - n\sqrt{2}$ cũng là nghiệm của phương trình đó.*

Lời giải

Do $x = m + n\sqrt{2}$ là nghiệm của (1) nên

$$a(m+n\sqrt{2})^2 + b(m+n\sqrt{2}) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (am^2 + 2an^2 + bm + c) + (2amn + bn)\sqrt{2} = 0 \quad (1')$$

Nếu $2amn + bn \neq 0$ thì từ (1') suy ra

$\sqrt{2} = -\dfrac{am^2 + 2an^2 + bm + c}{2amn + bn}$. Khi đó vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ. Điều này vô lí.

Vậy $2amn + bn = 0$. Từ (1') suy ra

$$am^2 + 2an^2 + bm + c = 0.$$

Do đó

$$a(m-n\sqrt{2})^2 + b(m-n\sqrt{2}) + c$$
$$= (am^2 + 2an^2 + bm + c) - (2amn + bn)\sqrt{2}$$
$$= 0 - 0 = 0.$$

Vậy $x = m - n\sqrt{2}$ cũng là nghiệm của phương trình (1). □

Bài toán 2. *Tìm các số hữu tỉ x, y thỏa mãn*

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}} \quad (2)$$

Lời giải

Do $\sqrt{2\sqrt{3}-3} > 0$ nên $x > y \geq 0$. Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{3} - 3 = x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3xy}$$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)\sqrt{3} = 2\sqrt{3xy} - 3 \quad (2')$$

$$\Rightarrow (x+y-2)^2.3 = 12xy - 12\sqrt{3xy} + 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{3xy} = \frac{-(x+y-2)^2 + 4xy + 3}{4} \in \mathbb{Q}.$$

Nếu $x + y - 2 \neq 0$ thì từ (2') suy ra $\sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{3xy}-3}{x+y-2}$.

Khi đó vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ. Điều này vô lí.

Vậy $x + y - 2 = 0$.

Từ (2') suy ra

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2\sqrt{3xy}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

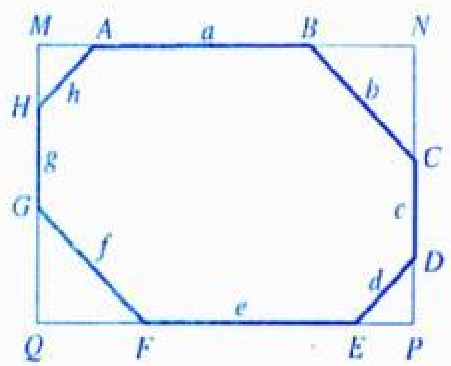
Do $x > y \geq 0$ nên suy ra

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn } x > y \geq 0).$$

Bài toán 3. *Một bát giác lồi có các góc bằng nhau, độ dài các cạnh là những số nguyên dương. Chứng minh rằng các cạnh đối của bát giác đó bằng nhau.*

Lời giải

Gọi bát giác đã cho là $ABCDEFGH$. Đường thẳng AB lần lượt cắt các đường thẳng HG và CD tại M, N. Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng HG và CD tại Q, P (hình vẽ).



Do các góc của bát giác bằng nhau nên mỗi góc trong của nó là

$$\frac{(8-2).180^0}{8}=135^0.$$

Từ đó suy ra mỗi góc ngoài của bát giác là $180^0-135^0=45^0$, do đó các tam giác MAH, NBC, PDE, QGF là các tam giác vuông cân và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA theo thứ tự là a, b, c, d, e, f, g, h (với a, b, c, d, e, f, g, h là các số nguyên dương).

Suy ra $MA=MH=\dfrac{h}{\sqrt{2}}$; $NB=NC=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$;

$$PD=PE=\frac{d}{\sqrt{2}};\quad QG=QF=\frac{f}{\sqrt{2}}.$$

Ta có $MN=PQ$ nên

$$\frac{h}{\sqrt{2}}+a+\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{f}{\sqrt{2}}+e+\frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad (e-a)\sqrt{2}=h+b-f-d.$$

Nếu $e-a\neq 0$ thì

$\sqrt{2}=\dfrac{h+b-f-d}{e-a}\in\mathbb{Q}$, điều này vô lí.

Vậy $e-a=0\Leftrightarrow e=a$.

Chứng minh tương tự, ta có

$$c=g;\ b=f;\ d=h$$

Bài toán 4. *Cho hai thùng A và B đựng nước với dung tích lớn tùy ý và hai cái gáo với dung tích lần lượt là $\sqrt{2}$ lít và $2-\sqrt{2}$ lít. Hỏi có thể dùng hai cái gáo đó để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia được hay không? Vì sao?*

(Đề thi vào lớp 10, ĐHSP Hà Nội năm 1995)

Lời giải

Giả sử có thể dùng gáo I (dung tích $\sqrt{2}$ lít) và gáo II (dung tích $2-\sqrt{2}$ lít) để chuyển 1 lít nước từ thùng A sang thùng B bằng cách đong m gáo I và n gáo II ($m, n\in N^*$) với quy ước: *$m>0$ nếu đong từ thùng A sang thùng B, $m<0$ nếu đong từ thùng B sang thùng A; tương tự với n.*

Ta có

$$m\sqrt{2}+n(2-\sqrt{2})=1\Leftrightarrow (n-m)\sqrt{2}=2n-1.$$

Nếu $m\neq n$ thì $\sqrt{2}=\dfrac{2n-1}{n-m}\in\mathbb{Q}$ (vô lí).

Nếu $m=n$ thì $m=n=\dfrac{1}{2}$. Điều này mâu thuẫn, vì $m, n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy không thể dùng hai cái gáo với dung tích là $\sqrt{2}$ lít và $2-\sqrt{2}$ lít để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia.

Mời các bạn hãy làm các bài toán sau đây.

Bài 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{11x}{5}-\sqrt{2x+1}=3y-\sqrt{4y-1}+2.$$

Bài 2. Chứng minh rằng số $99999+111111\sqrt{3}$ không thể biểu diễn được dưới dạng $(A+B\sqrt{3})^2$ với A, B là hai số nguyên.

Bài 3. Chứng minh rằng số $\{10^n.\sqrt{2}\}$ với $n=0; 1; 2; 3; \ldots$ từng đôi một khác nhau (kí hiệu $\{a\}$ chỉ phần thập phân của số thực a).

PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN

Ứng dụng của HAI BẤT ĐẲNG THỨC

TRẦN TUẤN ANH
(GV Khoa Toán - Tin học
ĐHKHTN, - ĐHQG TP. HCM)

Trong bài viết này, chúng ta xem xét việc sử dụng hai bất đẳng thức (BĐT) sau để chứng minh một số bài toán về bất đẳng thức:

(i) $(1+z)^{\alpha} \le 1+\alpha z$ với $z>-1$ và $\alpha \in [0;1]$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha=0$ hoặc $\alpha=1$ (bất đẳng thức Bernoulli).

(ii) $(1+z)^{\alpha} \le 1+z^{\alpha}$ với $z>0$ và $\alpha \le 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha=1$.

***Chứng minh* (ii)**

Do $1>\dfrac{1}{1+z}>0$, $1>\dfrac{z}{1+z}>0$ và $\alpha \le 1$ nên

$\left(\dfrac{1}{1+z}\right)^{\alpha} \ge \dfrac{1}{1+z}$ và $\left(\dfrac{z}{1+z}\right)^{\alpha} \ge \dfrac{z}{1+z}$.

Cộng theo vế hai BĐT trên ta được

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^{\alpha}+\left(\frac{z}{1+z}\right)^{\alpha} \ge \frac{1}{1+z}+\frac{z}{1+z}=1.$$

Từ đó suy ra $1+z^{\alpha} \ge (1+z)^{\alpha}$. □

Nhận xét

1) Trong BĐT (ii) cho $z=\dfrac{x}{y}$ (với x, y là số thực dương) ta nhận được các BĐT (ii) cho hai số thực dương x, y như sau:

$$(x+y)^{\alpha} \le x^{\alpha}+y^{\alpha} \quad \text{với } \alpha \le 1.$$

2) Bằng phương pháp quy nạp hoặc phương pháp như trên ta chứng minh được BĐT (ii) cho $(m \ge 2)$ số thực dương $x_1, x_2, ..., x_m$:

$$(x_1+x_2+...+x_m)^{\alpha} \le x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+...+x_m^{\alpha} \quad \text{với } \alpha \le 1.$$

Bây giờ chúng ta vận dụng chúng để giải quyết các bài toán sau đây.

Bài 1. *Cho a là một số thực nằm trong đoạn $[0;1]$. Chứng minh rằng $1+a \ge 2^a \ge 1+a^2$.*

Chứng minh. Do $a \in [0;1]$ nên áp dụng bất đẳng thức (i) ta có

$$2^a=(1+1)^a \le 1+a.1=1+a \qquad (1)$$

Mặt khác, do $1-a \in [0;1]$ nên theo bất đẳng thức (1) ta có

$$2^{1-a} \le 1+(1-a)=2-a.$$

Từ đó suy ra $\quad 2^a \ge \dfrac{2}{2-a} \qquad (2)$

Bây giờ ta chứng minh $\dfrac{2}{2-a} \ge 1+a^2 \qquad (3)$

Thật vậy, dễ thấy BĐT (3) tương đương với BĐT đúng $a(a-1)^2 \ge 0$.

Từ đó, kết hợp hai BĐT (2) và (3) ta có $2^a \ge 1+a^2$. □

Nhận xét. Sử dụng BĐT $2^a \ge 1+a^2$ với $a \in [0;1]$ ta sẽ giải được các bài toán sau đây.

1) Cho $a_1, a_2, ..., a_m$ $(m \ge 1)$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1^2+a_2^2+...+a_m^2=1$. Chứng minh rằng $2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_m} \ge m+1$.

2) Cho $x_1, x_2, ..., x_m$ $(m \ge 1)$ là các số thực. Chứng minh rằng

$2^{|\cos x_1|}+2^{|\sin x_1\cos x_2|}+\ldots+2^{|\sin x_1\sin x_2\ldots\sin x_{m-1}\cos x_m|}$
$+2^{|\sin x_1\sin x_2\ldots\sin x_{m-1}\sin x_m|}\geq m+1.$

Hướng dẫn. Tổng bình phương các số mũ ở vế trái bằng 1.

Bài 2. *Cho a, b là các số thực dương nằm trong khoảng $(0;1)$. Chứng minh rằng*

1) $a^a>\frac{1}{2}$; 2) $a^b+b^a>1$.

Chứng minh

1) Do $a>\frac{a}{a+1}>0$ nên

$$a^a>\left(\frac{a}{a+1}\right)^a=\frac{1}{\left(\frac{a+1}{a}\right)^a}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^a} \quad (4)$$

Vì $a\in(0;1)$ nên áp dụng BĐT (i) ta có

$$0<\left(1+\frac{1}{a}\right)^a\leq 1+a.\frac{1}{a}=2.$$

Kết hợp BĐT này và BĐT (4) ta nhận được BĐT cần chứng minh.

2) Do $a>\frac{a}{a+1}>0$ và $b>\frac{b}{b+1}>0$ nên

$$a^b+b^a>\left(\frac{a}{a+1}\right)^b+\left(\frac{b}{b+1}\right)^a=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^b}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{b}\right)^a} \quad (5)$$

Vì a, $b\in(0;1)$ nên áp dụng BĐT (i) ta có

$$0<\left(1+\frac{1}{a}\right)^b\leq 1+b.\frac{1}{a}=\frac{a+b}{a},$$
$$0<\left(1+\frac{1}{b}\right)^a\leq 1+a.\frac{1}{b}=\frac{a+b}{b}.$$

Kết hợp hai BĐT trên và BĐT (5) ta được

$$a^b+b^a>\frac{1}{\frac{a+b}{a}}+\frac{1}{\frac{a+b}{b}}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1.$$

Nhận xét. Bằng phương pháp trên ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau: Cho a_1, a_2, ..., a_m $(m\geq 2)$ là các số thực dương có tổng bằng S. Chứng minh rằng

$$(S-a_1)^{a_1}+(S-a_2)^{a_2}+\ldots+(S-a_m)^{a_m}>m-1.$$

Hướng dẫn. Nếu tồn tại một chỉ số k $(1\leq k\leq m)$ sao cho $a_k\geq 1$ thì với mọi $i\neq k$ và $1\leq i\leq m$ ta có $S-a_i>a_k\geq 1$. Suy ra $(S-a_i)^{a_i}>1$. Từ đó có được BĐT cần chứng minh.

Trong trường hợp tất cả các số a_i $(1\leq i\leq m)$ đều nằm trong khoảng $(0;1)$ thì ta giải tương tự như trong câu 2) của bài toán này.

Bài 3. *Cho a_1, a_2, ..., a_m $(m\geq 2)$ là các số thực dương và α, β là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $\alpha\geq\beta$. Chứng minh rằng*

$$(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_m^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\leq(a_1^\beta+a_2^\beta+\ldots+a_m^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Chứng minh. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_m^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}\leq a_1^\beta+a_2^\beta+\ldots+a_m^\beta.$$

Hay $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^{\frac{\beta}{\alpha}}\leq x_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+x_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\ldots+x_m^{\frac{\beta}{\alpha}}$ với $x_i=a_i^\alpha>0$, $i=\overline{1,m}$.

Do $\alpha\geq\beta>0$ nên $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1$. Lúc đó áp dụng BĐT (ii) cho các số thực dương x_1, x_2, ..., x_m và $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1$ ta nhận được BĐT cần chứng minh.

Bài 4. *Cho a, b, c là các số thực dương và n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng* $\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}>2$.

Chứng minh. Vì $0<\frac{2}{n}\leq 1$ nên áp dụng BĐT (ii) ta có $0<(b+c)^{\frac{2}{n}}\leq b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}$.

Kết hợp BĐT trên và BĐT Cauchy cho hai số dương có

$$0<\sqrt[n]{a(b+c)}\leq\frac{a^{\frac{2}{n}}+(b+c)^{\frac{2}{n}}}{2}\leq\frac{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}{2}.$$

Từ đó suy ra $\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}=\frac{a^{\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{a(b+c)}}$

$$\geq\frac{a^{\frac{2}{n}}}{\frac{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}{2}}=\frac{2a^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=2$ và $a=b+c$.

Tương tự: $\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}\geq\frac{2b^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}$

và $\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2c^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}$.

Cộng theo vế ba BĐT trên nhận được

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2a^{\frac{2}{n}}+2b^{\frac{2}{n}}+2c^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=2$ và $a=b+c$, $b=c+a$, $c=a+b$.

Điều này không thể có vì a, b, c là các số thực dương. Từ đó suy ra đpcm.

Nhận xét: Bất đẳng thức trên đã được chứng minh trong THTT số 341, tháng 11/2005 khi $n=3$, nhưng phương pháp chứng minh trong đó khó mở rộng cho trường hợp n là một số nguyên dương lớn hơn 1 bất kì. Tuy nhiên, với việc sử dụng ý tưởng trong bài viết đó cùng với BĐT (ii) chúng ta có một chứng minh khá gọn trong trường hợp $n\geq 1$ nguyên dương tùy ý. Ngoài ra, cũng bằng cách sử dụng BĐT (ii) cho nhiều số chúng ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau:

Cho a_1, a_2, ..., a_m $(m\geq 3)$ là các số thực dương có tổng bằng S và n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{S-a_1}}+\sqrt[n]{\frac{a_2}{S-a_2}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{a_m}{S-a_m}}>2.$$

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

KHAI THÁC SÂU THÊM MỘT BÀI TOÁN Bất đẳng thức

PHẠM KIM HÙNG
(SV K9, hệ CNTN ngành Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Trong tạp chí Toán học và Tuổi trẻ 4–2006 có bài toán bất đẳng thức T10/346 như sau.

✪ **Bài toán 1.** *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1 ta luôn có*

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq 8(a^2+b^2+c^2) \qquad (1)$$

Đây không phải là một bài toán bất đẳng thức khó và thực tế đã có rất nhiều lời giải của các bạn gửi đến tòa soạn. Tuy nhiên, bất đẳng thức trên khá đẹp mắt và tại sao chúng ta lại không thử tìm hiểu sâu hơn về nó?

Có hai hướng tổng quát hóa bất đẳng thức này là xét nhiều số hoặc nâng bậc các số hạng. Ý tưởng chính của tác giả khi đặt ra bài toán là dựa vào nhận xét sau đây.

Bổ đề. *Với hai số thực a, b không âm sao cho* $a + b \leq 2$ *ta luôn có* $ab(a + b) \geq a^2b^2(a^2 + b^2)$. Kiểm tra điều này dựa vào định lí dấu tam thức bậc hai bằng cách đặt $t = ab$, và để ý rằng $a + b \leq 2$. Từ đó ta có thể mở rộng bài toán 1 cho n số không âm.

✪ **Bài toán 2.** *Chứng minh rằng với các số thực không âm* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *có tổng bằng 1, ta luôn có*

$$\frac{\sum\limits_{i=1(i\neq j)}^{n} a_i a_j}{\sum\limits_{i=1(i\neq j)}^{n} a_i^2 a_j^2} \geq 8\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \qquad (2)$$

Lời giải bài toán 2 tương tự như lời giải bài T10/346 đăng trong số báo này.

Chúng ta sẽ quan tâm nhiều hơn đến bài toán mở rộng với $n = 3$. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là, liệu bất đẳng thức tương tự sau còn đúng hay không nếu a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1.

$$\frac{ab+bc+ca}{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3} \geq 8^2(a^3+b^3+c^3) \ ?$$

Nhưng rất tiếc câu trả lời lại là phủ định. Câu trả lời sẽ được chứng minh ở phần cuối của bài viết bằng một bất đẳng thức thay thế rất thú vị. Như vậy 2 là hằng số tự nhiên tốt nhất để bất đẳng thức dạng ban đầu đúng (theo nghĩa là có đẳng thức khi $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$ hoặc các hoán vị). Một câu hỏi nữa là liệu có thể cộng thêm dưới mẫu $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ ở vế trái của (1) một đại lượng $kabc$ với k lớn nhất là bao nhiêu để bất đẳng thức (1) còn đúng? Câu trả lời là $k = 2$ và bạn đọc hãy tự chứng minh kết quả này. Sau đây là một mở rộng khác rất thú vị.

✪ **Bài toán 3.** *Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1, ta luôn có*

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2+16abc} \geq 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \quad (3)$$

Ngoài ra hãy chứng minh 16 là hằng số tốt nhất, theo nghĩa nếu thay bằng một số lớn hơn thì bất đẳng thức không còn đúng nữa.

Lời giải. Có thể coi đây là một bất đẳng thức khá khó và chặt, vì nó có liên quan đến hằng số tốt nhất. Để chứng minh bất đẳng thức trên, ta phải sử dụng các đa thức đối xứng. Đặt $x = 4(ab + bc + ca)$, $y = 8abc$, khi đó

Xây dựng CÁC BẤT ĐẲNG THỨC từ các hằng đẳng thức

MẠC ĐĂNG NGHỊ
(GV THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương)

Qua bài viết này chúng tôi muốn cung cấp cho bạn đọc một kĩ thuật "nho nhỏ" để thiết lập các bất đẳng thức từ các hằng đẳng thức.

✪ **Bổ đề 1.** *Chứng minh rằng*

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2) \quad \text{(I)}$$

với a, b là hai số thực tùy ý.

Chứng minh. Thật vậy

$$\begin{aligned} &(a+b)^4 + (a-b)^4 \\ =\ & [(a+b)^2 + (a-b)^2]^2 - 2(a+b)^2(a-b)^2 \\ =\ & (2a^2 + 2b^2)^2 - 2(a^2 - b^2)^2 \\ =\ & 4(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) \\ =\ & 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2). \ \square \end{aligned}$$

Áp dụng hằng đẳng thức (I) với ba số thực x, y, z tùy ý, ta có

$$\begin{aligned} &(x+y+z)^4 + (x+y-z)^4 \\ =\ & 2[(x+y)^4 + z^4 + 6z^2(x+y)^2] \qquad (1) \end{aligned}$$

và $(z+x-y)^4 + (z-x+y)^4$

$$= 2[(x-y)^4 + z^4 + 6z^2(x-y)^2] \qquad (2)$$

Cộng theo vế của (1) và (2)

$$\begin{aligned} &(x+y+z)^4 + (y+z-x)^4 + (z+x-y)^4 \\ &+ (x+y-z)^4 = \\ &= 2[(x+y)^4 + (x-y)^4 + 2z^4 + 6z^2(x+y)^2 \\ &\quad + 6z^2(x-y)^2] \\ &= 4(x^4 + y^4 + z^4 + 6x^2y^2 + 6y^2z^2 + 6z^2x^2). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \le x^4 + y^4 + z^4.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &(x+y+z)^4 + (y+z-x)^4 + (z+x-y)^4 + \\ &+ (x+y-z)^4 \le 28(x^4 + y^4 + z^4). \end{aligned}$$

Từ đó ta có bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned} &28(x^4 + y^4 + z^4) \\ &\ge (x+y+z)^4 + (y+z-x)^4 \\ &+ (z+x-y)^4 + (x+y-z)^4. \end{aligned}$$

với x, y, z là ba số thực tùy ý.

Từ bài toán 1 và $(x+y+z)^4 \ge 0$ dẫn đến bài toán 2 sau đây.

Bài toán 2. *Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned} &28(x^4 + y^4 + z^4) \\ &\ge (y+z-x)^4 + (z+x-y)^4 + (x+y-z)^4 \end{aligned}$$

với x, y, z là ba số thực tùy ý.

Trong bài toán 2, nếu ta đặt

$$a = \frac{y+z-x}{2},\ b = \frac{z+x-y}{2},\ c = \frac{x+y-z}{2}$$

thì ta có bài toán 3 sau đây.

Bài toán 3. *Chứng minh rằng*

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \ge \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4).$$

với ba số thực a, b, c tuỳ ý.

✪ **Bổ đề 2.** *Với hai số thực a, b tuỳ ý, chứng minh rằng*

$$\begin{aligned} &(a+b)^6 + (a-b)^6 \\ =\ & 2(a^6 + b^6 + 15a^4b^2 + 15a^2b^4) \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Chứng minh. Thật vậy

$$\begin{aligned} &(a+b)^6 + (a-b)^6 \\ =\ & [(a+b)^4 + (a-b)^4][(a+b)^2 + (a-b)^2] \\ & - (a-b)^2(a+b)^4 - (a+b)^2(a-b)^4 \\ =\ & (2a^4 + 2b^4 + 12a^2b^2)(2a^2 + 2b^2) \\ & - (a^2 - b^2)^2(2a^2 + 2b^2) \end{aligned}$$

$$= 2(a^2+b^2)(a^4+b^4+14a^2b^2)$$
$$= 2(a^6+b^6+15a^4b^2+15a^2b^4).$$

Áp dụng hằng đẳng thức (1) với ba số thực x, y, z tùy ý

$$(x+y+z)^6+(x+y-z)^6$$
$$= 2[(x+y)^6+z^6+15(x+y)^4z^2+15(x+y)^2z^4] \quad (3)$$

và

$$(z+x-y)^6+(z-x+y)^6$$
$$= 2[(x-y)^6+z^6+15(x-y)^4z^2+15(x-y)^2z^4] \quad (4)$$

Cộng theo vế của (3) và (4); đồng thời áp dụng các hằng đẳng thức (I) và (II) dẫn đến

$$(x+y+z)^6+(y+z-x)^6+(z+x-y)^6+(x+y-z)^6 =$$
$$= 2\{[(x+y)^6+(x-y)^6]+2z^6+15z^2[(x+y)^4+(x-y)^4]+15z^4[(x+y)^2+(x-y)^2]\}$$
$$= 2[2(x^6+y^6+15x^4y^2+15x^2y^4)+2z^6+15z^2(2x^4+2y^4+12x^2y^2)+15z^4(2x^2+2y^2)]$$
$$= 4(x^6+y^6+z^6)+360x^2y^2z^2+60(x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2+x^2y^4+y^2z^4+z^2x^4).$$

Mặt khác

$$x^2y^4+y^2z^4+z^2x^4 \le x^6+y^6+z^6$$
$$x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2 \le x^6+y^6+z^6$$
$$3x^2y^2z^2 \le x^6+y^6+z^6.$$

Suy ra

$$(x+y+z)^6+(y+z-x)^6+(z+x-y)^6+(x+y-z)^6 \le 244(x^6+y^6+z^6).$$

Từ đó ta có các bài toán sau đây.

Bài toán 4. *Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z, luôn có*

$$(x+y+z)^6+(y+z-x)^6+(z+x-y)^6+(x+y-z)^6 \le 244(x^6+y^6+z^6).$$

Bài toán 5. *Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z, luôn có*

$$(y+z-x)^6+(z+x-y)^6+(x+y-z)^6 \le 244(x^6+y^6+z^6).$$

Bài toán 6. *Chứng minh rằng với mọi số thực a ,b ,c, luôn có*

$$(a+b)^6+(b+c)^6+(c+a)^6 \ge \frac{16}{61}(a^6+b^6+c^6).$$

✪ **Bổ đề 3.** *Chứng minh rằng*

$$(a+b)^8+(a-b)^8$$
$$= 2(a^8+b^8+28a^6b^2+28a^2b^6+70a^4b^4) \quad \text{(III)}$$

với hai số thực a, b tuỳ ý.

Chứng minh. Ta có

$$(a+b)^8+(a-b)^8$$
$$= [(a-b)^4+(a+b)^4]^2-2(a+b)^4(a-b)^4$$
$$= (2a^4+2b^4+12a^2b^2)^2-2(a^2-b^2)^4$$
$$= (2a^4+2b^4+12a^2b^2)^2-2(a^4+b^4-2a^2b^2)^2$$
$$= 2a^8+2b^8+140a^4b^4+56a^6b^2+56a^2b^6$$
$$= 2(a^8+b^8+28a^6b^2+28a^2b^6+70a^4b^4).$$

Từ đó, tương tự như trên ta thiết lập được các bài toán sau đây.

Bài toán 7. *Chứng minh rằng với mọi số x, y, $z \in \mathbb{R}$ thì*

$$(x+y+z)^8+(y+z-x)^8+(z+x-y)^8+(x+y-z)^8 \le 2188(x^8+y^8+z^8).$$

Bài toán 8. *Chứng minh rằng với mọi số x, y, $z \in \mathbb{R}$ thì*

$$(y+z-x)^8+(z+x-y)^8+(x+y-z)^8 \le 2188(x^8+y^8+z^8).$$

Bài toán 9. *Chứng minh rằng với mọi số a, b, $c \in \mathbb{R}$ thì*

$$(a+b)^8+(b+c)^8+(c+a)^8 \ge \frac{64}{547}(a^8+b^8+c^8).$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được các bài toán bất đẳng thức sau đây.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC với ba cạnh a, b, c và nửa chu vi p. Chứng minh rằng*

$$a^4+b^4+c^4 \ge \frac{4}{7}[p^4+(p-a)^4+(p-b)^4+(p-c)^4]$$

Bài toán 11. *Chứng minh rằng với mọi số a, b, $c \in \mathbb{R}$ luôn có*

a) $(a+b)^{10}+(b+c)^{10}+(c+a)^{10} \ge \dfrac{256}{4921}(a^{10}+b^{10}+c^{10});$

b) $(a+b)^{12}+(b+c)^{12}+(c+a)^{12} \ge \dfrac{1024}{44287}(a^{12}+b^{12}+c^{12}).$

Các bạn hãy tự xét xem trong mỗi bài toán trên khi nào có đẳng thức?

Tìm nhiều cách chứng minh một hệ thức *nhờ biến đổi tương đương*

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Từ một hệ thức nếu khéo sử dụng các phép biến đổi ta có thể nhận được nhiều hệ thức tương đương, mà mỗi hệ thức đó có một dạng riêng sẽ gợi cho ta tìm ra cách chứng minh tương ứng. Nếu ta chứng minh được một trong các hệ thức này thì suy ra được tất cả các hệ thức tương đương với nó. Như vậy, không những ta tìm được nhiều cách chứng minh hệ thức ban đầu mà còn có cách nhìn toàn diện hơn, hệ thống hơn về các hệ thức khác nhau về hình thức nhưng thống nhất với nhau về mối quan hệ toán học. Điều này được minh họa qua việc xét cách chứng minh một số hệ thức trong tam giác dưới đây.

Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $a + b + c = 2p$. Gọi S, R, r theo thứ tự là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA. Đặt $\widehat{CAB} = 2\alpha$, $\widehat{ABC} = 2\beta$, $\widehat{BCA} = 2\gamma$.

Trong bài này sẽ sử dụng một số hệ thức quen biết sau.

$$S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(I)}$$

Từ đó có $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$ (II)

Khai triển vế phải của (II) rồi thay $abc = 4Rrp$ vào và rút gọn được

$$ab + bc + ca - p^2 = 4Rr + r^2 \quad \text{(III)}$$

Ta cũng biết:

$$\text{tg}\alpha = \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}, \ \text{tg}\beta = \frac{r}{p-b} = \frac{r_b}{p},$$

$$\text{tg}\gamma = \frac{r}{p-c} = \frac{r_c}{p} \quad \text{(IV)}$$

✪ **Bài toán.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có hệ thức*

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{4R+r}{pr} \quad (1)$$

Chứng minh. (*Cách 1*)

Đặt $T = \dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}$.

Ta có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} = \frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)} = \frac{c}{(p-a)(p-b)}.$$

Tương tự có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} = \frac{b}{(p-a)(p-c)};$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}.$$

Từ đó

$$2T = \frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{a}{(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{c(p-c)+b(p-b)+a(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2p^2-(a^2+b^2+c^2)}{pr^2}$$

$$= \frac{2p^2-(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{pr^2}$$

$$= \frac{2(ab+bc+ca)-2p^2}{pr^2}.$$

Thay hệ thức (III) vào phân thức cuối cùng nêu trên ta có điều phải chứng minh.

Biến đổi tương đương hệ thức (1) được,

$$\frac{pr}{p-a}+\frac{pr}{p-b}+\frac{pr}{p-c}=4R+r.$$

Áp dụng hệ thức (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) đến chứng minh hệ thức sau:

$$r_a+r_b+r_c=4R+r \qquad (2)$$

Chứng minh. (*Cách 2*)

Sử dụng hệ thức (I) và (IV) có

$$r_a=\frac{pr}{p-a}=\frac{S^2}{S(p-a)}=\frac{p(p-b)(p-c)}{S}.$$

Tương tự $r_b=\dfrac{p(p-a)(p-c)}{S}$,

$$r_c=\frac{p(p-a)(p-b)}{S},\quad r=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}.$$

Từ đó

$$S\big((r_a+r_b)+(r_c-r)\big)$$
$$= p(p-c)(p-a+p-b)+(p-a)(p-b)(p-(p-c))$$
$$= c\big(p(p-c)+(p-a)(p-b)\big)$$
$$= c\big(2p^2-p(a+b+c)+ab\big) = cab = 4RS.$$

Giản ước S ở vế đầu và vế cuối của dãy đẳng thức ta được (2).

Lại biến đổi tương đương hệ thức (1) theo cách khác được

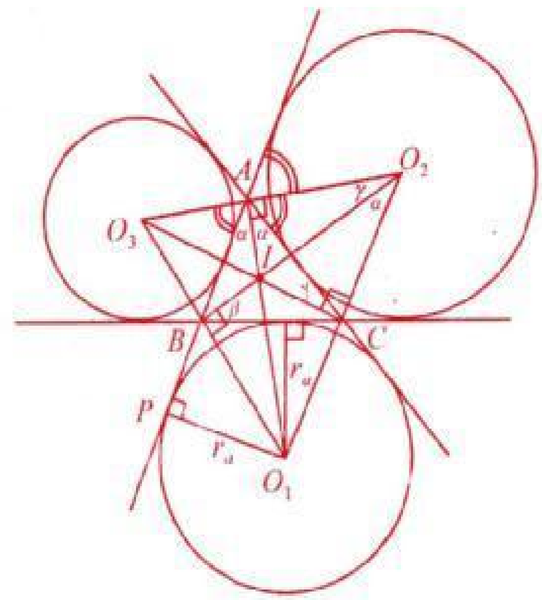
$$\frac{4R+r}{r}=\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}$$
$$=\left(\frac{a}{p-a}+1\right)+\left(\frac{b}{p-b}+1\right)+\left(\frac{c}{p-c}+1\right).$$

Từ đó ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=\frac{4R}{r}-2 \qquad (3)$$

Chứng minh. (*Cách 3*)

Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA (xem hình vẽ).



Từ (I) và (IV) có

$$\frac{aS}{p-a}=\frac{apr}{p-a}=ar_a=2S_{O_1BC}.$$

Tương tự có

$$\frac{bS}{p-b}=2S_{O_2AC},\quad \frac{cS}{p-c}=2S_{O_3AB}.$$

Dễ thấy $\widehat{O_1AC}+\widehat{O_2AC}=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$ nên $O_1A\perp O_2A$. Tương tự có $O_1A\perp O_3A$ và $O_1A\perp O_2O_3$, $O_2B\perp O_1O_3$, $O_3C\perp O_1O_2$.

Ta cũng có

$$\widehat{CO_2A}=\widehat{CIO_1}=\widehat{CAI}+\widehat{ACI}=\alpha+\gamma=\widehat{CBO_1}.$$

Từ đó có

$$\Delta O_1O_2O_3 \backsim \Delta O_1BC \text{ nên } \frac{O_2O_3}{a}=\frac{AO_1}{r_a}.$$

Ta có

$$2S_{O_1O_2O_3}=O_2O_3.AO_1=\frac{O_2O_3}{AO_1}.AO_1^2=\frac{a}{r_a}.AO_1^2$$

Chú ý rằng $AO_1 = \dfrac{AP}{\cos\alpha} = \dfrac{p}{\cos\alpha}$ và $r_a = p\text{tg}\alpha$ (theo (IV)) nên

$$2S_{O_1O_2O_3} = \frac{ap^2}{p.\text{tg}\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{p.2R.\sin 2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 4Rp \text{ (V)}$$

Mặt khác sử dụng (I), (IV) có

$$2S_{O_1O_2O_3} = S + S_{O_1BC} + S_{O_2AC} + S_{O_3AB}$$
$$= S + \frac{a}{2}.r_a + \frac{b}{2}.r_b + \frac{c}{2}.r_c$$
$$= S + \frac{aS}{2(p-a)} + \frac{bS}{2(p-b)} + \frac{cS}{2(p-c)}$$
$$= \frac{S}{2}\left(2 + \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right) \qquad \text{(VI)}$$

Từ (V), (VI) và $S = pr$ suy ra hệ thức (3).

Ta lại biến đổi hệ thức (1) tương đương với

$$\frac{r}{p-a} + \frac{r}{p-b} + \frac{r}{p-c} = \frac{4R+r}{p}.$$

Sử dụng (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma = \frac{4R+r}{p} \qquad (4)$$

Chứng minh. (*Cách 4*)

Sử dụng (IV) ta có

$$p = (p-a) + a = \frac{r}{\text{tg}\alpha} + 2R\sin 2\alpha.$$

Áp dụng công thức lượng giác của góc chia đôi với $\text{tg}\alpha = t$ ta có $p = \dfrac{r}{t} + \dfrac{4Rt}{1+t^2}$.

Quy đồng mẫu số rồi viết trong dạng phương trình đối với t ta được

$$pt^3 - (4R+r)t^2 + pt - r = 0 \qquad \text{(VII)}$$

Như vậy $t = \text{tg}\alpha$ là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Tương tự như thế $\text{tg}\beta$, $\text{tg}\gamma$ cũng là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Áp dụng định lí Viète cho tổng ba nghiệm của phương trình bậc ba (VII) ta có hệ thức (4).

Trong bài tập 1 dưới đây hướng dẫn cách chứng minh hệ thức (4) (coi là cách (5)) bằng các phép biến đổi lượng giác. Với mỗi hệ thức (1), (2), (3), (4) ta có cách chứng minh tương ứng nhưng vì các hệ thức này tương đương với nhau nên nếu xuất phát từ một trong năm cách chứng minh đã nêu thì đi theo mũi tên trong sơ đồ dưới ta chứng minh được hệ thức (1) và cả các hệ thức (2), (3), (4). Cũng dễ dàng thấy nếu sử dụng (IV) có thể biến đổi hệ thức (2) tương đương với hệ thức (4).

Sơ đồ liên hệ giữa các hệ thức và cách chứng minh

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Cách 2}} \arrow[d] & \boxed{\text{Cách 1}} \arrow[d] & \boxed{\text{Cách 3}} \arrow[d] \\
\text{Hệ thức (2)} \arrow[r, shift left] \arrow[dr, shift left] & \text{Hệ thức (1)} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left] & \text{Hệ thức (3)} \arrow[l, shift left] \\
\boxed{\text{Cách 4}} \arrow[r] & \text{Hệ thức (4)} \arrow[u, shift left] \arrow[ul, shift left] & \boxed{\text{Cách 5}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Mời các bạn làm các bài tập sau có liên quan đến các hệ thức trên và cách chứng minh chúng.

Bài 1. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để chứng minh các hệ thức sau:

a) $\dfrac{4R}{p} = \dfrac{8R}{2R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)} = \dfrac{1}{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}$;

b) $\dfrac{r}{p} = \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma$.

Từ đó suy ra hệ thức (4) (*cách* (5)).

Bài 2. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{p-a}$, $\dfrac{1}{p-b}$, $\dfrac{1}{p-c}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$pr^2x^3 - (4R+r)rx^2 + px - 1 = 0.$$

Từ đó suy ra hệ thức (1).

Hướng dẫn. $\dfrac{4R}{p-(p-a)} = \dfrac{4R}{a} = \dfrac{4R}{2R\sin 2\alpha}$

$= \text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha = \dfrac{r}{p-a} + \dfrac{p-a}{r}$,

đặt $x = \dfrac{1}{p-a}$ rồi quy đồng mẫu số.

Bài 3. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $p\text{tg}\alpha = \dfrac{(p-b)(p-c)}{r}$;

b) $p(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta) = 4R\cos^2\gamma$;

c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1 + 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ $= 1 + \dfrac{r}{R}$;

d) $2p(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma) =$ $= 6R + 2R(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)$.

Từ đó suy ra hệ thức (4).

Bài 4. Gọi O_1, O_2, O_3 theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA. Hãy dựa vào bài tập 3b và $S_{O_1O_2O_3} = S_{CO_1O_3} + S_{CO_2O_3}$ để chứng minh $S_{O_1O_2O_3} = 2Rp$ (V). Từ đó suy ra hệ thức (3).

Bài 5. a) Chứng minh rằng hệ thức (3) tương đương với mỗi hệ thức (5), (6) sau:

$$\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} = 4p\left(\frac{R}{r} - 1\right) \qquad (5)$$

$$a^2\text{tg}\alpha + b^2\text{tg}\beta + c^2\text{tg}\gamma = 4p(R-r) \qquad (6)$$

b) Hãy chứng minh hệ thức (5) bằng cách quy đồng mẫu số và dựa vào khai triển công thức Heron theo a, b, c thành

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Hướng dẫn: a) Đặt $\dfrac{a^2}{p-a} + a = \dfrac{pa}{p-a}$.

Khai thác thêm MỘT BẤT ĐẲNG THỨC QUEN THUỘC để giải toán

TRỊNH XUÂN LƯU
(Hà Nội)

Thường tâm lí của các bạn học sinh khi gặp những bài toán bất đẳng thức (BĐT) hay bài toán cực trị thì cảm thấy bất an và tự hỏi: Liệu mình có làm được không? Bài viết này muốn trao đổi với các bạn cách giải một số bài toán cùng dạng mà có thể nhìn theo hướng của một BĐT quen thuộc trong chương trình phổ thông.

Trong chương trình phổ thông ta biết các bất đẳng thức cơ bản sau:

* Với hai số dương x_1, x_2 luôn có

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ge\frac{4}{x_1+x_2} \qquad (1)$$

* Với ba số dương x_1, x_2, x_3 ta có

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\ge\frac{9}{x_1+x_2+x_3} \qquad (2)$$

* Mở rộng hơn, với $x_i>0$ ($i=1, 2,\dots, n$) thì

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\ge\frac{n^2}{x_1+x_2+\dots+x_n} \qquad (3)$$

Cả ba BĐT trên đều có dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_i=x_j$ với mọi i, j ($i\ne j$). Dễ dàng chứng minh được chúng bằng cách áp dụng BĐT Cauchy hoặc Bunhiacovski

Tổng quát hơn, với $b_i>0$ ($i=1, 2,\dots, n$) thì luôn có

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\dots+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n} \qquad (4)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Bạn đọc có thể chứng minh BĐT (4) bằng cách áp dụng BĐT Bunhiacovski (xem bài *Một bất đẳng thức có nhiều ứng dụng* THTT số 328, tháng 10-2004).

Ta có thể áp dụng các BĐT trên để giải một số bài toán sau đây.

✪ **Bài toán 1.** *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\ge\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+2c+a}\ge\frac{2}{a+2b+c};$$

$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+2a+b}\ge\frac{2}{b+2c+a};$$

$$\frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\ge\frac{2}{c+2a+b}.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên, ta nhận được BĐT cần chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a+3b=b+2c+a\\ b+3c=c+2a+b\\ c+3a=a+2b+c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$$

✪ **Bài toán 2.** *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thoả mãn abc = ab+bc+ca thì* $\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+2c}<\frac{3}{16}$.

Lời giải

Từ $abc = ab + bc + ca$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Đặt $x=\frac{1}{a}$; $y=\frac{1}{b}$; $z=\frac{1}{c}$ thì $x+y+z=1$.

Áp dụng BĐT (3) ta có

$$a+2b+3c=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\geq\frac{36}{x+2y+3z}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{a+2b+3c}\leq\frac{x+2y+3z}{36}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{b+2c+3a}\leq\frac{y+2z+3x}{36};$$

$$\frac{1}{c+2a+3b}\leq\frac{z+2x+3y}{36}.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên dẫn đến

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+2c}$$

$$\leq\frac{6(x+y+z)}{36}=\frac{1}{6}<\frac{3}{16}.$$

✪ **Bài toán 3.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$B=\frac{a^6}{b^3+c^3}+\frac{b^6}{c^3+a^3}+\frac{c^6}{a^3+b^3}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1.

Lời giải. Áp dụng BĐT (4) ta có

$$B\geq\frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{2(a^3+b^3+c^3)}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2}.$$

Theo BĐT Bunhiacovski

$$9(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

$$\geq\left[3(a^2+b^2+c^2)\right]^2\geq(a+b+c)^4$$

suy ra $\quad a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{9}\ \Rightarrow B\geq\frac{1}{18}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng $\frac{1}{18}$ đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

✪ **Bài toán 4.** *Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Biến đổi vế trái của BĐT trên và áp dụng BĐT (4) ta có

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ba}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ca+cb}$$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq3\sqrt{\frac{1}{abc}}=3.$$

Từ đó ta suy ra BĐT cần chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

✪ **Bài toán 5.** *Chứng minh rằng*

$$\frac{2x}{x^6+y^4}+\frac{2y}{y^6+z^4}+\frac{2z}{z^6+x^4}\leq\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}$$

với x, y, z là các số dương.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng BĐT (4), ta có

$$\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}=\frac{x^2}{x^6}+\frac{1}{y^4}\geq\frac{(x+1)^2}{x^6+y^4}\geq\frac{4x}{x^6+y^4}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}\geq\frac{4y}{y^6+z^4}\ ;\ \ \frac{1}{z^4}+\frac{1}{x^4}\geq\frac{4z}{z^6+x^4}.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được BĐT cần chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.❒

Có rất nhiều bài toán có thể giải bằng cách nhìn theo hướng các BĐT (3), (4), các bạn thử tìm và giải nhé. Còn bây giờ các bạn hãy thử luyện tập với một số bài sau.

Bài 1. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x+y=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$.

Bài 2. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$$

với a, b, c là các số thực dương.

Bài 3. Cho các số thực dương x, y, z, t thoả mãn $xyzt=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)}+\frac{1}{y^3(xz+zt+tx)}$$

$$+\frac{1}{z^3(xt+ty+yx)}+\frac{1}{t^3(xy+yz+zx)}\geq\frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a^8}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^8}{(b^2+c^2)^2}+\frac{c^8}{(c^2+a^2)^2}$$

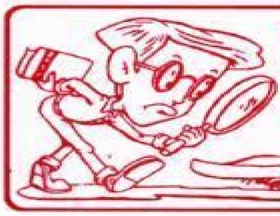
trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Bài 5. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq1.$$



BẠN ĐỌC TÌM TÒI

Khai thác một bài toán BẤT ĐẲNG THỨC

TÔN THẤT HIỆP
(GV THPT Phan Đăng Lưu, Thừa Thiên - Huế)

Trong bài viết này chúng tôi đưa ra một bài toán bất đẳng thức quen thuộc và giải nó; đồng thời sử dụng các phép suy luận như đặc biệt hoá, tổng quát hoá; các phương pháp tư duy phân tích, tư duy tổng hợp để hình thành nên các bài toán mới và nêu cách giải chúng. Trong bài này kí hiệu $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2{,}71$.

Bài toán 1. *Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x>y\ge e$. Chứng minh rằng $y^x>x^y$.*

Lời giải. Ta có $y^x>x^y \Leftrightarrow \frac{\ln y}{y}>\frac{\ln x}{x}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{\ln t}{t}$, $t\in[e;+\infty)$, ta có $f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow \ln t=1\Leftrightarrow t=e$ và $f'(t)<0$ với thì $t>e$ suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(e;+\infty)$. Vì vậy với $x>y\ge e$ thì $f(y)>f(x)$ $\Leftrightarrow \frac{\ln y}{y}>\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow y^x>x^y$.□

Lời bình.

Nếu áp dụng bài toán 1 cho $m, n\in\mathbb{N}$ với $m>n\ge 3$ thì $n^m>m^n$. Vấn đề đặt ra là có tồn tại số a lớn nhất để cho $n^m\ge m^n+a, \forall m,n\in\mathbb{N}$, $m>n\ge 3$ hay không? Trước khi giải quyết vấn đề này, ta tìm a trong một số trường hợp của m và n. Chẳng hạn khi cho $n=3$ hoặc $m=n+1$, chúng tôi đã tìm được giá trị a lớn nhất trong các trường hợp này là 17.

Bài toán 2. a) *Tìm a lớn nhất sao cho $3^m\ge m^3+a, \forall m\in\mathbb{N}$, $m\ge 4$.*
b) *Tìm a lớn nhất sao cho $n^{n+1}\ge(n+1)^n+a$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$.*

Lời giải.

a) Xét dãy số (u_m) với $u_m=3^m-m^3$, $m\ge 4$.

* Đặt $T_m=u_{m+1}-u_m=2.3^m-3m^2-3m-1$, ta chứng minh $T_m>0$, $\forall m\ge 4$.

Với $m=4$, ta có $T_4=17>0$.

Giả sử $T_m>0$, $m\ge 4$, khi đó
$$T_{m+1}=2.3^{m+1}-3(m+1)^2-3(m+1)-1$$
$$=3T_m+(6m^2-4)>0.$$

Do đó $T_m>0, \forall m\ge 4$. Từ đó (u_m) là dãy số tăng. Vậy với $\forall m\ge 4$, ta có $u_m\ge u_4=17\Rightarrow 3^m\ge m^3+17$.

* Giả sử tồn tại số a_0 sao cho $a_0>17$ và $3^m\ge m^3+a_0$, $\forall m\ge 4$ thì $3^4\ge 4^3+a_0$, trái với giả sử $a_0>17$.

Vậy $a=17$ là lớn nhất.

b) Xét dãy số (v_n) với $v_n=n^{n+1}-(n+1)^n$, $n\ge 3$.

* Chứng minh (v_n) là dãy tăng với mọi $n\ge 3$.

Ta có $v_{n+1}>v_n$
$$\Leftrightarrow (n+1)^{n+2}-(n+2)^{n+1}>n^{n+1}-(n+1)^n$$
$$\Leftrightarrow (n+1)^{n+1}\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)>(n+2)^{n+1}+n^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow n+1+\frac{1}{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (1)$$

Ta chứng minh (1) đúng với mọi $n\ge 3$.

Thật vậy ta có
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\sum_{k=2}^{n+1}C_{n+1}^k\cdot\frac{1}{(n+1)^k}$$
$$=2+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!.(n+1)^k}<2+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}$$
$$<2+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{(k-1)k}=2+\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=3-\frac{1}{n+1}<3.$$

Mặt khác ta có $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<1$ suy ra
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<4<n+1+\frac{1}{n+1}, \forall n\ge 3.$$

BĐT (1) đã được chứng minh. Vậy (v_n) là một dãy tăng, do đó với mọi $n\ge 3$ ta có $v_n\ge v_3=17$ hay $n^{n+1}\ge(n+1)^n+17$.

* Giả sử tồn tại số a_0 sao cho $a_0>17$ và $n^{n+1}\ge(n+1)^n+a_0$, $\forall n\ge 3\Rightarrow 3^4\ge 4^3+a_0$ $\Rightarrow 17\ge a_0$, trái với giả sử $a_0>17$.

Vậy $a=17$ là lớn nhất.

Từ cách giải câu b) của bài toán 2, chúng tôi tìm ra lời giải của bài toán 3.

Bài toán 3. *Tìm a lớn nhất sao cho $n^m\ge m^n+a$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m>n\ge 3$.*

Hướng dẫn. Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, $m>n\ge 3$, xét hàm số $f(x)=n^x-x^n$, $x\in[n;+\infty]$; chứng minh hàm số $f(x)$ là hàm số tăng trên khoảng $(n;+\infty)$. Từ đó tìm được $a=17$.

Từ cách giải của bài toán 3 và bài toán1, chúng tôi đề xuất bài toán sau đây.

Bài toán 4. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên (m; n) của phương trình: $n^m=m^n+17$.*

ĐS: Phương trình có ba nghiệm nguyên $(m;n)$ là $(1;18)$, và $(4;3)$, $(-16;1)$.

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Dùng ẩn phụ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

VŨ VĂN DŨNG
(GV THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)

Giải phương trình vô tỉ là dạng toán khó thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi cấp THCS và thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT. Với dạng toán này đòi hỏi người giải phải có khả năng tư duy cao và khả năng sử dụng linh hoạt các kiến thức đã học. Việc sử dụng ẩn phụ là công cụ hữu hiệu để giải phương trình vô tỉ. Bài viết này xin đưa ra 5 dạng cơ bản sử dụng ẩn phụ để giải phương trình vô tỉ.

✪ Dạng 1. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai

Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2+7x+7} = 2 \qquad (1)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x^2+7x+7} = y$, điều kiện (ĐK): $y \ge 0$.

PT (1) có dạng $3y^2 + 2y - 5 = 0$. Từ đó tìm được $y = 1$ (thỏa mãn) và $y = -\frac{5}{3}$ (loại).

Suy ra $\sqrt{x^2+7x+7} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0$,

PT này có hai nghiệm $x = -1$ và $x = -6$.

Vậy tập nghiệm của PT (1) là $\{-6; -1\}$.

✪ Dạng 2. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình tích

a) Sử dụng một ẩn phụ

Thí dụ 2. *Giải phương trình* $x^2+\sqrt{x+1} = 1$ (2)

Lời giải. Đặt $\sqrt{x+1} = t$, ĐK: $t \ge 0$.

PT (2) có dạng $(t^2 - 1)^2 + t = 1$

$\Leftrightarrow t(t-1)(t^2 + t - 1) = 0$. Từ đó tìm được

$t = 0$; $t = 1$; $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ và $t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Vì $t \ge 0$ nên loại giá trị $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

*Với $t = 0$ thì $x = -1$.

*Với $t = 1$ thì $\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

*Với $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\sqrt{x+1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$\Leftrightarrow x + 1 = \frac{(-1+\sqrt{5})^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của PT (2) là

$\left\{0; -1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) Sử dụng hai ẩn phụ

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3+1} \qquad (3)$$

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{x+1}$; $v = \sqrt{x^2-x+1}$, ĐK: $x \ge -1$, $u \ge 0$, $v > 0$.

Khi đó $u^2 = x + 1$, $v^2 = x^2 - x + 1$, $u^2v^2 = x^3 + 1$, $x^2 + 2 = u^2 + v^2$. PT (3) có dạng

$2(u^2 + v^2) = 5u.v \Leftrightarrow (2u - v)(u - 2v) = 0$.

Suy ra $u = 2v$ hoặc $v = 2u$.

* Với $u = 2v$ thì $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$. PT này vô nghiệm.

* Với $v = 2u$ thì $\sqrt{x^2-x+1} = 2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$, PT này có hai nghiệm

$x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$ và $x = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy PT (3) có hai nghiệm

$$x=\frac{5+\sqrt{37}}{2};\ \ x=\frac{5-\sqrt{37}}{2}.$$

✪ Dạng 3. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$2x^2-3x+2=x.\sqrt{3x-2} \quad (4)$$

Lời giải. ĐK: $x\ge\frac{2}{3}$.

PT (4) $\Leftrightarrow 2x^2-(3x-2)=x.\sqrt{3x-2}$.

Đặt $y=\sqrt{3x-2}$, ĐK: $y\ge 0$. Ta có

$$2x^2-y^2=xy \quad (5)$$

PT (5) là phương trình đẳng cấp đối với x và y. Đặt $y=tx$ thì

(5) $\Leftrightarrow 2x^2-t^2x^2=tx^2 \Leftrightarrow x^2(2-t^2-t)=0$

$\Leftrightarrow 2-t^2-t=0$ (do $x\ge\frac{2}{3}$).

Tìm được $t=1$ và $t=2$.

* Với $t=1$ thì $y=x$ do đó $\sqrt{3x-2}=x \Leftrightarrow 3x-2=x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$, PT này có hai nghiệm $x=1$ và $x=2$ (thỏa mãn ĐK).

* Với $t=2$ thì $y=-2x$. Do $x\ge\frac{2}{3}$ nên $y<0$ (loại).

Vậy tập nghiệm của PT (4) là $\{1;2\}$.

✪ Dạng 4. Sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình của ẩn phụ đó, còn ẩn ban đầu coi là tham số

Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$6x^2-10x+5-(4x-1).\sqrt{6x^2-6x+5}=0 \quad (6)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{6x^2-6x+5}=t$, ĐK: $t\ge 0$. PT (6) có dạng $t^2-(4x-1)t-4x=0$. Coi đây là PT bậc hai ẩn t (x là tham số)

$\Delta=(4x-1)^2+16x=(4x+1)^2$.

Tìm được $t=-1$ (loại vì $t\ge 0$) và $t=4x$.

Với $t=4x$ thì $\sqrt{6x^2-6x+5}=4x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6x^2-6x+5=16x^2\\ x\ge 0.\end{cases}$

Tìm được $x=\frac{-3+\sqrt{59}}{6}$.

Vậy PT (6) có nghiệm $x=\frac{-3+\sqrt{59}}{6}$.

✪ Dạng 5. Sử dụng ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Thí dụ 6. *Giải phương trình*

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5 \quad (7)$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[4]{97-x}=a$, $\sqrt[4]{x}=b$, ĐK: $a\ge 0$, $b\ge 0$.

PT (7) có dạng $a+b=5$.

Lại có $a^4+b^4=\left(\sqrt[4]{97-x}\right)^4+\left(\sqrt[4]{x}\right)^4=97$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}a+b=5\\ a^4+b^4=97.\end{cases}$

Giải hệ tìm được $a=3$, $b=2$ và $a=2$, $b=3$ (thỏa mãn ĐK).

Từ đó suy ra $x=81$ và $x=16$.

Nhận xét. *Qua 6 thí dụ trên chắc hẳn các bạn đã thấy sự linh hoạt, đa dạng và hữu hiệu của việc sử dụng ẩn phụ vào giải phương trình vô tỉ. Tuy với mỗi bài toán khác nhau có các hướng giải khác nhau, song nếu khéo léo sử dụng ẩn phụ đưa về các dạng cơ bản trên thì việc giải phương trình vô tỉ sẽ ngắn gọn và đơn giản hơn.*

Mời các bạn hãy sử dụng ẩn phụ để giải một số phương trình vô tỉ sau đây.

a) $\sqrt{x}+\sqrt{8-x}=4$;

b) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$;

c) $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=2$;

d) $\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x$;

e) $(x-1)(x+3)+2(x-1).\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}=8$.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

Điều kiện cần và đủ
TRONG LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

NGUYỄN ANH THUẤN *(Sở GD-ĐT Hải Phòng)*
PHẠM VĂN DƯƠNG *(SV lớp KSCLC khóa 51 ĐHBK Hà Nội)*

Trong quá trình làm toán, chúng ta thường xuyên phải giải quyết hai vấn đề: bài toán chứng minh và bài toán tìm điều kiện. Ở bài toán chứng minh thường người ta cho điều A và yêu cầu chứng minh điều B. Với bài toán tìm điều kiện không phải lúc nào ta cũng thực hiện được phép biến đổi tương đương để đạt được kết quả, trong trường hợp ấy chúng ta thường phải xét điều kiện cần và đủ. Bài viết này xin nêu một số thí dụ tiêu biểu về những bài toán dạng như vậy.

✪ **Bài toán 1.** *Tìm m để phương trình (PT) sau có nghiệm duy nhất:* $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=m$ (1)

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Trong PT (1) vai trò của x và $2-x$ là như nhau. Vì vậy nếu PT (1) có nghiệm là x_0 thì $2-x_0$ cũng là nghiệm của nó. Giả sử PT (1) có nghiệm duy nhất là x_0 thì $x_0=2-x_0$ $\Leftrightarrow x_0=1$. Thay vào (1) ta được $m=2$.

• *Điều kiện đủ.* Ta xét $m=2$ thì PT (1) có dạng

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=2 \qquad (2)$$

Cách 1. Điều kiện $0\le x\le 2$ (*)

Bình phương hai vế của PT (2) rồi rút gọn được $\sqrt{x(2-x)}=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn (*)).

Cách 2. Áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có $(\sqrt{x}+\sqrt{2-x})^2\le 2(x+2-x)=4$

$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2-x}\le 2.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2-x \Leftrightarrow x=1$. Suy ra PT (2) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Kết luận. Vậy với $m=2$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

✪ **Bài toán 2.** *Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} a(x^2+1)+|x|=y \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \qquad (\text{I})$$

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Giả sử hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$. Do $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ (I) nên suy ra $(-x_0;y_0)$ cũng là nghiệm của hệ (I). Từ tính duy nhất nghiệm suy ra $x_0=-x_0$ $\Leftrightarrow x_0=0$.

Thay vào hệ (I), ta được $\begin{cases} a=y \\ y^2=1 \end{cases}$ suy ra $a=-1$ hoặc $a=1$.

• *Điều kiện đủ.*

a) Nếu $a=-1$ thì hệ (I) có dạng

$$\begin{cases} |x|=x^2+1+y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (\text{II})$$

Ta thấy hệ (II) có ít nhất hai nghiệm $(x;y)=(1;-1)$ và $(x;y)=(0;-1)$ nên $a=-1$ không là giá trị cần tìm.

b) Nếu $a=1$ thì hệ (I) có dạng

$$\begin{cases} |x|+x^2=y-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (\text{III})$$

Từ $y-1=|x|+x^2$ suy ra $y\ge 1$, từ $x^2+y^2=1$ suy ra $y\le 1$. Vậy ta có $y=1$.

Thay y = 1 vào hệ (III) ta được $\begin{cases} x^2+|x|=0 \\ x^2=0. \end{cases}$

Vậy $(x\,;\,y) = (0\,;\,1)$ là nghiệm duy nhất của hệ (III).

Kết luận. Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = 1$.

✪ **Bài toán 3.** *Tìm a sao cho với mọi giá trị của b hệ phương trình sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} (a-1)x^5+y^5=1 \\ 1+(a+1)bxy^4=a^2 \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Giả sử hệ (IV) có nghiệm với mọi giá trị của b suy ra với $b = 0$ hệ (IV) cũng có nghiệm, tức là hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} (a-1)x^5+y^5=1 \\ a^4=1. \end{cases}$

Suy ra $a = 1$ hoặc $a = -1$.

• *Điều kiện đủ.*

a) Với $a = 1$ thì hệ (IV) có dạng $\begin{cases} y^5=1 \\ bx=0. \end{cases}$

Hệ này ít nhất có $(x; y) = (0; 1)$ là nghiệm với mọi giá trị của b. Suy ra hệ (IV) có nghiệm với mọi giá trị của b.

b) Với $a = -1$ hệ (IV) có dạng $\begin{cases} -2x^5+y^5=1 \\ 1=1. \end{cases}$

Hệ này nhận ít nhất $(x; y) = (0; 1)$ là nghiệm với mọi giá trị của b.

Kết luận. Với $a = 1$ hoặc $a = -1$ thì hệ (IV) có nghiệm với mọi giá trị của b.

✪ **Bài toán 4.** *Tìm m để hai phương trình sau tương đương:*

$$x^2+(m^2-5m+6)x=0 \qquad (3)$$

và $x^2+2(m-3)x+m^2-7m+12=0 \qquad (4)$

Lời giải

• *Điều kiện cần.* Giả sử PT (3) và PT (4) tương đương với nhau. Vì PT (3) luôn có nghiệm $x = 0$ nên PT (4) cũng phải có nghiệm $x = 0$. Vì vậy, ta phải có $m^2-7m+12=0 \Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = 4$.

• *Điều kiện đủ.*

a) Nếu $m = 3$ thì PT (3) và (4) đều có dạng $x^2 = 0$. Suy ra với $m = 3$ thì PT (3) tương đương với PT (4).

b) Nếu $m = 4$ thì PT (3) và PT (4) đều có dạng $x^2 + 2x = 0$. Suy ra với $m = 3$ thì PT (3) tương đương với PT (4).

Kết luận. PT (3) tương đương với PT (4) khi và chỉ khi $m = 3$ hoặc $m = 4$.

Qua các bài toán trên chắc các bạn đã thấy được phần nào tầm quan trọng của việc áp dụng điều kiện cần và đủ để giải bài toán tìm điều kiện. Để luyện tập xin mời các bạn làm một số bài tập áp dụng sau đây.

Bài 1. Tìm a để các phương trình và hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\sqrt{x-5}+\sqrt{9-x} = a$;

b) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)} = a$;

c) $\sqrt[3]{(2x+a)^2}+\sqrt[3]{(2x-a)^2}+\sqrt[3]{4x^2+a^2}=\sqrt[3]{a}$;

d) $\begin{cases} xy+x+y=a+2 \\ x^2y+xy^2=a+1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=a \\ x+y=3a. \end{cases}$

Bài 2. Tìm a để với mọi giá trị của b hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)+x+y=b \\ y-x=b. \end{cases}$$

Bài 3. Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$(1+m^2)x^2-2(m^2-1)x+m^2-3=0$$

và $x^2+(m-1)x+m^2-3m+1=0$.

Phương pháp GIẢI MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC trong tam giác

NGUYỄN LÁI
(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Giả sử f(A, B, C) là biểu thức chứa các hàm số lượng giác của các góc trong tam giác ABC.

Giả sử các góc A, B, C thỏa mãn hai điều kiện:

1) $f(A)+f(B)\ge 2f\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

hoặc $f(A).f(B)\ge f^2\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$ (1)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B$;

2) $f(C)+f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\ge 2f\left(\dfrac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$

hoặc $f(C).f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\ge f^2\left(\dfrac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ (2)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C=\dfrac{\pi}{3}$.

Khi cộng (hoặc nhân) (1), (2) *ta sẽ có BĐT*

$f(A)+f(B)+f(C)\ge 3f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ (3)

hoặc $f(A).f(B).f(C)\ge f^3\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ (4)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C$.

Tương tự ta cũng có bất đẳng thức với chiều ngược lại.

Để minh họa cho phương pháp trên ta xét các bài toán sau đây.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\ge\frac{4}{2+\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}}$$

$$\ge\frac{4}{2+\sqrt{2(\sin A+\sin B)}}=\frac{4}{2+2\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}}$$

$$\ge\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}\qquad(5)$$

$\left(\text{có dạng } f(A)+f(B)\ge 2f\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}\ge\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}}\qquad(6)$$

Cộng theo vế (5) và (6) ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}$$

$$\ge 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}}\right)$$

$$\ge\frac{4}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}.$$

Suy ra $\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}$

$$\geq \frac{3}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A\sin B}$$

$$\geq 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A.\sin B}}+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin A.\sin B}}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(A-B)-\cos(A+B)}}\right)^2$$

$$\geq\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(A+B)}}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (7)$$

$\left(\text{có dạng } f(A).f(B)\geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)^2 \quad (8)$$

Nhân theo vế của (7) và (8) ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)$$

$$\geq\left(\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)\right)^2\geq\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^4.$$

Suy ra $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)$

$$\geq\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^3=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}\geq\frac{3}{64}.$$

Lời giải. Trường hợp tam giác ABC tù hoặc vuông.

Giả sử $A=\max\{A, B, C\}\geq 90^\circ$, lúc đó

$\cos\frac{A+B}{2}>0$ và $\cos\left(\frac{C+60^\circ}{2}\right)>0$.

Ta có

$$\frac{\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}}{2}\geq\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{\cos A+\cos B}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^3$$

$$\geq\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)^3=\sin^6\frac{A+B}{4}$$

$$\Rightarrow\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}\geq 2\sin^6\frac{A+B}{4} \quad (9)$$

$\left(\text{có dạng } f(A)+f(B)\geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{60^\circ}{2}\geq 2\sin^6\frac{C+60^\circ}{4} \quad (10)$$

Cộng theo vế của (9) và (10) có

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{60^\circ}{2}$$

$$\geq 2\left(\sin^6\frac{A+B}{4}+\sin^6\frac{C+60^\circ}{4}\right)$$

$$\geq 4\sin^6\frac{A+B+C+60^\circ}{8} = 4\sin^6\frac{60^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2} \geq 3\sin^6\frac{60^\circ}{2}=\frac{3}{64} \quad (11)$$

Trường hợp tam giác ABC nhọn, các BĐT (9), (10) và (11) luôn đúng.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$= 2.\sqrt{2}\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).$$

Nên BĐT đã cho được viết lại dưới dạng

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\leq\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 \quad (*)$$

- Nếu $\max\{A; B; C\} \geq \frac{3\pi}{4}$ thì vế trái của biểu thức (*) không dương nên BĐT đã cho luôn đúng.

- Nếu $\max\{A; B; C\} < \frac{3\pi}{4}$ thì

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)>0;\ \cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)>0;\ \cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)>0,$$

nên $\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(A-B)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)\right]\leq\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\leq\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (12)$$

$$\left(\text{có dạng } f(A).f(B)\leq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\right).$$

Tương tự

$$\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\leq\cos^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (13)$$

Do đó nhân theo vế của (12) và (13) và tương tự ta có

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\leq\left[\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$\leq\cos^4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\leq\cos^3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Do đó

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Mời các bạn tiếp tục giải các bài toán sau đây theo phương pháp trên.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có

1) $\tan^3\frac{A}{2}+\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{C}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\dfrac{1}{\sin^n\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^n\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^n\frac{C}{2}}\geq 3.2^n$

(n là số thực dương);

3) $A.\cos\frac{A}{4}+B.\cos\frac{B}{4}+C.\cos\frac{C}{4}\leq\frac{\pi\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$;

4) Nếu tam giác ABC nhọn thì

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)$$

$$\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})^3.\cos A.\cos B.\cos C.$$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN về cực đại, cực tiểu của hàm số

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

I. Một số kiến thức chung về cực trị của các hàm số trong chương trình phổ thông

1) *Hàm số* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì y' không đổi dấu, HS không có cực trị.

Nếu $\Delta' > 0$ thì PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua nghiệm nên hàm số có cực đại (CĐ) và cực tiểu (CT).

Hai điểm CĐ và CT đối xứng với nhau qua điểm uốn.

Chia đa thức y cho y', ta được $y = y'.\,q(x) + r(x)$, trong đó $q(x)$, $r(x)$ là các nhị thức bậc nhất và lần lượt là thương, số dư của phép chia nói trên.

Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $(x_1\,;\,y_1)$, $(x_2\,;\,y_2)$.

Vì $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ nên tọa độ các điểm CĐ, CT thỏa mãn $y = r(x)$. Đó chính là PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT của đồ thị.

2) *Hàm số* $y = ax^4 + bx^2 + c\quad (a \neq 0)$
Ta có $y' = 2x(2ax^2 + b)$.

Nếu $ab \geq 0$, hàm số có một cực trị tại $x = 0$.

Nếu $ab < 0$, hàm số có ba điểm cực trị. Vì đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng nên ba điểm cực trị luôn tạo thành một tam giác cân.

3) *Hàm số* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ (a và $a' \neq 0$).

Ta có $y' = \dfrac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - a'c}{(a'x + b')^2}$.

Gọi tam thức trên tử số của y' là $f(x)$. Hàm số có cực trị khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 = -\dfrac{b'}{a'}$.

Ta được điều kiện $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(x_0) \neq 0. \end{cases}$

Hai điểm CĐ, CT đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận.

Với hàm số có dạng $y = \dfrac{u}{v}$ thì $y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Khi $y' = 0$ ta có $u'v = v'u$ hay $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u'}{v'}$.

Do đó tọa độ các điểm CĐ, CT thỏa mãn $y = \dfrac{2a}{a'}.x + \dfrac{b'}{a'}$. Đó chính là PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT của đồ thị.

Trong phần áp dụng dưới đây, các bước tìm điều kiện để hàm số có cực trị cũng như các tính toán chi tiết xin dành cho bạn đọc tự thực hiện.

II. Áp dụng

1. Hàm số đa thức

✪**Thí dụ 1.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$. *Tìm m để hàm số có CĐ và CT đồng thời hai điểm CĐ, CT của đồ thị cách đều đường thẳng (d) có phương trình* $y = x - 1$.

Lời giải. $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m > -3$.

Chia đa thức y cho y', ta được

$$y = y'\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{m}{3} + 1\right)x + 2 - \frac{m}{3}.$$

Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$.

PT đường thẳng đi qua hai điểm CĐ, CT là

$$y = -2\left(\frac{m}{3} + 1\right)x + 2 - \frac{m}{3} \quad (d_1)$$

Các điểm CĐ, CT cách đều đường thẳng (d) trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $(d_1) // (d)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{m}{3} + 1\right) = 1 \\ 2 - \dfrac{m}{3} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{9}{2} < -3 \text{ (loại).}$$

Trường hợp 2. Trung điểm của đoạn AB nằm trên (d).

Tọa độ trung điểm AB là $E: \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 1 \\ y = -m \end{cases}$

Vì $E(1 ; -m) \in (d)$, suy ra $m = 0$.

✪Thí dụ 2. *Cho hàm số* $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$.

Tìm m để đồ thị của hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải. Ta có $y' = 4x(x^2 - m)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x^2 = m$.

Hàm số có ba cực trị khi $m > 0$.

Tọa độ ba điểm cực trị là $A(0 ; m-1)$,

$B(-\sqrt{m} ; -m^2 + m - 1)$, $C(\sqrt{m} ; -m^2 + m - 1)$.

Ta luôn có $AB = AC$, nên tam giác ABC đều khi $AB^2 = BC^2$. Lúc đó

$$m^4 + m = 4m \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}.$$

Lưu ý. Các bạn hãy tự đề xuất và giải bài toán trên trong trường hợp tam giác ABC là vuông cân hoặc có góc bằng 120^0.

2) Hàm số phân thức

✪Thí dụ 3. *Cho hàm số*

$$y = \frac{x^2 - (3m+2)x + m + 4}{x - 1}.$$

Tìm m để hàm số có CĐ và CT và khoảng cách giữa hai điểm CĐ, CT của đồ thị nhỏ hơn 3.

Lời giải. Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + 2m - 2}{(x-1)^2}$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m < \dfrac{3}{2}$. Giả sử đồ thị có các điểm CĐ, CT là $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$. Khi đó

$y_1 = 2x_1 - 3m - 2$; $\quad y_2 = 2x_2 - 3m - 2$.

Theo định lí Viète $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = 2m - 2$.

Ta có $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5(x_1 - x_2)^2$

$AB^2 = 5\,[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 60 - 40m$

$AB < 3 \Leftrightarrow AB^2 = 60 - 40m < 9 \Leftrightarrow m > \dfrac{51}{40}$.

Đáp số: $\dfrac{51}{40} < m < \dfrac{3}{2}$.

✪Thí dụ 4. *Cho hàm số* $y = \dfrac{x^2 + mx + 3}{x + 1}$.

Tìm m để hàm số có CĐ và CT đồng thời hai điểm CĐ, CT của đồ thị nằm về hai phía của đường thẳng (d): $2x + y - 1 = 0$.

Lời giải. $y' = \dfrac{x^2 + 2x + m - 3}{(x+1)^2}$.

Hàm số có CĐ, CT khi $m < 4$. Giả sử đồ thị có điểm CĐ, CT là $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$.

Ta có $y_1 = 2x_1 + m$; $\quad y_2 = 2x_2 + m$.

A, B nằm về hai phía của đường thẳng (d) khi:

$(2x_1 + y_1 - 1)(2x_2 + y_2 - 1) < 0$

$\Leftrightarrow (4x_1 + m - 1)(4x_2 + m - 1) < 0$

$\Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(m-1)(x_1 + x_2) + (m-1)^2 < 0$.

Theo định lí Viète $x_1 + x_2 = -2$; $x_1x_2 = m - 3$.

Thay vào BPT trên, ta được $m^2 + 6m - 39 < 0$

$\Rightarrow -3 - 4\sqrt{3} < m < -3 + 4\sqrt{3}$.

Lưu ý. Hai điểm A, B nằm về hai phía của đường $f(x,y) = 0$ khi $f(x_1,y_1).f(x_2,y_2) < 0$.

✪Thí dụ 5. *Cho hàm số*

$$y = \frac{x^2 - (m+3)x + 3m + 1}{x - 1}.$$

Tìm m để hàm số có CĐ và CT và các giá trị CĐ, CT của hàm số cùng âm.

Lời giải. $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 2m + 2}{(x-1)^2}$.

Hàm số có CĐ và CT khi $m > \dfrac{1}{2}$. Giả sử đồ thị có điểm CĐ và CT là $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$.

Ta có $y_1 = 2x_1 - m - 3$; $\quad y_2 = 2x_2 - m - 3$.

Theo định lí Viète $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = -2m + 2$.

Từ đó $\begin{cases} y_1 + y_2 = -2m - 2 \\ y_1y_2 = m^2 - 6m + 5. \end{cases}$

Ta có $y_{CĐ} < 0$, $y_{CT} < 0$ khi

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -2m - 2 < 0 \\ y_1y_2 = m^2 - 6m + 5 > 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên và kết hợp với điều kiện $m > \dfrac{1}{2}$, ta được $\dfrac{1}{2} < m < 1$ hoặc $m > 5$.

Bài tập làm thêm

Bài 1. Cho hàm số $y = (x - m)^2(x - 1)$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và tìm quỹ tích điểm cực tiểu của đồ thị.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + 1$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $\dfrac{y_{CĐ}}{x_{CĐ}} + \dfrac{y_{CT}}{x_{CT}} < 3$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - (2m+5)x + m + 3}{x + 1}$.

Tìm m để hàm số có cực trị tại điểm $x > 1$. Hãy xác định đó là điểm cực đại hay cực tiểu của đồ thị.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy hai số để giải toán

TRẦN TUẤN ANH
*(Khoa Toán - Tin, ĐHKHTN
ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)*

Trước hết ta nhắc lại các dạng bất đẳng thức (BĐT) Cauchy hai số thường gặp:

Dạng 1. $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi khi và chỉ khi $a = b$.

Dạng 2. $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ với $a \ge 0,\ b \ge 0$ (2)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bây giờ ta ứng dụng BĐT Cauchy hai số để giải các bài toán sau đây.

✪Bài toán 1. *Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a \ge c$, $b \ge c$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}} \le 1.$$

Áp dụng BĐT (2) ta có

$$\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{a}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{b}-\frac{c}{a}\right),$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right).$$

Cộng theo vế hai BĐT trên ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{c}{b}=\dfrac{a-c}{a}$ và $\dfrac{c}{a}=\dfrac{b-c}{b}$. Tức là $c=\dfrac{ab}{a+b}$.

✪Bài toán 2. *Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng* $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a} \ge \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với $a^3+b^3 \ge ab\sqrt{2(a^2+b^2)}$,

hay $(a+b)(a^2+b^2-ab) \ge \sqrt{ab}.\sqrt{2ab(a^2+b^2)}$.

Áp dụng các BĐT (1) và (2) ta có

$0<\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ và

$$0<\sqrt{2ab(a^2+b^2)} \le \frac{2ab+(a^2+b^2)}{2} \le a^2+b^2 \le 2(a^2+b^2-ab).$$

Nhân theo vế hai BĐT trên ta có BĐT cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b > 0$.

✪Bài toán 3. *Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+7(a+b) \ge 8\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với $a^3+b^3+7ab(a+b) \ge 8ab\sqrt{2(a^2+b^2)}$

hay $(a+b)(a^2+b^2+6ab) \ge 8\sqrt{ab}.\sqrt{2ab(a^2+b^2)}$ (3)

Áp dụng các BĐT (1) và (2) ta có

$$0<\sqrt{2ab.(a^2+b^2)} \le \frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (3) đúng nếu ta có

$$(a+b)(a^2+b^2+6ab)\ge 4\sqrt{ab}(a+b)^2$$

hay $(a+b)^2+4ab \ge 4\sqrt{ab}(a+b)$.

Áp dụng BĐT (2) ta có

$$(a+b)^2+4ab\ge 2\sqrt{(a+b)^2.4ab}=4\sqrt{ab}.(a+b).$$

Từ đó ta có BĐT cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a>0,\ b>0 \\ 2ab=a^2+b^2 \\ (a+b)^2=4ab \end{cases}$.

Tức là $a=b>0$.

✪Bài toán 4. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(a-\frac{a^3}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b^3}{b^2+c^2}\right)+\left(c-\frac{c^3}{c^2+a^2}\right)\le\frac{a+b+c}{2}.$$

hay $\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}+\dfrac{bc^2}{b^2+c^2}+\dfrac{ca^2}{c^2+a^2}\le\dfrac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng BĐT (1) ta có

$\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}=b.\dfrac{ab}{a^2+b^2}\le b.\dfrac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2)}$ nên

$\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\le\dfrac{b}{2}$.

Tương tự $\dfrac{bc^2}{b^2+c^2}\le\dfrac{c}{2}$ và $\dfrac{ca^2}{c^2+a^2}\le\dfrac{a}{2}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

✪Bài toán 5. *Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $abc\ge 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\ge 0.$$

(Thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 46 – năm 2005)

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(1-\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}\right)+\left(1-\frac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2}\right)+$$
$$+\left(1-\frac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2}\right)\le 3$$

hay $\dfrac{1}{a^5+b^2+c^2}+\dfrac{1}{b^5+c^2+a^2}+\dfrac{1}{c^5+a^2+b^2}$

$$\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2} \qquad (4)$$

Từ $abc\ge 1$ và áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}\le\frac{1}{\frac{a^5}{abc}+b^2+c^2}=\frac{1}{\frac{a^4}{bc}+b^2+c^2}$$

$$\le\frac{1}{\frac{2a^4}{b^2+c^2}+b^2+c^2}=\frac{b^2+c^2}{2a^4+(b^2+c^2)^2}.$$

Do $4u^2+v^2\ge 4uv \Leftrightarrow 4u^2+v^2\ge\frac{2}{3}(u+v)^2$ nên

$$2a^4+(b^2+c^2)^2\ge\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Suy ra $\dfrac{1}{a^5+b^2+c^2}\le\dfrac{3(b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2}$.

Tương tự $\dfrac{1}{b^5+c^2+a^2}\le\dfrac{3(c^2+a^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2}$,

$$\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\frac{3(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên, ta được BĐT(4).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cuối cùng, mời các bạn áp dụng BĐT Cauchy hai số để giải quyết các bài toán sau đây.

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

1) *Nếu $a+b+c=1$ thì*

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\le\frac{3}{2};$$

2) $(ab+c^2)(bc+a^2)(ca+b^2)\ge abc(a+b)(b+c)(c+a)$;

3) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{a+b}+1$.

Khảo sát sự tương giao của ĐƯỜNG TRÒN và ĐƯỜNG THẲNG để giải hệ có tham số

HOÀNG TUẤN DOANH
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Bài toán giải và biện luận hệ có tham số tương đối phức tạp đối với học sinh, đặc biệt là hệ chứa bất phương trình. Tuy nhiên, trong một số bài tập nếu ta sử dụng phương trình và tính chất của đường tròn (hình tròn) trong mặt phẳng tọa độ để khảo sát sự tương giao giữa các hình thì bài toán nói trên trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Sau đây xin nêu một vài thí dụ.

Bài 1. *Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x\le 2 & (1)\\ x-y+a=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 3$. Bất phương trình này biểu diễn hình tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Phương trình (2) biểu diễn một đường thẳng.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì đường thẳng Δ: $x-y+a=0$ tiếp xúc với đường tròn có PT: $(x-1)^2+y^2=3 \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|1-0+a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow a=-1-\sqrt{6}$ hoặc $a=-1+\sqrt{6}$.

Bài 2. *Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1\\ x+y\le 1.\end{cases}$$

Lời giải. Hệ trên tương đương với

$$\begin{cases}\sqrt{2xy+m}\ge 1-(x+y)\\ x+y\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2xy+m\ge (1-(x+y))^2\\ x+y\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2\le m+1 & (3)\\ x+y\le 1 & (4)\end{cases}$$

Với $m+1\le 0$ hay $m\le -1$, hệ vô nghiệm.

Với $m+1>0$ hay $m>-1$, BĐT (3) biểu diễn hình tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{m+1}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

BPT (4) biểu diễn nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $x+y=1$. Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $x+y=1$ tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=m+1$. Khi đó $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 3. *Tìm a để hệ sau có nghiệm:*

$$\begin{cases}4x-3y+2\le 0\\ x^2+y^2=a.\end{cases}$$

Lời giải. Nếu $a\le 0$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $a>0$ thì số nghiệm của hệ (nếu có) là số giao điểm của nửa mặt phẳng biểu diễn bởi $4y-3x+2\le 0$ và đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=\sqrt{a}$. Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{a}\ge OH \Leftrightarrow a\ge \dfrac{4}{25}$ (với H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống đường thẳng $4y-3x+2=0$).

Bài 4. *Cho hệ*

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2\le 2 & (5)\\ x-y+m=0 & (6)\end{cases}$$

Xác định m để hệ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;2]$.

Lời giải. Tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn (5) là các điểm nằm trong và trên đường tròn $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, với tâm $I(1;1)$ bán kính $R=\sqrt{2}$. Tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn (6) là các điểm nằm trên đường thẳng Δ có PT: $x-y+m=0$.

Giả sử $A\in\Delta$ sao cho $x_A=0$ thì $A(0;m)$;
$B\in\Delta$ sao cho $x_B=2$ thì $B(2;2+m)$.

Để hệ có nghiệm với mọi $x\in[0;2]$ thì đoạn thẳng AB nằm trong đường tròn $(I;R)$. Lúc đó

$$\begin{cases}IA\le R\\ IB\le R\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(0-1)^2+(m-1)^2\le 2\\ (2-1)^2+(2+m-1)^2\le 2\end{cases}\Leftrightarrow m=0.$$

Bài 5. *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=0 & (7)\\ x+ay-a=0 & (8)\end{cases}$$

Tìm a để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải. PT (7) $\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$.

Vậy tập nghiệm của PT (7) là tọa độ những điểm nằm trên đường tròn tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$. Tập nghiệm của PT (8) là toạ độ những điểm nằm trên đường thẳng $x+ay-a=0$. Họ đường thẳng này luôn qua điểm $A(0;1)$ cố định. Ta có A nằm ngoài đường tròn $(I;R)$, từ A dựng hai tiếp tuyến với đường tròn $(I;R)$.

Phương trình hai tiếp tuyến đó là: $x=0$ và $x+\dfrac{4}{3}y-\dfrac{4}{3}=0$ cũng luôn đi qua $A(0;1)$.

Để hệ có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng $x+ay-a=0$ phải cắt đường tròn $(I;R)$ tại hai điểm phân biệt. Vậy đường thẳng $x+ay-a=0$ phải nằm giữa hai tiếp tuyến trên. Lúc đó $0<a<\dfrac{4}{3}$.

Thông qua các thí dụ trên nhận thấy rằng: Khi sử dụng phương trình và tính chất của đường tròn (hình tròn) xét sự tương giao giữa các hình, ta đã đưa các bài toán biện luận hệ về một dạng toán đơn giản và quen thuộc hơn với học sinh. Sau đây là một số bài tập tương tự để các bạn luyện tập thêm :

Bài 1. Tìm các số dương a để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^2+y^2=1-a^2\\ x+y>a.\end{cases}$$

Bài 2. Tìm a để mỗi hệ sau có nghiệm:

a) $\begin{cases}x^2+y^2=1-a^2\\ x+y>a;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\log_{x^2+y^2}(x+y)\ge 1\\ x+2y=a.\end{cases}$

Bài 3. Giả sử $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$ là hai nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=0\\ x+ay-a=0.\end{cases}$$

Chứng minh rằng $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\le 1$.

Bài 4. Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}x^2+y^2+2y+1\le a\\ x^2+y^2+2x+1\le a.\end{cases}$$

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Một câu chuyện dài về một bất đẳng thức nổi tiếng

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV ĐHSP Hà Nội) sưu tầm

Trong các bất đẳng thức nổi tiếng, có một bất đẳng thức mà đã thu hút sự chú ý của rất nhiều nhà toán học lừng danh trên thế giới trong suốt một thời gian nửa thế kỉ. Đó là bất đẳng thức Shapiro (ông đã nêu bài toán này trên tạp chí toán nổi tiếng American Mathematical Monthly vào năm 1954) mà chúng ta thường hay gọi là bất đẳng thức Nesbit (Nasơbít) và được phát biểu như sau

Với mọi $x_i \geq 0$, $x_i + x_{i+1} > 0$ $(i = 1, \dots, n)$, $x_{n+i} = x_i$ *thì*

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \qquad (1)$$

dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu các mẫu số của các phân thức bằng nhau, tức là $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Nó nổi tiếng đến mức mà trong năm 1990, tại hội nghị toán học Oberwolfach về các bất đẳng thức, các nhà toán học đã phải nhắc lại toàn bộ lịch sử chứng minh lâu dài của nó mà đôi khi được xem là vô vọng. Bất đẳng thức Shapiro tuy với vẻ bề ngoài cực kì đơn giản nhưng để chứng minh nó là điều vô cùng khó, do chúng ta phải xét một số lượng rất lớn các trường hợp riêng biệt. Điều này không làm cho chúng ta ngạc nhiên, bởi vì *bất đẳng thức Shapiro không đúng với mọi số tự nhiên n.* Do khuôn khổ bài báo này, chúng tôi chỉ cố gắng trình bày tóm tắt lại các kết quả quan trọng của các nhà toán học liên quan đến bất đẳng thức này mà không đề cập chi tiết đến các chứng minh bởi vì trong một số trường hợp việc chứng minh đòi hỏi phải sử dụng đến các kiến thức của toán cao cấp vượt ra ngoài chương trình toán phổ thông.

Ngược dòng lịch sử có lẽ là nhà toán học Nesbit là người đầu tiên đã đề cập đến bất đẳng thức này cho trường hợp $n = 3$. Sau đây là một chứng minh rất đơn giản cho trường hợp này.

Đặt $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_1$, $y_3 = x_1 + x_2$.

Từ bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(y_1 + y_2 + y_3)\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}\right) \geq 9$$

hay $\dfrac{y_2 + y_3}{y_1} + \dfrac{y_3 + y_1}{y_2} + \dfrac{y_1 + y_2}{y_3} \geq 6$

và vì vậy $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_3 + x_1} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \dfrac{3}{2}$.

Một điều thú vị là khi $n = 3$, (1) sẽ có dạng tương đương như sau:

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \qquad (2)$$

Bất đẳng thức trên có thể chứng minh bằng cách sử dụng tính đơn điệu của $M_t = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^t\right)^{\frac{1}{t}}$ theo t.

Tuy nhiên, khi $n > 3$ việc chứng minh sẽ không còn dễ dàng như trên. Mãi đến năm 1958, Mordell đã đưa ra một chứng minh (1) cho $n \leq 6$, đơn giản nhưng lại rất sáng tạo như sau: Đặt $y_i = x_{i+1} + x_{i+2}$ với các chỉ số được lấy một cách tuần hoàn.

Do $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x_j}{y_j}$

nên bất đẳng thức sau đúng thì bất đẳng thức (1) cũng đúng.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (3)$$

Nếu $n = 4$ thì (3) sẽ trở thành $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 \geq$

$\geq 2[x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_1)+x_4(x_1+x_2)]$.

Qua một vài tính toán đơn giản ta có

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2 \geq 0.$$

Vì vậy (3) đúng cho $n = 4$.

Trường hợp $n = 5$ được rút ra từ bất đẳng thức sau: $$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j} x_i y_j \qquad (4)$$

và bất đẳng thức này đúng cho mọi n và mọi x_i thực. Khi $n = 5$, ta có hệ thức sau:

$\sum_{i<j} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ và $\frac{2n}{n-1} = \frac{n}{2}$. Vì vậy (4) tương đương với (3).

Sau cùng khi $n = 6$ thì (3) được rút ra từ một bất đẳng thức mà chúng ta đã biết

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \geq \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 \qquad (5)$$

Đặt $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, ta xét

$$\begin{aligned}
& 3[x_1(x_2+x_3)+\ldots+x_6(x_1+x_2)] \\
= \; & 3\left(\sum_{i<j} x_i x_j - x_1x_4 - x_2x_5 - x_3x_6\right) \\
= \; & \frac{3}{2}\left(S_6^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_5 - 2x_3x_6\right) \\
= \; & \frac{3}{2}\{S_6^2 - [(x_1+x_4)^2+(x_2+x_5)^2+(x_3+x_6)^2]\}.
\end{aligned}$$

Vì vậy (3) tương đương với

$$(x_1+x_4)^2+(x_2+x_5)^2+(x_3+x_6)^2$$
$$\geq \frac{1}{3}[(x_1+x_4)+(x_2+x_5)+(x_3+x_6)]^2$$

Kết quả này đúng theo bất đẳng thức (5) với $m = 3$.

Đây là một chứng minh rất đẹp cho trường hợp $n \leq 6$. Tuy nhiên, chúng ta không thể áp dụng cách chứng minh của Mordell như thế cho trường hợp $n > 6$ bởi vì bất đẳng thức (3) không còn đúng nữa. Mordell cũng đã chứng minh cho trường hợp $n \geq 7$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 3\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Hằng số 3 là ước lượng tốt nhất có nghĩa là bạn không thể thay nó bằng giá trị lớn hơn. *Mordell đã giả định rằng bất đẳng thức Shapiro sẽ không đúng với mọi* $n \geq 7$. Năm 1956, Lighthill lần đầu tiên đã tìm ra một phản ví dụ cho bất đẳng thức này với $n = 20$. Hai năm sau, ngoài Mordell, Zulauf và Rankine cũng tìm ra một phản ví dụ cho $n = 14$. Zulauf cũng đã tìm ra kết quả sau:

$$S_{n+2}(x_1,\ldots,x_n,x_{n-1},x_n) = S_n(x_1,\ldots,x_n)+1 \qquad (6)$$

Từ đây ông nhận xét rằng nếu tìm được một phản ví dụ cho (1) với n nào đó, thì cũng sẽ có các phản ví dụ khác cho $n + 2$, $n + 4$,....

Năm 1959, Zulauf lại cho thêm một phản ví dụ khác với $n = 53$. Năm 1963, Diananda tìm được kết quả khác:

$$\begin{aligned}
& S_{n+2}(x_1,\ldots,x_n,x_n) \\
= \; & S_n(x_1,\ldots,x_n) + \frac{1}{2} - \frac{(x_n-x_{n+1})(x_n-x_1)}{2x_n(x_n+x_1)}
\end{aligned}$$

Do đó, nếu với một bộ giá trị $(x_1, \ldots, x_n)$ nào đó ta có $S_n(x_1, \ldots, x_n) \leq \frac{n}{2}$ và có một giá trị r nào đó, $1 \leq r \leq n$, để mà x_{r-1}, x_r, x_{r+1} (chỉ số tuần hoàn) đơn điệu (chúng ta có thể giả sử rằng $r = n$), thì sẽ dẫn đến sự đúng đắn của bất đẳng thức $S_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,x_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Với n lẻ rõ ràng rằng luôn luôn có một giá trị r như thế do chuỗi tuần hoàn có độ dài lẻ không thể chuyển giữa sự tăng và sự giảm ở mọi vị trí. Diananda rút ra được định lí sau

• **Định lí.** *Nếu (1) sai với* $n = n_0$ *lẻ nào đó, thì nó sẽ sai cho mọi* $n \geq n_0$. *Nếu (1) đúng cho* $n = n_0$ *chẵn nào đó thì nó cũng sẽ đúng cho mọi* $n \leq n_0$.

Cùng với định lí này ông đã đưa ra một phản ví dụ cho (1) với $n = 27$. Điều này có nghĩa là (1) sai với mọi n lẻ ≥ 27. Cùng một lập luận như đã được sử dụng trong định lí Diananda cũng cho ta thấy với n chẵn, dấu bằng của (1) xảy ra ở mọi điểm

$$x^{\alpha} = \frac{1}{2}(1+\alpha, 1-\alpha, \ldots, 1+\alpha, 1-\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 1),$$

trong khi với n lẻ nó chỉ xảy ra với $x^0 = (1, \ldots, 1)$.

Cùng lúc này Djokovic đã chứng minh rằng (1) đúng cho $n = 8$ và Bajsanski chứng minh (1) cũng đúng cho $n = 7$. Năm 1968, Nowosad đã chứng minh (1) đúng cho $n = 10$ và vì vậy theo lí thuyết trên bất đẳng thức Shapiro cũng đúng cho $n = 9$. Do đó cho đến lúc này, chỉ còn lại có 10 trường hợp chưa được xác định là $n = 12$ đối với n chẵn và $n = 9, 11, \ldots, 25$ cho n lẻ. Năm 1971, Daykin và Malcoln đã chứng minh (1) sai với $n = 25$ và Kristiansen cũng đã chứng minh (1) đúng cho $n = 12$, và vì vậy đúng cho $n = 11$. Vào năm này Drinfeljd đã đưa ra một chứng minh rất ngắn gọn, sơ cấp mà lại sáng tạo. Đồng thời ông chỉ ra rằng bất đẳng thức sau là bất đẳng thức Shapriro đúng với mọi n:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2} \cdot 0{,}989133\ldots$$

Việc chứng minh bất đẳng thức trên dựa theo một định lí nổi tiếng và một bất đẳng thức hoán vị sau đây.

• **Định lí**. *Nếu đặt $g(x)$ là một bao lồi dưới của hai hàm lồi giảm $f(x) = 2\left(e^x + e^{\frac{x}{2}}\right)^{-1}$ và $h(x) = e^{-x}$ thì $\inf \frac{2}{n} S_n(x_1, \ldots, x_n) \geq g(0)$ đúng với mọi n.*

Giá trị thực của $g(0)$ rất gần với 1: $g(0) =$ 0,989133... và nó không phải là một số đại số.

* **Bất đẳng thức hoán vị.** *Nếu $a_1 \leq \ldots \leq a_n$ và $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ thì đối với bất kỳ hoán vị $\{k_1, \ldots, k_n\}$ nào của các chỉ số, ta có bất đẳng thức sau:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{k_i} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Có lẽ rằng nhờ bài báo nổi tiếng này mà Drinfeljd đã nhận được giải thưởng Fields vào năm 1990.

Việc tìm miền đúng của (1) đã kéo dài gần 20 năm sau đó. Bắt đầu vào năm 1976, Godunova và Leni đã chứng minh (1) đúng cho $n = 12$. Cùng lúc này Bushell cũng đã đưa ra một phản ví dụ khác cho $n = 25$ và ông cũng đưa ra một chứng minh sơ cấp mới với $n = 7$. Bushell cùng với Craven đã chứng minh rằng (1) đúng với mọi n lẻ ≤ 23. Năm 1979, Troesch và Searcy đã xét bài toán đại số các giá trị riêng tương ứng và chứng minh một kết quả nổi tiếng rằng: *Bất đẳng thức* (1) *không đúng với mọi* $n \geq 14$. *Bằng cách dùng máy tính số, ông đã chỉ ra rằng* (1) *đúng với mọi n chẵn* ≥ 12 *và n lẻ* ≤ 23. Năm 1985, trong tạp chí Math. Computing, Troesch đã thành công trong việc đưa ra một chứng minh (1) đúng cho $n = 13$ và đến năm 1989 ông mới chứng minh được cho $n = 23$. Như vậy (1) đã được chứng minh cho tất cả các giá trị n còn lại là 15, 17, 19 và 21.

Gần 40 năm sau khi Shapiro đề xuất bài toán, chính Troesch đã là người kết thúc một giai đoạn lịch sử kéo dài cho việc chứng minh bất đẳng thức nổi tiếng này khi mà ông thông qua việc giải bài toán với $n = 23$ và đã hoàn thành việc chứng minh (1) với kết quả nổi tiếng như sau:

Bất đẳng thức (1) đúng với mọi n chẵn ≤ 12 và n lẻ ≤ 23. Với mọi giá trị khác của n thì (1) sai.

Sau ông một số nhà toán khác như Diananda, Mordell và Daykin cũng đã đề xuất một số bài toán mở rộng. Năm 1992, Achim Clausing đã đề nghị bài toán sau:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+2} + x_{i+3}} \geq \left[\frac{n}{3}\right]$$

với $[a]$ là phần nguyên của a.

Có lẽ đây lại là một thách thức lớn nữa cho các nhà toán học trẻ trong thế kỉ XXI này.

(*Theo tạp chí toán* ***International Series of Numerical Mathematics****, 1992*)

Giải một số phương trình vô tỉ có dạng đặc biệt

NGUYỄN PHƯỚC
(GV THCS Lê Hồng Phong, Thừa Thiên - Huế)

Trong các kì thi học sinh giỏi cấp THCS hoặc tuyển sinh vào các trường THPT ta thường gặp các dạng phương trình vô tỉ. Ngoài một số cách giải đã được trình bày ở sách giáo khoa, chúng tôi xin được tập hợp cách giải một số phương trình vô tỉ có dạng đặc biệt để giới thiệu cùng bạn đọc.

1. Phương trình dạng

$$\alpha.P(x)+\beta.Q(x)+\gamma.\sqrt{P(x).Q(x)}=0\ (\alpha\beta\gamma\neq 0)$$

a) Cách giải

* Nếu $P(x)=0$ thì $Q(x)=0$. Dẫn đến giải hệ

$$\begin{cases}P(x)=0\\Q(x)=0.\end{cases}$$

* Trường hợp $P(x)\neq 0$, ta chia hai vế của PT cho $P(x)$ được $\alpha+\beta.\dfrac{Q(x)}{P(x)}+\gamma.\sqrt{\dfrac{Q(x)}{P(x)}}=0$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{Q(x)}{P(x)}}$ $(t\geq 0)$. Phương trình trở thành $\beta t^2+\gamma t+\alpha=0$. Từ đó tìm t, rồi tìm x.

b) Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8} \qquad (1)$$

Lời giải. Biến đổi PT (1) về dạng

$$2\left(x^2-2x+4\right)-2(x+2)=3\sqrt{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}.$$

Điều kiện: $x\geq -2$ (vì $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$).

Do $x=-2$ không phải là nghiệm của PT (1) nên chia hai vế cho $x+2$ ta được

$$\frac{2\left(x^2-2x+4\right)}{x+2}-3\sqrt{\frac{x^2-2x+4}{x+2}}-2=0.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}}$ $(t\geq 0)$ ta có

$2t^2-3t-2=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$ (loại) hoặc $t=2$.

Với $t=2$ thì $\sqrt{\dfrac{x^2-2x+4}{x+2}}=2\Leftrightarrow x^2-6x-4=0$

$\Leftrightarrow x=3+\sqrt{13}$ hoặc $x=3-\sqrt{13}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của PT (1) là $\{3\pm\sqrt{13}\}$.

2. Phương trình dạng

$$\alpha\left(P(x)+Q(x)\right)+\beta\left(\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}\right)$$
$$\pm 2\alpha\sqrt{P(x).Q(x)}+\gamma=0\ (\alpha^2+\beta^2\neq 0)$$

a) Cách giải. Đặt $t=\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}$ thì $t^2=P(x)+Q(x)\pm 2\sqrt{P(x).Q(x)}$.

Phương trình trên trở thành $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$.

Do α và β không đồng thời bằng 0 nên $\alpha t^2+\beta t+\gamma=0$ trở thành phương trình bậc nhất hoặc bậc hai của t. Giải PT tìm t rồi thay $t=\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}$ để tìm nghiệm của phương trình.

b) Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16 \qquad (2)$$

Lời giải. Biến đổi PT (2) về dạng

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2x+3+x+1+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}-20.$$

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}$ $(t\geq 0)$ thì

$$t^2=3x+4+2\sqrt{2x+3}\sqrt{x+1}.$$

Dẫn đến $t^2-t-20=0\Leftrightarrow t=-4$ (loại) hoặc $t=5$.

Thay $t=5$ vào $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}$ ta được

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Ứng dụng số phức để giải toán tổ hợp

TRẦN VIỆT ANH
(Học viện Quản lí GD)

Chúng ta đã biết rằng số phức có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực toán học như hình học, đại số, ... Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu một số kết quả của việc ứng dụng số phức về toán tổ hợp. Trong bài viết, ta kí hiệu $\binom{n}{k}$, $S(X)$ và $|X|$ lần lượt là số tổ hợp chập k của n phần tử, tổng tất cả các phần tử của tập hợp hữu hạn X và số các phần tử của tập hợp hữu hạn X trừ những trường hợp khác được chỉ rõ.

1. Kiến thức chuẩn bị

Ta luôn giả thiết p là một số nguyên tố lẻ trừ những trường hợp được chỉ rõ.

• Phương trình $x^p=1$ có đúng p nghiệm phức phân biệt là $x_k=\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}$, với $k=0, 1, ..., p-1$ và phương trình $x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1=0$ có đúng $p-1$ nghiệm phân biệt là

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p} \text{ với } k=1, 2, ..., p-1.$$

• Gọi α là một nghiệm bất kì của phương trình $x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1=0$ thì tập nghiệm của phương trình $x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1=0$ là $\{\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{p-1}\}$ và $(\alpha^n, \alpha^{2n}, ..., \alpha^{(p-1)n})$ là một hoán vị của $(\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{p-1})$, trong đó n là số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với p.

• Cho đa thức $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ và số nguyên dương m. Ta có

$$\sum_{j=0}^{m-1}f(z^j)=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}a_kz^{jk}=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{j=0}^{m-1}z^{jk},$$

với $z=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$.

Từ $\sum_{j=0}^{m-1}z^{jk}=\begin{cases} m & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } m,\\ 0 & \text{nếu } k \text{ không chia hết cho } m,\end{cases}$

suy ra tổng của các số a_k, với k chia hết cho m bằng $\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}f(z^j)$.

• Cho m, k là hai số nguyên dương với $m>1$, khi đó

$$\sum_{j=1}^{m-1}e^{\frac{-2\pi kji}{m}}=\begin{cases} m-1 & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } m,\\ -1 & \text{nếu } k \text{ không chia hết cho } m,\end{cases}$$

2. Một số bài toán

Bài 1. *Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n nguyên tố cùng nhau với p. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên sao cho tổng $x_1+2x_2+...+(p-1)x_{p-1}$ chia hết cho p, trong đó mỗi số $x_1, x_2, ..., x_{p-1}$ đều không lớn hơn $n-1$.*

Lời giải. Xét đa thức $f(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$ và đặt $F(x)=f(x)f(x^2)...f(x^{p-1})$.

Bằng cách triển khai đa thức $F(x)$, ta có thể viết $F(x)=\sum_{k=0}^{\frac{(n-1)p(p-1)}{2}}a_kx^k$, trong đó a_k là số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_{p-1})$, với mỗi $x_j\in\{0, 1, ..., n-1\}$ sao cho $x_1+2x_2+...+(p-1)x_{p-1}=k$. Vậy số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên thỏa mãn điều kiện bài toán, bằng tổng của các số

a_k với k chia hết cho p. Ta biết rằng tổng của các số a_k với k chia hết cho p bằng $\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}F(\alpha^j)$, với $\alpha = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$.

Chú ý rằng $f(x) = \frac{x_n - 1}{x-1}$ nếu $x \neq 1$ và $\alpha^{kj} \neq 1$ với $k, j = 1, 2, ..., p-1$. Do đó $f(\alpha^{kj}) = \frac{\alpha^{nkj}-1}{\alpha^{kj}-1}$ với $k, j = 1, 2, ..., p-1$. Nhân các đẳng thức ở trên với $k = 1, 2, ..., p-1$, ta được

$$F(\alpha^j) = f(\alpha^j)f(\alpha^{2j})...f(\alpha^{(p-1)j})$$
$$= \frac{(\alpha^{nj}-1)(\alpha^{2nj}-1)...(\alpha^{(p-1)nj}-1)}{(\alpha^j-1)(\alpha^{2j}-1)...(\alpha^{(p-1)j}-1)}$$

với $j = 1, 2, ..., p-1$. Vì $(n, p) = 1$ nên $(j, p) = (nj, p) = 1$ với $j = 1, 2, ..., p-1$, do đó $(\alpha^{nj}, \alpha^{2nj}, ..., \alpha^{(p-1)nj})$ và $(\alpha^j, \alpha^{2j}, ..., \alpha^{(p-1)j})$ là những hoán vị của $(\alpha, \alpha^2, ... \alpha^{p-1})$ với $j = 1, 2, ..., p-1$. Vậy với mọi $j = 1, 2, ..., p-1$ thì $F(\alpha^j) = 1$. Chú ý rằng $F(\alpha^0) = F(1) = n^{p-1}$, từ đó số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên thỏa mãn điều kiện bài toán, bằng $\frac{n^{p-1}+p-1}{p}$.

Bài 2. *Cho ba số nguyên dương m, n, p trong đó $n + 2$ chia hết cho m và m lớn hơn p. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $x_1 + x_2 + ... + x_p$ chia hết cho m, trong đó mỗi số $x_1, x_2, ..., x_p$ đều không lớn hơn n.*

Lời giải. Xét đa thức $f(x) = (x^n + x^{n-1} + ... + x)^p$. Bằng cách khai triển đa thức $f(x)$, ta có thể viết $f(x) = \sum_{k=0}^{pn} a_k x^k$, trong đó a_k là các bộ $(x_1, x_2, ..., x_p)$ với mỗi $x_j \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $x_1 + x_2 + ... + x_k = k$. Vậy số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_p)$ gồm p số nguyên dương thỏa mãn điều kiện Bài toán bằng tổng của các số a_k với k chia hết cho m. Ta biết rằng tổng của các số a_k với k chia hết cho m bằng $\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}f(\alpha^j)$, với $\alpha = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$.

Vì m lớn hơn p nên m lớn hơn 1, do đó $\alpha^j \neq 1$ với $j = 1, 2, ..., m-1$. Mặt khác, vì $n + 2$ chia hết cho m nên $\alpha^{(n+2)j} = 1$ với $j = 1, 2, ..., m-1$.

Để ý $f(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1\right)^p$ nếu $x \neq 1$. Do đó với $j = 1, 2, ..., m-1$ thì

$$f(\alpha^j) = \left(\frac{\alpha^{(n+1)j}}{\alpha^j - 1} - 1\right)^p = \left(\frac{\alpha^{(n+2)j} - \alpha^j}{\alpha^j(\alpha^j - 1)} - 1\right)^p$$
$$= \left(\frac{1-\alpha^j}{\alpha^j(\alpha^j-1)} - 1\right)^p = (-1)^p\left(\frac{1}{\alpha^j} + 1\right)^p$$
$$= (-1)^p\left(e^{\frac{-2\pi j i}{m}} + 1\right)^p = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}e^{\frac{-2\pi kji}{m}}$$

Từ đó $f(\alpha^j) = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}e^{\frac{-2\pi kji}{m}}$, với $j = 1, 2, ..., m-1$.

Lấy tổng các đẳng thức ở trên với $j = 1, 2, ..., m-1$, ta được

$$\sum_{j=1}^{m-1}f(\alpha^j) = (-1)^p\left(\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\sum_{j=1}^{m-1}e^{\frac{-2\pi kji}{m}} + m - 1\right).$$

Chú ý rằng k không chia hết cho m, với $k = 1, 2, ..., p$. Vì $m > p$ và

$$\sum_{j=1}^{m-1}e^{\frac{-2\pi kji}{m}} = \begin{cases} m-1 & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } m, \\ -1 & \text{nếu } k \text{ không chia hết cho } m, \end{cases}$$

ta có $\sum_{j=1}^{m-1}f(\alpha^j) = (-1)^p\left(-\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k} + m - 1\right)$

$$= (-1)^p\left(-\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} + m\right) = (-1)^p(m - 2^p).$$

Chú ý rằng $f(\alpha^0) = f(1) = n^p$, vậy số các bộ bộ $(x_1, x_2, ..., x_p)$ gồm p số nguyên dương thỏa mãn điều kiện của bài toán, bằng

$$\frac{n^p + (-1)^p(m-2^p)}{m} = \frac{n^p - (-2)^p}{m} + (-1)^p.$$

Cuối cùng, chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán có thể giải quyết nhờ sử dụng công cụ số phức.

Bài 3. *Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_{p-1})$ gồm $p-1$ số tự nhiên sao cho tổng $x_1 + 2x_2 + ... + (p-1)x_{p-1}$ chia hết cho p, trong đó mỗi số $x_1, x_2, ..., x_{p-1}$ đều không lớn hơn $n-1$.*

Bài 4. *Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n lớn hơn $2p$. Tìm số tập con X của tập $\{1, 2, ..., n\}$, biết rằng X chứa đúng $2p$ phần tử và tổng tất cả các phần tử của X chia hết cho p.*

Bài 5. *Cho hai số nguyên dương m và n trong đó $n + 2$ chia hết cho m. Hãy tính số các bộ năm số nguyên dương (x, y, z, v, t) thỏa mãn điều kiện tổng $x + y + z + v + t$ chia hết cho m, trong đó mỗi số x, y, z, v, t đều không lớn hơn n.*

Bài 6. *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con X của tập $\{1, 2, ..., 2p+1\}$, biết rằng X chứa đúng p phần tử và tổng tất cả các phần tử của X khi chia cho p có số dư bằng 1.*

Bất đẳng thức CAUCHY-BUNYAKOVSKI-SCHWARZ

GABRIEL DOSPINESCU - TRẦN NAM DŨNG

Cùng với các bất đẳng thức (BĐT) giữa trung bình cộng và trung bình nhân, Schur, Jensen và Hölder, BĐT Cauchy-Bunyakovski-Schwarz (CBS) là một kết quả kinh điển, có nhiều ứng dụng. Câu hỏi quan trọng nhất ở đây là làm sao ta nhận biết được một bất đẳng thức có thể giải bằng phương pháp này? Rất khó có thể nói một cách rõ ràng, nhưng có lẽ là nên nghĩ đến BĐT CBS khi ta thấy tổng của các căn thức, tổng của các bình phương hay đặc biệt là khi ta có các biểu thức chứa căn.

Đầu tiên, ta sẽ xét một số bài toán mà trong lời giải áp dụng BĐT CBS ở dạng kinh điển:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Khó khăn lớn nhất là chọn a_i và b_i. Ta sẽ thấy rằng trong một vài trường hợp, điều này là hiển nhiên, trong vài trường hợp khác lại không đơn giản chút nào. Sau đây chúng ta giải một số bài toán.

★**Thí dụ 1.** *Chứng minh rằng nếu x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện* $x^2+y^2+z^2=2$, *thì bất đẳng thức sau đây đúng:* $x+y+z\le 2+xyz$.

(Đề đề nghị IMO, Ba Lan)

Lời giải. Tại sao ta lại nghĩ đến BĐT CBS? Nguyên nhân là BĐT cần chứng minh có dạng $x(1-yz)+y+z\le 2$ và ta cần phải đánh giá thông qua tổng $x^2+y^2+z^2$. Tuy nhiên, có rất nhiều cách để áp dụng BĐT CBS. Chọn lựa

$$(x(1-yz)+y+z)^2\le (x^2+y^2+z^2)(2+(1-yz)^2)$$

không mấy thành công. Vì thế có thể sẽ tốt hơn nếu coi $y+z$ như một số hạng. Nếu chúng ta để ý rằng bất đẳng thức có dấu bằng chẳng hạn khi $x=1$, $y=1$ và $z=0$, chọn lựa $x(1-yz)+y+z\le\sqrt{(x^2+(y+z)^2)(1+(1-yz)^2)}$ trở nên khá tự nhiên. Như thế cần chứng minh $2(1+yz)(2-2yz+y^2z^2)\le 4 \Leftrightarrow y^3z^3\le y^2z^2$, điều này hiển nhiên vì $2\ge y^2+z^2\ge 2yz$.

Một ứng dụng không tầm thường khác của BĐT CBS là bài toán sau.

★**Thí dụ 2.** *Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện* $ax+by+cz=xyz$. *Chứng minh rằng* $x+y+z>\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

Lời giải. Ta viết $\dfrac{a}{yz}+\dfrac{b}{zx}+\dfrac{c}{xy}=1$ và phép thế $a=yzu$, $b=zxv$ và $c=xyw$ trở nên tự nhiên.

Như vậy, cần chứng minh

$$\sqrt{z(yu+xv)}+\sqrt{x(zv+yw)}+\sqrt{y(zu+xw)}<x+y+z$$

với $u+v+w=1$.

Có thể thấy dạng của BĐT CBS:

$$\left(\sqrt{z(yu+xv)}+\sqrt{x(zv+yw)}+\sqrt{y(zu+xw)}\right)^2$$
$$\le (x+y+z)(yu+yw+xv+xw+zu+zv)$$

và biểu thức cuối cùng nhỏ hơn $(x+y+z)^2$ vì $u+v+w=1$.

Ta thấy có thể áp dụng BĐT CBS khi có các tổng. Thế còn với tích số thì sao? Thí dụ sau sẽ chứng tỏ rằng trong trường hợp này, ta cần có một chút sáng tạo.

★**Thí dụ 3.** *Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương (với $n \ge 2$). Chứng minh rằng*

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)...(a_n^3+1) \ge (a_1^2a_2+1)...(a_n^2a_1+1).$$

(Cuộc thi CH Séc-Slovakia-Ba Lan, 2001)

Lời giải. Ta thử áp dụng BĐT CBS cho mỗi thừa số có mặt ở vế phải. Một cách tự nhiên, ta viết $(1+a_1^2a_2)^2 \le (1+a_1^3)(1+a_2^2a_1)$, vì ta cần $1+a_1^3$, biểu thức có mặt ở vế trái. Tương tự, ta có thể viết

$$(1+a_2^2a_3)^2 \le (1+a_2^3)(1+a_3^2a_2), ...,$$

$$(1+a_n^2a_1)^2 \le (1+a_n^3)(1+a_1^2a_n).$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức này với nhau, ta được

$$\left((a_1^2a_2+1)...(a_n^2a_1+1)\right)^2$$

$$\le (a_1^3+1)...(a_n^3+1)(1+a_2^2a_1)...(1+a_1^2a_n) \qquad (*)$$

Nhưng đây chưa phải là điều ta cần. Như thế BĐT CBS không có hiệu quả cho BĐT này. Không hẳn thế! Ta lại áp dụng lí luận này một lần nữa để có

$$\left((1+a_2^2a_1)...(1+a_1^2a_n)\right)^2$$

$$\le (a_1^3+1)...(a_n^3+1)(a_1^2a_2+1)...(a_n^2a_1+1) \qquad (**)$$

Như thế nếu

$$(a_1^2a_2+1)...(a_n^2a_1+1) \ge (1+a_2^2a_1)...(1+a_1^2a_n),$$

thì (*) sẽ cho chúng ta kết quả, còn nếu ngược lại thì (**) sẽ kết thúc lời giải của chúng ta.□

Bây giờ ta sẽ xem xét những bài toán khó hơn.

★**Thí dụ 4.** *Cho hai số dương x, y sao cho $x^2+y^3 \ge x^3+y^4$. Chứng minh rằng $x^3+y^3 \le 2$.*

(CHLB Nga, 1999)

Lời giải. Ý tưởng ở đây là chặn x^3+y^3 bởi $A(x^3+y^4)$ với A nào đó. Điều này là có lí nếu nhìn vào các luỹ thừa. Ta thử áp dụng vài thủ thuật với BĐT CBS và BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân:

$$(x^3+y^3)^2 \le (x^3+y^4)(x^3+y^2) \le (x^2+y^3)(x^3+y^2)$$

$$\le \left(\frac{x^2+y^2+x^3+y^3}{2}\right)^2.$$

Như vậy ta đã chứng tỏ rằng $x^3+y^3 \le x^2+y^2$. Nhưng $(x^2+y^2)^2 \le (x+y)(x^3+y^3)$ và do đó $x^2+y^2 \le x+y \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$, suy ra $x^2+y^2 \le 2$ và $x^3+y^3 \le 2$.

★**Thí dụ 5.** *Chứng minh rằng nếu x,y,z thuộc đoạn* $[-1\,;\,1]$ *thoả mãn điều kiện $x+y+z+xyz=0$, thì ta có*

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le 3.$$

Lời giải. Đầu tiên ta sẽ áp dụng BĐT CBS ở dạng hiển nhiên:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le \sqrt{3(x+y+z+3)}.$$

Nhưng biểu thức vế phải có nhỏ hơn 3? Có, nếu như $x+y+z \le 0$. Bây giờ ta giả sử rằng $x+y+z > 0$. Khi đó $xyz < 0$. Có thể giả sử $z < 0$. Từ đây ta có $x, y \in (0\,;\,1]$. Ta sẽ không từ bỏ và cố gắng áp dụng BĐT CBS một lần nữa, nhưng lần này là cho hai căn:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le \sqrt{2x+2y+4}+\sqrt{z+1}.$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{2x+2y+4}+\sqrt{z+1} \le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{2+\sqrt{2x+2y+4}} \le \frac{-z}{1+\sqrt{z+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-z(xy+1)}{2+\sqrt{2x+2y+4}} \le \frac{-z}{1+\sqrt{z+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2xy+2(1+xy)\sqrt{1+z} \le \sqrt{2x+2y+4}.$$

Vì $1+z=\dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$, nên tất cả quy về chứng minh $xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} \le \sqrt{1+\dfrac{x+y}{2}}$. Ta muốn sử dụng BĐT CBS thế nào đó để làm mất đi $1-x$ ở vế trái. Cụ thể là

$$xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)}$$

$$= \sqrt{x}\cdot\sqrt{xy^2}+\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+xy-y-xy^2}$$

$$\le \sqrt{1+xy-y} \le 1 \le \sqrt{1+\frac{x+y}{2}}.$$

Có thể thí dụ khó nhất trong các bài toán dạng này là bài toán sau đây.

★**Thí dụ 6.** *Chứng minh rằng với các số dương a, b, c, x, y, z ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)$$
$$\geq 3\cdot\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}.$$

(Crux Mathematicorum)

Lời giải. Kí hiệu $a+b+c=\sum a$. Tương tự với các tổng có các biến số được lấy hoán vị vòng quanh. Ta có

$$\sum\frac{a}{b+c}(y+z)+\sum(y+z)=\left(\sum a\right)\left(\sum\frac{y+z}{b+c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum(b+c)\right)\left(\sum\frac{y+z}{b+c}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\sum\sqrt{y+z}\right)^2$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{2}\left(\sum(\sqrt{y+z})\right)^2\geq\frac{3\sum yz}{\sum x}+2\sum x \quad (1)$$

từ đây suy ra đpcm.

Ta có (1) tương đương với

$$\left(\sum(x+\sqrt{x^2+xy+yz+zx})\right)\left(\sum x\right)$$
$$\geq 3\left(\sum yz\right)+2\left(\sum x\right)^2$$

Bởi vì

$$\sum\sqrt{x^2+(xy+yz+zx)}\geq\sqrt{\left(\sum x\right)^2+9\left(\sum yz\right)}.$$

Nên chỉ cần chứng minh

$$\left(\sum x\right)\sqrt{\left(\sum x\right)^2+9\left(\sum yz\right)}\geq\left(\sum x\right)^2+3\left(\sum yz\right).$$

Nhưng điều này là hiển nhiên sau khi bình phương hai vế của BĐT. ❐

Bây giờ ta sẽ nói về một thủ thuật đã được áp dụng khá nhiều trong những năm gần đây để giải các bài toán thi. Đây chính là một trong những phương án của BĐT CBS:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}b_k},$$

với mọi a_k thực và b_k dương, $k=1,2,\dots,n$.

Một áp dụng đơn giản của thủ thuật này là bài toán sau, được đề nghị tại Cuộc thi giữa các thành phố (Tournament of The Towns Competition).

★**Thí dụ 7.** *Chứng minh rằng với các số thực dương a,b,c ta có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}$$
$$\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Lời giải. Nếu viết lại vế phải dưới dạng $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$, ta sẽ biết cần làm gì:

$$\sum\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=\sum\frac{(a^2)^2}{a(b^2+ab+a^2)}$$
$$\geq\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a(a^2+ab+b^2)}.$$

Như vậy, ta sẽ có điều phải chứng minh nếu $\sum a(a^2+ab+b^2)\leq\left(\sum a\right)\cdot\left(\sum a^2\right)$, và thực tế thì ở đây xảy ra dấu bằng. ❐

Sẽ có những trường hợp mà gần như ta không thể tìm được a_i và b_i. Ta sẽ thảo luận một số bài toán mà trong đó thủ thuật này được áp dụng một cách không hiển nhiên chút nào.

★**Thí dụ 8.** *Chứng minh rằng với ba số dương a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\geq\frac{3}{5}.$$

(Nhật Bản, 1997)

Lời giải. Cách thức tự nhiên nhất là

$$\sum\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}=\sum\frac{\left(\frac{b+c}{a}-1\right)^2}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}\geq\frac{\left(\sum\frac{b+c}{a}-3\right)^2}{3+\sum\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$$

vì trong cách này ta thu được một bất đẳng thức ba biến số mà đã biết khá rõ một số tính chất. Như vậy, cần chứng minh rằng nếu $x=\frac{b+c}{a}$, $y=\frac{c+a}{b}$, $z=\frac{a+b}{c}$ thì

$$\left(x+y+z-3\right)^2\geq\frac{3}{5}(x^2+y^2+z^2+3),$$

điều này tương đương với

$$\left(\sum x\right)^2-15\sum x+3\sum xy+18\geq 0.$$

Đáng tiếc là không thể sử dụng trực tiếp dữ kiện $xy+yz+zx\geq 12$. Vì vậy, cần tìm các bất đẳng thức dạng như $xy+yz+zx\geq k(x+y+z)$. Hằng số tốt nhất là $k=2$ (vì ta có dấu bằng khi $x=y=z=2$). Thật thế, sau một số tính toán trực tiếp, BĐT này có thể viết dưới dạng $(\sum a^3)+3abc\geq\sum ab(a+b)$, và đó chính là BĐT Schur. Từ đó, ta có thể viết:

$$\left(\sum x\right)^2-15\sum x+3\sum xy+18$$
$$\geq\left(\sum x\right)^2-9\sum x+18\geq 0.$$

Và BĐT cuối cùng đúng vì $x+y+z\geq 6$.

Tại kì thi Toán Quốc tế 2001, bài toán 2 đã gây được khá nhiều khó khăn cho các thí sinh. Ta đưa ra một cách tiếp cận khác, cho phép đưa ra một mở rộng đẹp.

★Thí dụ 9. *Cho k là số thực, $k\geq 8$. Chứng minh rằng với các số nguyên dương a, b, c ta có*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\geq\frac{3}{\sqrt{k+1}}.$$

Lời giải. Ta có, theo BĐT CBS thì

$$\left(\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}\right)\left(\sum a\sqrt{a^2+kbc}\right)\geq\left(\sum a\right)^2.$$

Bây giờ, áp dụng BĐT CBS cho tổng thứ hai

$$\left(\sum a\sqrt{a^2+kbc}\right)^2=\left(\sum\sqrt{a}\sqrt{a^3+kabc}\right)^2$$
$$\leq\left(\sum a\right)\left(\sum(a^3+kabc)\right).$$

Như vậy chỉ cần chứng minh

$$(k+1)\left(\sum a\right)^3\geq 9\left(\sum(a^3+kabc)\right).$$

Nhưng điều này tương đương với
$$(k-8)(a^3+b^3+c^3)+3(k+1)(a+b)(b+c)(c+a)\geq 27kabc.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên theo BĐT trung bình cộng – trung bình nhân.

Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho x, y, z là các số lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

(Iran, 1998)

Bài 2. Chứng minh rằng nếu các số $a_1, a_2, \ldots, a_6$ thuộc đoạn $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$, thì ta có

$$\frac{a_1-a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_2-a_3}{a_3+a_4}+\frac{a_3-a_4}{a_4+a_5}+\frac{a_4-a_5}{a_5+a_6}+\frac{a_5-a_6}{a_6+a_1}+\frac{a_6-a_1}{a_1+a_2}\geq 0.$$

Bài 3. Cho $x\in[0;1]$. Chứng minh rằng

$$x(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})\leq 16.$$

(Olympic 30/4, 1996)

Bài 4. Chứng minh rằng với $2n$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)}\geq\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Kvant, 1989)

Bài 5. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực sao cho $(a+b+c)(x+y+z)=3$ và

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4.$$

Chứng minh rằng $ax+by+cz\geq 0$.

(Cuộc thi Mathlinks, 2005)

ỨNG DỤNG SỰ BIẾN THIÊN HÀM SỐ để giải một số bài toán về hệ phương trình

NGUYỄN ANH DŨNG
(*Hà Nội*)

Một số lưu ý chung

1) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm của phương trình (PT) là số giao điểm của đồ thị hàm số (HS) $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$.

2) Khi gặp hệ PT dạng $\begin{cases} f(x) = f(y) & (1) \\ g(x, y) = 0 & (2) \end{cases}$

Ta có thể tìm lời giải theo một trong hai hướng sau:

Hướng 1. PT(1) $\Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0$ (3)

Tìm cách đưa (3) về một PT tích.

Hướng 2. Xét HS $y = f(t)$. Ta thường gặp trường hợp HS liên tục trong tập xác định của nó.

Nếu HS $y = f(t)$ đơn điệu, thì từ (1), suy ra $x = y$. Khi đó bài toán đưa về giải hoặc biện luận PT (2) theo ẩn x.

Nếu HS $y = f(t)$ có một cực trị tại $t = a$ thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua a. Từ (1) suy ra $x = y$ hoặc x, y nằm về hai phía của a (xem thí dụ 2).

3) Nếu hệ PT ba ẩn x, y, z không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z thì không mất tính tổng quát có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$. Nghĩa là $x \ge y, x \ge z$ (xem thí dụ 3).

Việc sử dụng khảo sát biến thiên của HS để giải hoặc biện luận một số hệ PT tạo nên sự phong phú về thể loại và phương pháp giải toán, phù hợp với các kì thi tuyển sinh vào Đại học. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Giải hệ phương trình

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} e^x - e^y = x - y & (1) \\ \log_2 \dfrac{x}{2} + \log_{\sqrt{2}} 4y^3 = 10 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x > 0, y > 0$.

PT (1) được viết lại dưới dạng

$$e^x - x = e^y - y \qquad (3)$$

Xét HS $f(t) = e^t - t$, có $f'(t) = e^t - 1 > 0, \forall t > 0$.

Do đó HS $f(t)$ đồng biến khi $t > 0$.

Từ (3) suy ra $\begin{cases} f(x) = f(y) \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$.

Thay vào (2) được $\log_2 \dfrac{x}{2} + \log_{\sqrt{2}} 4x^3 = 10$

$\log_2 x - 1 + 2(2 + 3\log_2 x) = 10$, hay $\log_2 x = 1$.

Hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (2 ; 2)$.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \ln(1 + x) - \ln(1 + y) = x - y & (1) \\ 2x^2 - 5xy + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x > -1, y > -1$. PT(1) của hệ được viết lại dưới dạng

$$\ln(1 + x) - x = \ln(1 + y) - y \qquad (3)$$

Xét HS $f(t) = \ln(1 + t) - t$, với $t \in (-1; +\infty)$ có

$f'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{-t}{1+t}$.

Ta thấy $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

HS $f(t)$ đồng biến trong $(-1\ ;\ 0)$ và nghịch biến trong $(0\ ;\ +\infty)$.

Ta có $(3) \Leftrightarrow f(x)=f(y)$. Lúc đó $x = y$ hoặc $xy < 0$ (nếu x, y thuộc cùng một khoảng đơn điệu thì $x = y$, trong trường hợp ngược lại thì $xy < 0$).

Nếu $xy < 0$ thì vế trái của (2) luôn dương. PT không thỏa mãn.

Nếu $x = y$, thay vào PT (2), ta được nghiệm của hệ là $x = y = 0$.

Thí dụ 3. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3-3x^2+5x+1=4y \\ y^3-3y^2+5y+1=4z \\ z^3-3z^2+5z+1=4x \end{cases}$$

Lời giải. Xét HS $f(t)=t^3-3t^2+5t+1$, có $f'(t)=3t^2-6t+5>0, \forall t$.

Do đó HS $f(t)$ luôn đồng biến.

Hệ PT có dạng $\begin{cases} f(x)=4y \\ f(y)=4z \\ f(z)=4x \end{cases}$

Vì hệ không thay đổi khi hoán vị vòng quanh đối với x, y, z nên có thể giả thiết $x \ge y, x \ge z$.

Nếu $x > y$ thì $f(x) > f(y) \Rightarrow y > z \Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow z > x$. Mâu thuẫn.

Tương tự nếu $x > z$ ta cũng đi đến mâu thuẫn, suy ra $x = y = z$.

Từ một PT trong hệ, ta có $x^3-3x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-1)=0$

Ta được nghiệm của hệ: $x=y=z=1$;

$$x=y=z=1\pm\sqrt{2}.$$

Nhận xét. Xét hệ PT có dạng $\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x). \end{cases}$

Nếu các HS $f(t)$, $g(t)$ cùng đồng biến (hoặc cùng nghịch biến) thì lí luận như trên, ta suy ra $x = y = z$.

Biện luận hệ phương trình

Thí dụ 4. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm*

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{3-y}=m & (1) \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{3-x}=m & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $-1 \le x, y \le 3$.

Trừ theo vế của (1) cho (2) và chuyển vế, ta được:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{y+1}-\sqrt{3-y} \qquad (3)$$

Dễ thấy HS $f(t)=\sqrt{t+1}-\sqrt{3-t}$ đồng biến trên $(-1\ ;\ 3)$ nên từ (3) suy ra $x=y$.

Khi đó từ (1) có $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=m$.

Xét HS $g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$, ta có $g(x)$ liên tục trên $[-1\ ;3]$ và

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}},\quad g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Ta có $g(-1)=2$, $g(1)=2\sqrt{2}$, $g(3)=2$.

Từ đó $2 \le g(x) \le 2\sqrt{2}$.

Vậy hệ có nghiệm khi $2 \le m \le 2\sqrt{2}$.

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng với mọi $m > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất*

$$\begin{cases} 3x^2y-2y^2-m=0 & (1) \\ 3y^2x-2x^2-m=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Nếu $y \le 0$ thì vế trái của (1) âm, PT không thoả mãn, suy ra $y > 0$. Tương tự có $x > 0$.

Trừ theo vế của (1) cho (2), ta được

$$3x^2y-3y^2x+2x^2-2y^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(3xy+2x+2y)=0$$

Vì x, $y > 0$ nên $3xy+2x+2y>0$. Ta được $x-y=0$ hay $x=y$.

Khi đó, từ PT(1) có $3x^3-2x^2=m$.

Xét HS $f(x)=3x^3-2x^2$, có $f'(x)=9x^2-4x$.

Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\frac{4}{9}$.

HS đồng biến trong $(-\infty\ ;\ 0)$ và $\left(\frac{4}{9};+\infty\right)$, nghịch biến trong $\left(0;\frac{4}{9}\right)$, $f_{CĐ}=f(0)=0$, $f_{CT}=f\left(\frac{4}{9}\right)<0$.

Vậy với mọi $m > 0$, PT $f(x) = 0$ có một nghiệm $x > 0$.

Do đó với $m > 0$, hệ có nghiệm duy nhất $x=y>0$ (bạn đọc tự vẽ đồ thị hoặc lập bảng biến thiên của HS để kiểm tra kết quả trên).

Bài luyện tập

1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \cos x = 1-\frac{y^2}{2} \\ \cos y = 1-\frac{x^2}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=\sin y \\ y=\sin z \\ z=\sin x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \ln x-\ln y=x-y \\ 2^{x+y}.3^{\frac{x+1}{y}}=36 \end{cases}$

2. Tìm m để các hệ PT sau có nghiệm

a) $\begin{cases} x-y=\cos x-\cos y \\ 2\sin x-3\cos y=m \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x+\cos y=-1 \\ \cos 3x+\cos 3y=m. \end{cases}$

3. Giả sử x, y là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=m. \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của x^3+y^3.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC để giải một số bài toán đại số

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD–ĐT Tx.Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Việc ứng dụng hình học để giải bài toán đại số ở chương trình THCS quả là còn khá mới mẻ và lạ lẫm đối với học sinh. Nhưng việc ứng dụng này nhiều khi mang lại cho người học kết quả khá thú vị với lời giải ngắn gọn và độc đáo. Xin mời các bạn đọc và tham khảo vài ví dụ sau đây:

Thí dụ 1. *Cho hai số dương a và b. Chứng minh rằng* $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

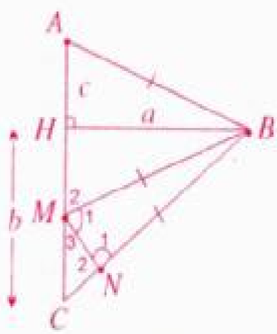
Lời giải. Nhận thấy $(\sqrt{a})^2=a$; $(\sqrt{b})^2=b$ nên ta nghĩ đến việc tạo ra tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AB=\sqrt{a}$; $AC=\sqrt{b}$. Khi đó theo định lí Pythagore ta có $BC=\sqrt{a+b}$.

Do $AB+AC>BC$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

Thí dụ 2. *Cho các số thực dương a, b, c với b > c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}<b-c.$$

Lời giải. Từ các biểu thức $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$ và các số dương a, b, c ta nghĩ đến việc tạo ra các tam giác vuông HAB và HBC có hai cạnh góc vuông tương ứng là a, c và a, b (h. 1). Khi đó ta có $AB=\sqrt{a^2+c^2}$, $BC=\sqrt{a^2+b^2}$. Do $b>c>0$ nên $BC>AB$, $HC>AH$. Bài toán đưa về chứng minh rằng $BC-AB<HC-HA$.

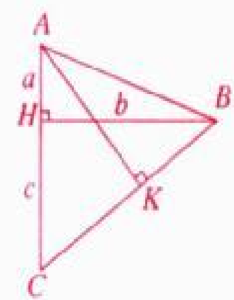


Hình 1

Trên HC, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $HM=AH$, $BN=AB$. Dễ thấy $AB=MB=BN$ suy ra ΔBMN cân tại B nên $\widehat{M}_1=\widehat{N}_1$. Mặt khác $\widehat{N}_1+\widehat{N}_2=\widehat{M}_1+\widehat{M}_2+\widehat{M}_3$ (= 180°) nên $\widehat{N}_2>\widehat{M}_3 \Leftrightarrow BC-AB<HC-HA$.

Thí dụ 3. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng* $\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2}\ge b(a+c)$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải. Vẽ tam giác AHB vuông tại H với $AH=a$, $BH=b$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm C sao cho $HC=c$. Nối B với C (h. 2). Hạ AK vuông góc với BC. Khi đó ta có



Hình 2

$2S_{ABC}=BH.AC$

$=AK.BC\le AB.BC$

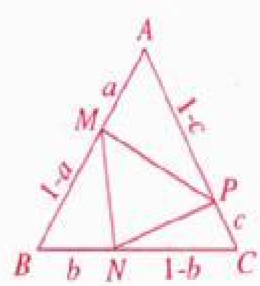
hay $b(a+c)\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AK=AB\Leftrightarrow K\equiv B$ $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại $B\Leftrightarrow b^2=ac$.

Thí dụ 4. *Cho các số thực dương a, b, c thuộc khoảng* (0 ; 1). *Chứng minh rằng*

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)<1.$$

Lời giải. Mỗi số hạng ở vế trái $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ có thể xem là tích độ dài hai cạnh của một tam giác nên gợi ý đến vẽ tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB, BC



Hình 3

và CA lấy các điểm M, N và P sao cho $AM = a$, $BM = b$, $CP = c$.

Ta có $2S_{AMP} + 2S_{BMN} + 2_{CPS} < 2S_{ABC}$

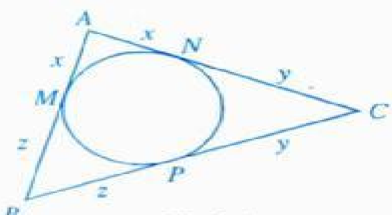
hay $\quad a(1-b)\sin60^\circ + b(1-c)\sin60^\circ + c(1-a)\sin60^\circ < 1.1.\sin60^\circ$

Suy ra $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) < 1$.

Thí dụ 5. *Cho ba số dương x, y, z, thỏa mãn hệ thức $xyz(x+y+z) = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+y)(x+z)$.*

Lời giải. Từ tích $xyz(x+y+z)$ ta nghĩ đến công thức Héron tính diện tích tam giác.

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với a, b, c là độ dài cac cạnh của tam giác ABC, p là nửa chu vi.



Hình 4

Với x, y, z là các số dương nên lấy các đoạn thẳng có độ dài lần lượt là $x+y$, $y+z$, $z+x$ luôn là độ dài ba cạnh của một tam giác ABC (h.4) và $x = AM = AN$, $y = CN = CP$, $z = BM = BP$ với M, N, P là các tiếp điểm của AB, AC và BC với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có $p = x + y + z$

$\Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (x+y+z)xyz = 4$.

Suy ra

$2S_{ABC} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = AB.AC.\sin A$

hay $4 = (x+y)(x+z).\sin A$.

Mà $0 < \sin A \le 1$ nên $P = (x+y)(x+z) \ge 4$.

$(x+y)(x+z) = 4 \Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow \widehat{A} = 90^\circ$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$

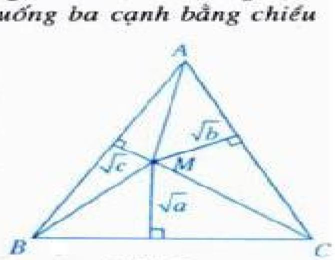
$\Leftrightarrow x(x+y+z) = yz$.

Kết hợp $xyz(x+y+z) = 4$ có $yz = 2$. Chọn $y = z = \sqrt{2}$ thì $x = 2 - \sqrt{2}$. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4, chẳng hạn khi $x = 2 - \sqrt{2}$; $y = z = \sqrt{2}$.

Thí dụ 6. *Cho các số dương a, b, c và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} \sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1 \\ \sqrt{z-b} + \sqrt{x-b} = 1 \\ \sqrt{x-c} + \sqrt{y-c} = 1. \end{cases}$$

Lời giải. Xét tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Áp dụng kết quả sau: "*Nếu M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đều, thì tổng các khoảng cách từ M xuống ba cạnh bằng chiều cao của nó*".

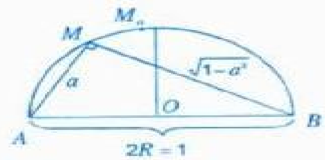


Hình 5

Vẽ đường thẳng song song với BC cách BC một khoảng $\sqrt{a}$ và đường thẳng song song với AC cách AC một khoảng $\sqrt{b}$ chúng cắt nhau tại M (h. 5). Từ kết quả trên và giả thiết suy ra khoảng cách từ M xuống AB là $\sqrt{c}$. Từ định lí Pythagore ta nhận thấy $x = MA^2$; $y = MB^2$; $z = MC^2$ là một nghiệm của hệ đã cho. Bằng phản chứng ta có thể dễ dàng chứng minh được hệ đã cho có nghiệm duy nhất trên.

Thí dụ 7. *Cho a, b, c là các số dương thuộc khoảng (0 ; 1) và $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{1}{1-a^2} + \dfrac{1}{1-b^2} + \dfrac{1}{1-c^2}$.*

Lời giải. Dựng nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 1$. Do $0 < a < 1$ nên trên nửa đường tròn đó lấy điểm M sao cho $AM = a$ ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ $\Leftrightarrow AM \perp BM$ nên $2S_{ABM} = AM.BM = a.\sqrt{1-a^2}$.



Hình 6

Dễ thấy $2S_{ABM} \le 2S_{ABM_o}$ (với M_o là điểm chính giữa của nửa đường tròn đã cho) (h. 6).

$a.\sqrt{1-a^2} \le OM.AB = \dfrac{1}{2}.1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2(1-a^2) \le \dfrac{1}{4}$

hay $\dfrac{1}{1-a^2} \ge 4a^2$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M_o \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{2}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\dfrac{1}{1-b^2} \ge 4b^2$; $\dfrac{1}{1-c^2} \ge 4c^2$ do đó $M = \dfrac{1}{1-a^2} + \dfrac{1}{1-b^2} + \dfrac{1}{1-c^2}$ $\ge 4(a^2+b^2+c^2) = 4.\dfrac{3}{2} = 6$.

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi $a^2 = b^2 = c^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Để kết thúc bài viết chúng tôi xin mời các bạn làm quen với phương pháp đã trình bày ở trên qua các bài tập sau:

Bài 1. Cho $a > b > c > 0$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}.$$

Bài 2. Cho $a > c$; $b > c > 0$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{(c(b-c)} < \sqrt{ab}.$$

Bài 3. Cho x, y, z, t là các số thực dương thuộc khoảng (0 ; 1). Chứng minh rằng
$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) < 2.$$

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d ta luôn có
$$\sqrt{a^2+c^2)(b^2+c^2)} + \sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)} \ge (a+b)(c+d).$$

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có
$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| < |b-c|.$$

Bài 6. Cho a, b, c là các số dương thuộc khoảng (0 ; 1) và $a + b + c = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Chứng minh rằng
$$M = \frac{1}{a(1-a^2)} + \frac{1}{b(1-b^2)} + \frac{1}{c(1-c^2)} \ge 6\sqrt{2}.$$

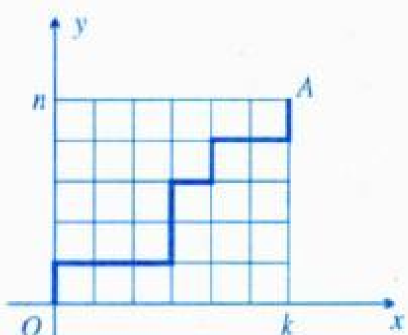
Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA SỐ C_n^k VÀ ỨNG DỤNG

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Không ít các bài toán đại số, khi giải bằng phương pháp hình học, lời giải đã trở nên gọn và đẹp hơn. Bài viết này giới thiệu ý nghĩa hình học của số C_n^k và một số bài toán áp dụng, hi vọng qua đó giúp các bạn thêm một công cụ khi giải một số bài toán về số tổ hợp.

I. Ý nghĩa hình học của số C_{k+n}^k

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(k;n)$ (h. 1). Ta gọi đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(k;n)$ là đường đi thỏa mãn quy tắc: chỉ theo hướng dương của các trục tọa độ và chỉ được phép đổi hướng đi (đổi từ hướng dương của trục tọa độ này sang hướng dương của trục tọa độ kia) tại các điểm có tọa độ nguyên.



Hình 1

Mệnh đề. *Số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(k;n)$ là C_{k+n}^k.*

Chứng minh. Mỗi đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(k;n)$ đều gồm $k+n$ đoạn thẳng, trong đó k đoạn ngang và n đoạn dọc (h.1) (mỗi đoạn dài 1 đơn vị). Các đường đó chỉ khác nhau bởi thứ tự kế tiếp của các đoạn ngang và đoạn dọc. Vì vậy: Số các đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(k;n)$ bằng số cách chọn k đoạn ngang từ $k+n$ đoạn dọc ngang, tức là bằng C_{k+n}^k (đpcm).

Chú ý: Vì ta có thể xét n đoạn dọc thay cho k đoạn ngang và khi đó số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(k;n)$ sẽ là C_{k+n}^k, như vậy ta đã chứng minh được $C_{k+n}^k = C_{k+n}^n$.

Hệ quả 1. *Số đường đi ngắn nhất từ $I(p;q)$ đến $A(k;n)$ sẽ là $C_{(k-p)+(n-q)}^{k-p} = C_{(k-p)+(n-q)}^{n-q}$.*
(Với $0 \le p < k$, $0 \le q < n$; $p, q, k, n \in \mathbb{N}$).

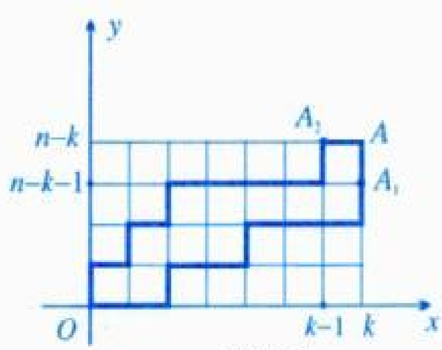
Hệ quả 2. *Số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(k;n)$ đi qua $I(p;q)$ bằng $C_{p+q}^p.C_{(k-p)+(n-q)}^{k-p}$.*

II. Một số bài toán áp dụng

✪Thí dụ 1. *Chứng minh rằng nếu $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ thì $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.* (Quy tắc Pascal).

Lời giải. Số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(k;n-k)$ là $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$. Ta chia các đường đi đó thành hai lớp không giao nhau (h.2):

• Lớp thứ nhất gồm các đường đi từ O đến A phải qua $A_1(k;n-k-1)$, số đường đi của lớp này là $C_{k+(n-k-1)}^k = C_{n-1}^k$.



Hình 2

• Lớp thứ hai gồm các đường đi từ O đến A phải qua $A_2(k-1;n-k)$, số đường đi của lớp này là $C^{k-1}_{(k-1)+(n-k)} = C^{k-1}_{n-1}$.

Theo quy tắc cộng, ta suy ra $C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1}$ (đpcm).

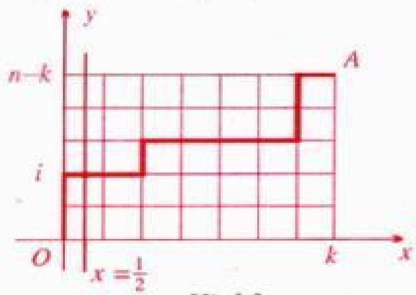
Thí dụ 2. *Chứng minh rằng*

$$C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^{k-1}_{n-2} + \ldots + C^{k-1}_{k-1}$$

(*với* $1 \le k \le n$).

Lời giải. Số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $A(k;n-k)$ là $C^k_{k+(n-k)} = C^k_n$.

Ta chia các đường đi đó thành $(n-k+1)$ lớp không giao nhau: lớp thứ i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-k$) gồm các đường đi từ O đến A phải cắt đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ tại điểm $\left(\frac{1}{2};i\right)$ (h. 3).



Hình3

Số đường đi của lớp này bằng số đường đi từ điểm $(1;i)$ đến điểm $(k;n-k)$ và bằng

$C^{k-1}_{(k-1)+(n-k-i)} = C^{k-1}_{n-i-1}$.

Theo quy tắc cộng suy ra $C^k_n = \sum_{i=0}^{n-k} C^{k-1}_{n-i-1}$ (đpcm).

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng*

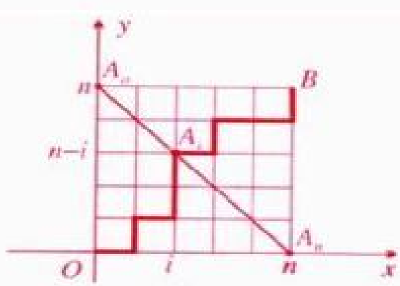
$$(C^0_n)^2 + (C^1_n)^2 + .. + (C^n_n)^2 = C^n_{2n}.$$

Lời giải. Số đường đi ngắn nhất từ $O(0;0)$ đến $B(n;n)$ là $C^n_{n+n} = C^n_{2n}$.

Ta chia các đường đi đó thành $(n+1)$ lớp không giao nhau: lớp thứ i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) gồm các đường đi từ O đến B phải qua điểm $A_i(i;n-i)$ (h. 4).

Số đường đi của lớp này là

$C^i_{i+(n-i)} C^{n-i}_{(n-i)+[n-(n-i)]} = C^i_n . C^{n-i}_n = (C^i_n)^2$.



Hình 4

Theo quy tắc cộng, ta suy ra

$C^n_{2n} = \sum_{i=0}^{n} (C^i_n)^2$ (đpcm).

Thí dụ 4. (Bài thi chọn Đội tuyển Việt Nam –2003)

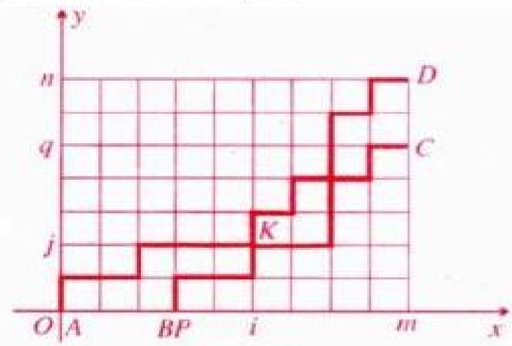
Cho các số nguyên dương m, n, p, q *với* $p < m$, $q < n$. *Trên mặt phẳng tọa độ lấy bốn điểm* $A(0;0)$, $B(p;0)$, $C(m;q)$, $D(m;n)$. *Xét các đường đi f ngắn nhất từ A đến D và các đường đi g ngắn nhất từ B đến C. Gọi S là số cặp đường đi (f ; g) mà f và g không có điểm chung. Chứng minh rằng*

$$S = C^n_{m+n}.C^q_{m+q-p} - C^q_{m+q}.C^n_{m+n-p}.$$

Lời giải. Số cặp đường đi $(f;g)$ tùy ý là

$$M = C^n_{m+n}.C^q_{q+m-p} = C^n_{m+n}.C^q_{m+q-p} \quad (1)$$

Gọi U là số cặp đường đi $(f';g')$ với f' là đường đi ngắn nhất từ A đến C, g' là đường đi ngắn nhất từ B đến D (h. 5).



Hình 5

Số cặp đường đi $(f';g')$ tùy ý là

$$U = C^q_{q+m}.C^n_{n+m-p} = C^q_{m+q}.C^n_{m+n-p} \quad (2)$$

Vì f' và g' luôn có ít nhất một điểm chung $K(i;j)$ với $p \le i \le m$ và $0 \le j \le q$ ($i, j \in \mathbb{N}$). Nên

Số đường đi f' phải qua K là $C^j_{j+i}.C^{q-j}_{(q-j)+(m-i)}$.

Số đường đi g' phải qua K là $C^j_{j+(i-p)}.C^{n-j}_{(n-j)+(m-i)}$.

Vậy $U = C^j_{j+i}.C^{q-j}_{(q-j)+(m-i)}.C^j_{j+(i-p)}.C^{n-j}_{(n-j)+(m-i)}$ (3)

Vì K cũng là điểm chung các cặp đường đi $(f;g)$ mà f và g có điểm chung, nên nếu gọi T là số cặp đường đi $(f;g)$ mà f và g có điểm chung K thì tương tự ta có:

$$T = C^j_{j+i}.C^{n-j}_{(n-j)+(m-i)}.C^j_{j+(i-p)}.C^{q-j}_{(q-j)+(m-i)} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) ta có $T = U$.

Vậy $S = M - U = C^n_{m+n}.C^q_{m+q-p} - C^q_{m+q}.C^n_{m+n-p}$ (đpcm).

Để kết thúc bài báo, mời các bạn thử sử dụng phương pháp trên với hai bài tập nhỏ sau:

Chứng minh rằng

1) $C^m_n C^0_k + C^{m-1}_{n-1} C^1_{k+1} + \ldots + C^0_{n-m} C^m_{k+m} = C^m_{n+k+1}$

2) $C^0_n C^k_m + C^1_n C^{k-1}_m + \ldots + C^k_n C^0_m = C^k_{m+n}$.

Linh hoạt và sáng tạo trong giải toán

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Nhiều dạng toán đã có đường lối giải rõ ràng, nhưng với từng bài toán cụ thể vẫn có những cách giải riêng phù hợp với đặc điểm của từng bài.

Ta hãy xét những bài toán sau đây.

✪**Bài toán 1.** *Giải phương trình*

$$|x+1| + |x+2| = 3x.$$

Cách giải thông thường. Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối ta có bảng sau:

x		-2		-1	
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$		$-x-1$	0	$x+1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$

Với $x < -2$ ta có $(-x-1)+(-x-2) = 3x$

$\Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{5}$, (không thỏa mãn $x < -2$).

Với $-2 \le x \le -1$ ta có $(-x-1)+(x+2) = 3x$

$\Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$ (không thỏa mãn $-2 \le x \le -1$).

Với $x > -1$ ta có $(x+1)+(x+2) = 3x \Leftrightarrow x = 3$, (thỏa mãn $x > -1$).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Cách giải sáng tạo. Vế trái của phương trình đã cho không âm nên $3x \ge 0$, suy ra $x \ge 0$. Do đó $|x+1| = x+1$, $|x+2| = x+2$. Dẫn đến

$(x+1)+(x+2) = 3x \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn $x \ge 0$).

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

✪**Bài toán 2.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2+4y+4=0 & (1)\\ y^2+4x+4=0 & (2)\end{cases}$$

Cách giải thông thường. Ở hệ phương trình trên khi thay x bởi y, thay y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia. Với hệ phương trình như vậy, ta thường trừ theo vế hai phương trình:

$x^2 - y^2 + 4y - 4x = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-4) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0\\ x+y-4=0.\end{array}\right.$

Xét trường hợp $x - y = 0$, PT (1) trở thành $x^2+4x+4=0$ hay $(x+2)^2 = 0$. Ta được $x = -2$, suy ra $y = -2$.

Xét trường hợp $x + y - 4 = 0$, PT (1) trở thành $x^2 + 4(4-x) + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 20 = 0$ $\Leftrightarrow (x-2)^2 + 16 = 0$, PT này vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$(x, y) = (-2; -2).$$

Cách giải sáng tạo. Cộng theo vế hai phương trình, ta được $x^2+4y+4+y^2+4x+4=0$ nên $(x+2)^2+(y+2)^2=0$. Do đó $x = y = -2$, thỏa mãn hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x\,;y) = (-2\,;-2)$.

✪**Bài toán 3.** *Tìm m để phương trình*

$$mx^2 + (3m+1)x + (2m+1) = 0 \qquad (3)$$

có hai nghiệm âm.

Cách giải thông thường. Kí hiệu P và S thứ tự là tích và tổng hai nghiệm của PT (3). Điều kiện để PT (3) có hai nghiệm âm là $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Nhận thấy

$$\Delta = (3m+1)^2 - 4m(2m+1) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 \geq 0\ \forall m.$$

$$P > 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right.$$

$$S < 0 \Leftrightarrow -\frac{3m+1}{m} < 0 \Leftrightarrow \frac{3m+1}{m} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{3} \\ m > 0. \end{array}\right.$$

Vậy điều kiện để PT (3) có hai nghiệm âm là $m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m > 0$.

Cách giải sáng tạo. Với $m = 0$, PT (3) trở thành $x + 1 = 0$, có một nghiệm $x = -1$.

Với $m \neq 0$, PT (3) là phương trình bậc hai. Ta thấy $m - (3m+1) + (2m+1) = 0$ nên PT (3) có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{2m+1}{m}$.

Hiển nhiên $x_1 < 0$. Còn $x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m} > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0. \end{array}\right.$$

Vậy điều kiện để PT (3) có hai nghiệm âm là $m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m > 0$.

✪Bài toán 4. *Tìm m để phương trình*

$$x^2 + mx + 2 = 0 \qquad (4)$$

có hai nghiệm nguyên dương phân biệt.

Cách giải thông thường. Điều kiện để phương trình (4) có hai nghiệm dương phân biệt là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8 > 0 \\ 2 \quad > 0 \\ -m \quad > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 8 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2\sqrt{2}.$$

Bây giờ ta tìm điều kiện để hai nghiệm dương phân biệt của (4) là số nguyên. Do S là số nguyên nên m là số nguyên. Điều kiện cần để (4) có nghiệm nguyên là Δ phải là số chính phương, tức là $m^2 - 8$ là số chính phương.

Đặt $m^2 - 8 = k^2$ với k nguyên dương, ta có $m^2 - k^2 = 8 \Leftrightarrow (m+k)(m-k) = 8$.

Ta thấy $m + k$ và $m - k$ là ước số của 8, trong đó $m + k > m - k$.

Ngoài ra $(m + k) + (m - k) = 2m$, là số chẵn nên $m + k$ và $m - k$ cùng tính chẵn lẻ.

Do đó

$m+k$	4	-2
$m-k$	2	-4

suy ra

m	3	-3
k	1	1

Kết hợp với điều kiện $m < -2\sqrt{2}$ ta chọn $m = -3$. Khi đó PT (4) là $x^2 - 3x + 2 = 0$, có hai nghiệm nguyên dương phân biệt 1 và 2.

Cách giải sáng tạo. Giả sử phương trình $x^2 + mx + 2 = 0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt là x_1, x_2 thì $x_1x_2 = 2$.

Do x_1, x_2 nguyên dương và giả sử $x_1 < x_2$ thì $x_1 = 1, x_2 = 2$. Khi đó $m = -(x_1 + x_2) = -3$.

Phương trình (4) là $x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm nguyên dương phân biệt là 1 và 2. Vậy $m = -3$.

Kết luận

Qua bốn bài toán trên, ta thấy trong giải toán cần vận dụng các phương pháp giải một cách linh hoạt và sáng tạo. Đừng vừa lòng với cách giải chung đã biết, hãy tìm ra cách giải quyết hợp lí cho từng trường hợp cụ thể.

Linh hoạt và sáng tạo là các phẩm chất của con người năng động, cũng là những phẩm chất mà người học toán cần rèn luyện.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Kĩ thuật giải MỘT SỐ BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN của đồ thị hàm số

DƯƠNG ĐỨC LÂM
(SV lớp K51 XD9, ĐHXD Hà Nội)

Bài toán (BT) về sự tiếp xúc, điển hình là BT tiếp tuyến (TT) luôn là vấn đề thời sự trong chương trình toán phổ thông. Đặc biệt, nó thường xuyên xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học – Cao đẳng, và cũng đã nhiều lần được bàn tới trên tạp chí THTT. Để giúp các bạn học sinh có thể ôn tập tốt hơn và có cách nhìn đơn giản hơn về loại toán này, tôi xin giới thiệu với bạn đọc một vài kĩ thuật nhỏ mà tôi học hỏi được ngày còn là học sinh phổ thông.

Trước đây, để giải BT tiếp xúc của hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và (C'): $y = g(x)$ ta thường sử dụng phương pháp nghiệm bội, nghiệp kép. Theo quan điểm mới, để tìm điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị (C) và (C') ta sử dụng phương pháp đạo hàm, đó là giải hệ phương trình (HPT) $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ (I)

Tuy nhiên, rất nhiều BT mà việc giải hệ (I) gặp không ít khó khăn. Hi vọng thông qua một số thí dụ dưới đây, bạn đọc sẽ rút ra được những kinh nghiệm cho mình.

✪ **Thí dụ 1.** *Cho hàm số* $y=\dfrac{x^2-x+a}{x-1}$ $(a \neq 0)$.

Tùy theo a hãy viết các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số kẻ từ gốc tọa độ.

Lời giải. Đường thẳng (d) với hệ số góc k đi qua gốc tọa độ $O(0, 0)$ có PT $y = kx$. (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi và chỉ khi hệ sau

có nghiệm: $\begin{cases} x+\dfrac{a}{x-1} = kx & (1) \\ 1-\dfrac{a}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$

Hệ này tương đương với

$$\begin{cases} x-1+\dfrac{a}{x-1} = kx-1 & (3) \\ x-1-\dfrac{a}{x-1} = k(x-1) & (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế (3) cho (4) ta được

$$\frac{2a}{x-1} = k-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{k-1}{2a}.$$

Kết hợp với (2) ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{k-1}{2a} \\ 1-\dfrac{(k-1)^2}{4a} = k \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ (k-1)(k-1+4a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1-4a.$$

Suy ra PTTT cần tìm là $y = (1-4a)x$.

Nhận xét. Với các phép biến đổi linh hoạt ta đưa hệ về phương trình ẩn k mà không phải giải thông qua x.

✪ **Thí dụ 2.** *Cho đường cong* (C): $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

Lời giải. Đường thẳng với hệ số góc k đi qua $M(a ; b)$ có PT $y = k(x-a)+b$.

Đường thẳng này là TT của (C) khi và chỉ khi HPT sau có nghiệm

$$\begin{cases} x-1+\dfrac{1}{x-1} = k(x-a)+b & (1) \\ 1-\dfrac{1}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Hệ này tương đương với

$$\begin{cases} x-1+\dfrac{1}{x-1}=k(x-a)+b & (3) \\ x-1-\dfrac{1}{x-1}=k(x-1) & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ (4) theo vế, ta có

$$\frac{1}{x-1}=\frac{k(1-a)+b}{2}.$$

Kết hợp với (2) được

$$\begin{cases} k\neq 1 \\ 1-\left(\dfrac{k(1-a)+b}{2}\right)^2=k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 1 \\ (a-1)^2k^2+2\big((1-a)b+2\big)k+b^2-4=0. \end{cases}$$

Từ M kẻ được hai TT vuông góc với nhau tới (C) khi và chỉ khi hệ trên có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 và $k_1.k_2=-1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1\neq 0 \\ \dfrac{b^2-4}{(a-1)^2}=-1 \\ (a-1)^2+2\big((1-a)b+2\big)+b^2-4\neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ (a-1)^2+b^2=4 \\ -a+b+1\neq 0. \end{cases}$$

Suy ra tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I (1; 0), bán kính bằng 2, bỏ đi bốn điểm là giao của các đường thẳng $x = 1$ và $-x + y + 1 = 0$ với đường tròn, đó là $A(1\,;\,2)$, $B(1;-2)$, $C(1+\sqrt{2};\sqrt{2})$, $D(1-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

✪**Thí dụ 3.** *Tìm TT cố định của họ đường cong có phương trình* $y=\dfrac{(m-1)x+m}{x-m}$, $m\neq 0$.

Lời giải. Đường thẳng $y = ax + b$ là TT cố định của đường cong khi và chỉ khi HPT sau có nghiệm với mọi $m\neq 0$

$$\begin{cases} m-1+\dfrac{m^2}{x-m}=ax+b & (1) \\ -\dfrac{m^2}{(x-m)^2}=a & (2) \end{cases}$$

Ta có (2) tương đương với

$$-\frac{m^2}{x-m}=a(x-m) \qquad (3)$$

Trừ theo vế (1) cho (3), và biến đổi ta được

$$\frac{1}{x-m}=\frac{m(a-1)+b+1}{2m^2} \qquad (4)$$

Kết hợp (2) và (4) ta được

$$a=-\frac{1}{4m^2}\big(m(a-1)+b+1\big)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2m^2+2(a-1)(b+1)m+(b+1)^2=0.$$

PT này được thỏa mãn với mọi $m\neq 0$. Suy ra

$$\begin{cases} (a+1)^2=0 \\ 2(a-1)(b+1)=0 \\ (b+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1. \end{cases}$$

Vậy họ đồ thị có một tiếp tuyến cố định là $y=-x-1$.

Để kết thúc bài báo mời các bạn cùng giải một số bài tập sau:

Bài 1. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $y = 7$ mà từ đó kẻ được hai TT hợp với nhau một góc 45° tới đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

Bài 2. Cho đường cong (C): $y=\dfrac{x^2-4}{x+1}$. Tìm trên trục hoành các điểm mà từ đó vẽ được đúng một TT tới (C).

Bài 3. Cho đường cong (C): $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. Tìm trên trục tung các điểm mà từ đó vẽ được ít nhất một TT tới (C).

Bài 4. Chứng minh rằng họ đường cong

$$y=\frac{(m-2)x-m^2+2m-4}{x-m}$$

luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Dùng ẩn phụ để rút gọn biểu thức và giải phương trình có chứa căn thức

BÙI VĂN CÓ
(GV trường THCS Lý Vĩnh, Lý Sơn, Quảng Ngãi)

Đối với bài toán rút gọn biểu thức và giải phương trình có chứa dấu căn, ta thường dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ để phân tích thành nhân tử. Bài viết này xin giới thiệu phương pháp dùng "ẩn phụ" để rút gọn biểu thức hoặc giải phương trình có chứa dấu căn. Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài toán 1. *Rút gọn biểu thức*

$$A=\frac{2}{\sqrt[4]{7}}-\sqrt[4]{7}-\frac{\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{7}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}}}+\frac{6}{\sqrt{7}\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}}\right)}+\frac{7}{\sqrt[4]{343}}.$$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt[4]{7}\Rightarrow a^4=7$ và $a^2=\sqrt{7}$ ta có

$$A=\frac{2}{a}-a-\frac{a^2-\frac{1}{a^2}}{a-\frac{1}{a}}+\frac{6}{a^2\left(a+\frac{1}{a}\right)}+\frac{7}{a^3}$$

$$=\frac{1-2a^2}{a}+\frac{13a^2+7}{a^3(a^2+1)}$$

$$=\frac{a^4+a^2-2a^6-2a^4+13a^2+a^4}{a^3(a^2+1)}$$

$$=\frac{2a^2(7-a^4)}{a^3(a^2+1)}=0.\ \square$$

Bài toán 2. *Rút gọn biểu thức*

$$B=\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt[4]{25}-\sqrt[4]{125}}}.$$

Lời giải. Đặt $b=\sqrt[4]{5}\Rightarrow b^2=\sqrt[4]{25}$, $b^3=\sqrt[4]{125}$, $b^4=5$, $b^6=5b^2$, $b^5=5b$.

Ta có $B=\dfrac{2}{\sqrt{4-3b+2b^2-b^3}}$

mà $\dfrac{1}{b^3-2b^2+3b-4}=\dfrac{1}{(b^3+3b)-(2b^2+4)}$

$$=\frac{(b^3+3b)+(2b^2+4)}{(b^3+3b)^2-(2b^2+4)^2}=\frac{b^3+3b+2b^2+4}{-2b^2-6}$$

$$=-\frac{(b^3+2b^2+3b+4)(b^2-3)}{2(b^4-9)}$$

$$=\frac{b^5+2b^4-2b^2-9b-12}{8}$$

$$=\frac{-b^2-2b-1}{4}=-\left(\frac{b+1}{2}\right)^2.$$

Vậy $B=2\sqrt{\left(\dfrac{2}{b+1}\right)^2}=\dfrac{4}{b+1}=\dfrac{4}{\sqrt[4]{5}+1}.\ \square$

Bài toán 3. *Chứng minh rằng, nếu $ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ thì $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.*

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^3}=C$ thì

$$C=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=x\sqrt[3]{a}.$$

Tương tự $C=y\sqrt[3]{b}$; $C=z\sqrt[3]{c}$, do đó

$\dfrac{C}{x}=\sqrt[3]{a}$; $\dfrac{C}{y}=\sqrt[3]{b}$; $\dfrac{C}{z}=\sqrt[3]{c}$ suy ra

$$C\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

Do $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ nên $C=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

Hay $C=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt{ax^2+by^2+cz^2}$

✪**Bài toán 4.** *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1.$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}=u$; $\sqrt{\frac{1}{2}-x}=v$ $(v\geq 0)$, thì $u^3+v^2=1$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^2=1 \end{cases}$ $(v\geq 0)$ hay $\begin{cases} u=1-v \\ u^3=1-v^2 \end{cases}$

Từ đó, ta được

$(1-v)^3=1-v^2 \Leftrightarrow v(v-1)(v-3)=0$.

Tìm được $v=0$; $v=1$; $v=3$ (thỏa mãn $v\geq 0$).

*) Với $v=0$ thì $x=\frac{1}{2}-v^2=\frac{1}{2}$.

*) Với $v=0$ thì $x=-\frac{17}{2}$.

*) Với $v=1$ thì $x=-\frac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của PT đã cho là

$$\left\{-\frac{17}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}.$$

✪**Bài toán 5.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2} & (1) \\ x+y-5=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}}=t$ thì $\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{1}{t}$ $(t>0)$.

Khi đó PT (1) có dạng

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

• Với $t=2$ thì $\sqrt{\frac{x}{y}}=2$, ta có $\begin{cases} x=4y \\ x+y=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=1. \end{cases}$

• Với $t=\frac{1}{2}$ thì $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{1}{2}$, ta có $\begin{cases} 4x=y \\ x+y=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=4. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(4;1)$ và $(1;4)$.

Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán tương tự để các bạn luyện tập.

Bài 1. Rút gọn biểu thức

a) $\dfrac{\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{64-12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}}.\sqrt{8+3\sqrt{5}}\times$

$\times\left(\dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}}+\dfrac{\sqrt{2}-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{81}}\right)$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{7+5\sqrt[4]{5}+3\sqrt[4]{25}+\sqrt[4]{125}}$.

Bài 2. Giải phương trình

a) $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$;

b) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+4\sqrt[3]{(x-1)^2}=6\sqrt[3]{x^2-1}$.

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4. \end{cases}$$

ĐẠI SỐ HOÁ LƯỢNG GIÁC

HUỲNH LÂM LINH
(SV lớp Toán 1A, ĐHSP TP. Hồ Chí Minh)

Một trong những phương pháp hiệu quả trong chứng minh các bất đẳng thức trong tam giác là chuyển sang bài toán đại số mà ta tạm gọi là phương pháp đại số hóa. Thông thường những lời giải đó đều gọn đẹp và sáng sủa. Có nhiều phương pháp chuyển sang đại số, và mỗi phương pháp đó đều mang một vẻ đẹp và tính hiệu quả riêng. Riêng trong bài này xin giới thiệu với bạn đọc một cách đại số hóa mà theo tôi là mới.

Cho tam giác ABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Gọi p, r, R tương ứng là nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác đó. Kí hiệu $x = \sin\frac{A}{2}$, $y = \sin\frac{B}{2}$, $z = \sin\frac{C}{2}$ sẽ được sử dụng cho đến cuối bài viết.

Ta có các hệ thức cơ bản sau:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

2) $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = z + xy$ và các hệ thức tương tự.

3) $\sqrt{2(1-x)(1-y)(1-z)} = x + y + z - 1$.

Sau đây là các bài toán minh họa.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC không nhọn. Chứng minh rằng*

$R \ge (\sqrt{2}+1)r$ *(bất đẳng thức Emmirich).*

Lời giải. Sử dụng hệ thức $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, ta quy bài toán 1 về chứng minh $xyz \le \frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

Thật vậy, ta có

$$1 - x^2 = y^2 + z^2 + 2xyz \ge 2yz(1+x).$$

Suy ra $1 - x \ge 2yz$ (*)

Không giảm tổng quát, giả sử $A \ge 90^\circ$. Suy ra $x \ge \frac{1}{\sqrt{2}} > y$. Vậy

$$xyz \le \frac{x(1-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} - x\right) + \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

$$\le \frac{\sqrt{2}-1}{4} \text{ (lưu ý } \frac{2-\sqrt{2}}{2} - x < 0\text{)}.$$

Bài toán 2. (Bài toán Jack Garfulkel)

Cho tam giác ABC thỏa mãn $A \le \frac{\pi}{3} \le B \le C$.

Chứng minh rằng $h_a + h_b + h_c \ge 7r + R$,

trong đó h_a, h_b, h_c *tương ứng là độ dài các đường cao của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh

$$\sqrt{3}(1 + 4xyz) \le 4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \qquad (1)$$

Thật vậy từ hệ thức **2** ta thấy

$$(1) \Leftrightarrow 3(1+4xyz)^2 \le 16(x+yz)(y+zx)(z+xy)$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2+z^2) + 64(xyz)^2 \le 16(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 1$$

$$\Leftrightarrow 64\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) \le 0.$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $A \le \frac{\pi}{3} \le B \le C$.

Ta có $\frac{h_a + h_b + h_c}{R}$

$$= 8\left(xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + yz\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + zx\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)}\right)$$

$$= 8\left(xy(z+xy) + yz(x+yz) + zx(y+zx)\right)$$

$$= 8((1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) + (xyz)^2 + xyz)$$

$$\ge 8\left(\frac{3}{16}(1+4xyz)^2 + (xyz)^2 + xyz\right)$$

$= \dfrac{3}{2} + 20xyz + 32(xyz)^2$

$= 28xyz + 1 + 2\left(4xyz - \dfrac{1}{2}\right)^2$

$\geq 28xyz + 1 = \dfrac{7r+R}{R}$. (dpcm)

Bài toán 3. (Bất đẳng thức Walker).

Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh bất đẳng thức $p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$.

Lời giải. Sử dụng

$2(ab+ac+bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 4r(r+4R)$

(xem THTT số 337, tháng 7/2005, trang 6) và hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$, ta quy bài toán về dạng

$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$.

$\Leftrightarrow \left(\sin\dfrac{A'}{2} + \sin\dfrac{B'}{2} + \sin\dfrac{C'}{2}\right)^2$

$\leq \cos^2\dfrac{A'}{2} + \cos^2\dfrac{B'}{2} + \cos^2\dfrac{C'}{2}$, trong đó

$\dfrac{A'}{2} = \dfrac{\pi}{2} - A$, $\dfrac{B'}{2} = \dfrac{\pi}{2} - B$, $\dfrac{C'}{2} = \dfrac{\pi}{2} - C$.

Cũng đặt x', y', z' tương tự như x, y, z nhưng xét đối với tam giác $A'B'C'$. Khi đó bất đẳng thức trên tương đương với

$(x'+y'+z')^2 \leq 1 - x'^2 + 1 - y'^2 + 1 - z'^2$.

Hay $1 + 4x'y'z' \geq 2(x'y' + y'z' + z'x')$ (2)

Trong ba số x', y', z' phải có hai số cùng không lớn hơn $\dfrac{1}{2}$ hoặc cùng không bé hơn $\dfrac{1}{2}$, giả sử là y', z'. Khi đó $x'(2y'-1)(2z'-1) \geq 0$.

Mà $1 - x' - 2y'z' \geq 0$ (Theo (*)).

Suy ra $x'(2y'-1)(2z'-1) + 1 - x' - 2y'z' \geq 0$.

Hay (2) được chứng minh.

Bài toán 4. (Bất đẳng thức Jack Garfulkel)

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$\cos\dfrac{A-B}{2} + \cos\dfrac{B-C}{2} + \cos\dfrac{C-A}{2}$

$\geq \dfrac{2}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Lời giải. Sử dụng hệ thức **2**, đưa BĐT trên về

$\sqrt{3}(2xy + 2yz + 2zx + x + y + z)$

$\geq 8\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

Theo (2) thì $1 + 4xyz \geq 2(xy + yz + zx)$.

Suy ra $2(xy+yz+zx) \geq 2(x+y+z)^2 - 3$.

Do đó $2(xy+yz+zx) + x + y + z$

$\geq (x+y+z-1)(2x+2y+2z+3)$.

Dựa vào hệ thức **3** ta chỉ cần chứng minh

$\sqrt{3}(2x+2y+2z+3) \geq 4\sqrt{2(1+x)(1+y)(1+z)}$ (3)

Từ (*) ta có $x(1-x) \geq 2xyz$. Tương tự đối với y, z, rồi cộng lại ta được $x + y + z \geq 1 + 4xyz$ (4)

Để ý $xyz \leq \dfrac{1}{8}$. Do đó $4(x+y+z) \geq 1 + 40xyz$.

Ta có $12(x+y+z)^2 - 32(xy+yz+zx)$

$\geq 4(x^2+y^2+z^2) = 4 - 8xyz$. Suy ra

$3(2x+2y+2z+3)^2$

$= 12(x+y+z)^2 + 36(x+y+z) + 27$

$\geq 32(xy+yz+zx) + 4 - 8xyz + 32(xy+yz+zx)$

$+ 1 + 40xyz + 27 = 32(1+x)(1+y)(1+z)$.

Vậy (3) được chứng minh.

Về bài toán này bạn đọc có thể tham khảo thêm ở THTT số 291, tháng 9 năm 2001.

Bài toán 5. (Bất đẳng thức Jack Garfulkel)

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2\dfrac{B}{2} + \tan^2\dfrac{C}{2} + 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \geq 2$.

Lời giải. Quy bài toán về dạng sau:

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1-z^2} \geq 5 - 8xyz \quad (5)$$

Ta có VT(5) bằng $1 + \dfrac{(1+xyz)^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

Vậy (5) $\Leftrightarrow \dfrac{(1+xyz)^2}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \geq 4(1-2xyz)$ (6)

Ta có $4(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$

$= 1 + 4xyz - x^4 - y^4 - z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$

Vậy (6) tương đương với

$$(1+xyz)^2 \geq (1-2xyz)(1+4xyz-x^4-y^4-z^4$$
$$+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2))$$

$$\Leftrightarrow 9x^2y^2z^2 \geq (1-2xyz)(2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$-x^4-y^4-z^4)$$

$$\Leftrightarrow 9(xyz)^2 \geq (x^2+y^2+z^2)(2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$-x^4-y^4-z^4) \quad (7)$$

Đặt $a = \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$, $b = \dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$,

$$c = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Thế thì $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Khi đó BĐT (7) tương đương với

$$9abc \geq 2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-\frac{9}{4}abc \leq \frac{1}{4} \quad (8)$$

Từ BĐT $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$, suy ra $(1-2a)(1-2b)(1-2c) \leq abc$ (do $a+b+c=1$).

Hay $1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8ab \leq abc$.

Suy ra BĐT (8) được chứng minh.

Cuối cùng xin nêu ra một số bài tập để bạn đọc rèn luyện.

Bài tập 6. (Bất đẳng thức Jack Garfulkel)
Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

a) $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{4}{3}\left(1+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)$;

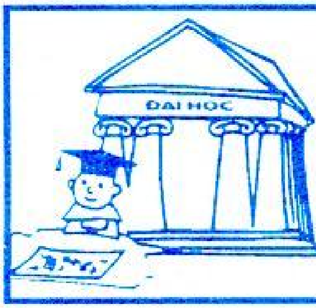
b) $\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)$.

Bài tập 7. (TST USA 2003).
Cho tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}$$
$$\leq \cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}.$$

Bài tập 8. Cho tam giác ABC không nhọn. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c}{8} \leq (\sqrt{2}+1)R.$$



Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Một số loại toán tổ hợp thường gặp
TRONG KÌ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Trong bài viết "Phương pháp giải các bài toán về tạo số" (TH&TT số 324, tháng 6/2004) tác giả đã đề cập tới các bài toán tính số các số tự nhiên tạo thành, thỏa mãn một điều kiện nào đó. Trong bài báo này chúng tôi xin giới thiệu một số loại toán về đại số tổ hợp.

LOẠI 1. Chọn phần tử từ các tập hợp

✪**Thí dụ 1.** *Tổ một có 10 người, tổ hai có 9 người. Có bao nhiêu cách chọn một nhóm gồm 8 người sao cho mỗi tổ trên có ít nhất là 2 người?*

Lời giải. Giả sử ta chọn k người của tổ một và $(8-k)$ người của tổ hai.Vì mỗi tổ có ít nhất 2 người nên $2 \le k \le 6$.

• Số cách chọn k trong số 10 người của tổ một là C_{10}^k. Ứng với một cách chọn trên, ta có số cách chọn $(8-k)$ trong 9 người của tổ hai là C_9^{8-k}. Theo quy tắc nhân, ta được số cách chọn nhóm 8 người như trên là $S_k = C_{10}^k.C_9^{8-k}$.

• Cho k lần lượt bằng 2, 3, ..., 6 và áp dụng quy tắc cộng, ta được số cách chọn nhóm 8 người thỏa mãn bài toán là

$$S = S_2 + S_3 + \dots + S_6$$
$$= C_{10}^2C_9^6 + C_{10}^3C_9^5 + \dots + C_{10}^6C_9^2 = 74088.$$

Bài toán tổng quát. *Cho tập hợp A có n phần tử, tập hợp B có m phần tử. Tính số cách chọn p phần tử từ hai tập hợp trên ($p < m + n$) và thỏa mãn một điều kiện nào đó.*

Cách giải chung

1) *Tính trực tiếp.* Giả sử ta chọn k phần tử của tập hợp A và $(p-k)$ phần tử của B (trường hợp giả thiết cho nhiều tập hợp hơn, ta làm tương tự). Số cách chọn là $S_k = C_n^k.C_m^{p-k}$. Cho k thay đổi phù hợp với giả thiết của bài toán và lấy tổng của tất cả các số hạng S_k tương ứng, ta được kết quả cần tìm.

2) *Tính gián tiếp.* Số cách chọn k phần tử từ A, B một cách bất kì là C_{n+m}^k. Kết quả phải tìm là hiệu của C_{n+m}^k với tổng các số hạng S_k, tương ứng với mỗi giá trị k không thỏa mãn giả thiết của bài toán.

✪**Thí dụ 2.** *Người ta sử dụng ba loại sách gồm: 8 cuốn sách về Toán học, 6 cuốn sách về Vật lí và 5 cuốn sách về Hóa học. Mỗi loại đều gồm các cuốn sách đôi một khác loại nhau. Có bao nhiêu cách chọn 7 cuốn sách trong số sách trên để làm giải thưởng sao cho mỗi loại có ít nhất một cuốn?*

Lời giải. Sử dụng cách tính gián tiếp. Số cách chọn 7 trong số 19 cuốn sách một cách bất kì là C_{19}^7.

Các cách chọn không đủ cả ba loại sách là:

• Số cách chọn 7 trong số 11 cuốn sách Lí và Hóa là C_{11}^7 (không có sách Toán).

• Số cách chọn 7 trong số 13 cuốn sách Hóa và Toán là C_{13}^7 (không có sách Lí).

• Số cách chọn 7 trong số 14 cuốn sách Toán và Lí là C_{14}^7 (không có sách Hóa).

• Số cách chọn 7 trong số 8 cuốn sách Toán là C_8^7 (không có sách Lí và Hóa).

Vì mỗi cách chọn không có sách Lí và Hóa thuộc cả hai phép chọn: không có sách Lí và không có sách Hóa, nên số cách chọn phải tìm là

$$C_{19}^7 - C_{11}^7 - C_{13}^7 - C_{14}^7 + C_8^7 = 44918.$$

Lưu ý. Khi tính theo phương pháp gián tiếp, mỗi số hạng ứng với trường hợp không thỏa mãn bài toán được đặt sau dấu trừ. Số hạng đồng thời thuộc hai trường hợp không thỏa mãn bài toán được đặt sau dấu cộng (bạn đọc tự suy luận cho số hạng đồng thời thuộc ba trường hợp không thỏa mãn bài toán..).

LOẠI 2. Sắp xếp thứ tự các vật từ một họ các vật

✪**Thí dụ 3.** *Có 5 viên bi xanh giống nhau, 4 viên bi trắng giống nhau và 3 viên bi đỏ đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách xếp số bi trên vào 12 ô theo một hàng ngang sao cho mỗi ô có một viên bi?*

Lời giải. Nếu tất cả 12 viên bi đều khác nhau thì chúng tạo thành $P_{12} = 12!$ hoán vị. Nhưng các hoán vị của 5 bi xanh và các hoán vị của 4 bi trắng cho cùng một cách xếp đối với 12 viên bi nên số cách xếp phải tìm là

$$\frac{P_{12}}{P_5.P_4} = \frac{12!}{5!4!} = 166320. \ \square$$

Bài toán tổng quát. Có tất cả n vật, trong đó có m vật giống nhau từ hộp A; k vật giống nhau từ hộp B..., $(m + k + ... < n)$. Các vật còn lại đôi một khác nhau thì số cách xếp chúng thành một hàng ngang là $\dfrac{n!}{m!k!..}$.

✪**Thí dụ 4.** *Có bao nhiêu cách xếp vị trí cho 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ quanh một bàn tròn sao cho không có hai học sinh nữ nào cạnh nhau? (hai cách xếp khác nhau về vị trí nhưng có cùng thứ tự đối với các học sinh trên, được coi là một).*

Lời giải. Giả sử đã xếp chỗ cho 5 học sinh nam. Vì 3 học sinh nữ không ngồi cạnh nhau nên họ được chọn 3 trong 5 vị trí xen kẽ giữa các học sinh nam, số cách chọn là A_5^3. Vì hai cách xếp vị trí cho 8 người với cùng một thứ tự quanh bàn tròn được coi là một nên ta có thể chọn trước vị trí cho một học sinh nam nào đó, số hoán vị của 4 học sinh nam còn lại vào các vị trí là 4!.

Theo quy tắc nhân, số khả năng phải tìm là $A_5^3.4! = 1440$ (cách).

Lưu ý. Khi xếp n đối tượng theo một vòng tròn với hai cách xếp khác nhau bởi một phép quay được coi là một, thì ta có thể định trước một vị trí cho một đối tượng bất kì trong chúng. Sau đó tính số cách xếp vị trí cho $(n - 1)$ đối tượng còn lại.

LOẠI 3. Phân chia các vật từ một họ các vật

✪**Thí dụ 5.** *Có bao nhiêu cách chia 100 đồ vật giống nhau cho 4 người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật?*

Lời giải. Giả sử 100 đồ vật được xếp thành một hàng ngang, giữa chúng có 99 khoảng trống. Đặt một cách bất kì 3 vạch vào 3 trong số 99 khoảng trống đó, ta được một cách chia 100 đồ vật ra thành 4 phần để lần lượt gán cho 4 người. Khi đó mỗi người được ít nhất một đồ vật và tổng số đồ vật của 4 người bằng 100, thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Vậy số cách chia là $C_{99}^3 = 156849$ (cách).

Lưu ý. Bằng cách giải tương tự như trên, ta có thể chứng minh rằng, phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ (1) có tính chất :

• Với $1 \le n \le m$; $m, n \in \mathbb{N}$ thì PT(1) có số nghiệm trong tập hợp các số nguyên dương là C_{m-1}^{n-1}.

• Với $n \ge 1$; $m, n \in \mathbb{N}$ thì PT(1) có số nghiệm trong tập hợp các số tự nhiên là C_{m+n-1}^{n-1}.

✪**Thí dụ 6.** *Có bao nhiêu cách chia 8 đồ vật đôi một khác nhau cho ba người sao cho có một người được 2 đồ vật và hai người còn lại, mỗi người được 3 đồ vật?*

Lời giải. Có 3 cách chọn đồ vật. Với mỗi cách chọn trên, ta có:

• Số cách chọn 2 trong 8 đồ vật cho người được 2 đồ vật là C_8^2; sau đó, số cách chọn 3 trong 6 đồ vật còn lại cho người thứ nhất được 3 đồ vật là C_6^3; 3 đồ vật còn lại dành cho người thứ hai được 3 đồ vật.

• Theo quy tắc nhân, số cách chia phải tìm là $3.C_8^2C_6^3 = 1680$ (cách).

Lưu ý. Khi giải bài toán trên, nhiều bạn cho đáp số sai là $C_8^2C_6^3$ hoặc $3!C_8^2C_6^3$.

Trường hợp thứ nhất, bạn đã coi vai trò của người được 2 đồ vật và người được 3 đồ vật như nhau(!) Trường hợp thứ hai, bạn đã coi vai trò của hai người cùng được 3 đồ vật khác nhau(!)

BÀI TẬP LÀM THÊM
(trắc nghiệm)

Hãy khoanh tròn vào các câu trả lời đúng với các bài tập sau:

1. Phương trình $x + y + z = 100$ có bao nhiêu nghiệm trong tập hợp các số tự nhiên?

A. $C_{99}^2 = 4851$ B. $C_{101}^2 = 5050$

C. $C_{102}^2 = 5151$ D. $C_{103}^2 = 5253$.

2. Đem chia hết 10 đồ vật đôi một khác nhau cho hai người, sao cho mỗi người được ít nhất 1 đồ vật. Hỏi số cách chia?

A. C_{10}^2 B. $2^{10} - 1$

C. 2^{10} D. $2^{10} - 2$.

3. Có 5 cuốn sách Toán giống nhau, 7 cuốn sách Lí giống nhau và 8 cuốn sách Hóa giống nhau. Đem làm giải thưởng cho 10 học sinh, mỗi người được 2 cuốn sách khác loại. Tính số cách nhận giải thưởng của 10 học trên.

A. 1310 B. 2520

C. 417 D. 2085

4. Có 5 cuốn sách giáo khoa giống nhau và 3 cuốn sách tham khảo đôi một khác nhau. Đem làm giải thưởng cho 7 học sinh, mỗi người được 1 cuốn sách. Tính số cách nhận giải thưởng của của các học sinh trên.

A. 336 B. 274

C. 246 D. 546.

5. Có bao nhiêu cách chia 6 người ra thành 3 nhóm, mỗi nhóm 2 người, trong các trường hợp sau:

a) Phân biệt thứ tự các nhóm là: nhóm 1, nhóm 2, nhóm 3.

A. $C_6^2C_4^2 = 90$ B. $3!C_6^2C_4^2 = 540$

C. $\dfrac{C_6^2C_4^2}{3!} = 15$ D. $3.C_6^2C_4^2 = 270$.

b) Không biệt thứ tự của các nhóm.

A. $C_6^2C_4^2 = 90$ B. $3!C_6^2C_4^2 = 540$

C. $\dfrac{C_6^2C_4^2}{3!} = 15$ D. $3.C_6^2C_4^2 = 270$?

6. Có bao nhiêu cách chia 6 đồ vật đôi một khác nhau cho 3 người sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật?

A. 360 B. 495

C. 540 D. 600.

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Sử dụng HẰNG ĐẲNG THỨC $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ để giải phương trình

VŨ VĂN DŨNG
(GV THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)

Trong chương trình toán THCS, giải phương trình là dạng toán cơ bản và khó, thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi và thi vào lớp 10. Có rất nhiều phương pháp giải phương trình như dùng ẩn phụ, đưa về phương trình tích, dùng bất đẳng thức, quy về phương trình bậc hai... trong đó có khá nhiều phương trình nếu biết sử dụng các hằng đẳng thức

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

thì việc giải phương trình sẽ trở nên đơn giản, ngắn gọn và rất hiệu quả. Bài viết này giới thiệu một số dạng cơ bản của những phương trình thuộc loại này.

DẠNG 1. PT quy về dạng $(A \pm B)^2 = 0 \Leftrightarrow A \pm B = 0$

✪**Thí dụ 1.** *Giải phương trình*

$$x^2(x^4-1)(x^2+2)+1=0 \qquad (1)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{PT (1)} &\Leftrightarrow x^2(x^2+1)(x^2-1)(x^2+2)+1=0\\ &\Leftrightarrow (x^4+x^2)(x^4+x^2-2)+1 = 0\\ &\Leftrightarrow (x^4+x^2)^2-2(x^4+x^2)+1 = 0\\ &\Leftrightarrow (x^4+x^2-1)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow x^4+x^2-1 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình trùng phương trên ta được tập nghiệm của PT (1) là $\left\{-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$.

✪**Thí dụ 2.** *Giải phương trình*

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2+5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2-20\frac{x^2-4}{x^2-1}=0 \qquad (2)$$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq \pm 1$.

Đặt $\frac{x-2}{x+1}=y$, $\frac{x+2}{x-1}=z$. PT (2) có dạng

$$20y^2+5z^2-20yz=0$$

$\Leftrightarrow 5(2y-z)^2=0 \Leftrightarrow 2y=z$.

Dẫn đến $2.\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+2}{x-1}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2(x-2)(x-1) = (x+2)(x+1)\\ &\Leftrightarrow 2x^2-6x+4 = x^2+3x+2\\ &\Leftrightarrow x^2-9x+2 = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x=\frac{9+\sqrt{73}}{2}$ và $x=\frac{9-\sqrt{73}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của PT (2) là

$$\left\{\frac{9+\sqrt{73}}{2}; \frac{9-\sqrt{73}}{2}\right\}.$$

✪**Thí dụ 3.** *Giải phương trình*

$$x^2+2=2\sqrt{x^3+1} \qquad (3)$$

Lời giải. Điều kiện : $x \geq -1$.

Thêm và bớt x ở vế trái (3) để xuất hiện hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x+1+x^2-x+1-2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=0\\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)^2=0\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\\ &\Leftrightarrow x+1=x^2-x+1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $x=2$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của PT(3) là $\{0; 2\}$.

DẠNG 2. PT quy về dạng

$$(A \pm B)^2=(C \pm D)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \pm B = C \pm D\\ A \pm B = -(C \pm D) \end{array}\right.$$

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$x^4 = 24x + 32 \qquad (4)$$

Lời giải. Thêm $4x^2 + 4$ vào hai vế của phương trình (4) ta được

$$x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 24x + 36$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2 = 2x + 6 \\ x^2 + 2 = -2x - 6 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll} x^2 - 2x - 4 = 0 & \text{(i)} \\ x^2 + 2x + 8 = 0 & \text{(ii)} \end{array}\right.$$

PT (i) có hai nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{5}$; PT (ii) vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của PT (4) là $\left\{1+\sqrt{5}; 1-\sqrt{5}\right\}$.

DẠNG 3. PT quy về dạng

$$(A \pm B)^2 + (C \pm D)^2 + (E \pm F)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \pm B = 0 \\ C \pm D = 0 \\ E \pm F = 0 \end{cases}$$

Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$x + y + z + 4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5} \quad (5)$$

Lời giải. Điều kiện $x \ge 2, y \ge 3, z \ge 5$.

$$\text{PT}(5) \Leftrightarrow x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1 + y - 3 - 4\sqrt{y-3}$$

$$+4 + z - 5 - 6\sqrt{z-5} + 9 = 0$$

$$\left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y-3} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{z-5} - 3\right)^2 = 0.$$

Vế trái của PT là tổng của ba biểu thức không âm nên sẽ bằng 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{y-3} = 2 \\ \sqrt{z-5} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 3 = 4 \\ z - 5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 14 \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y; z) = (3; 7; 14)$.

DẠNG 4. PT nghiệm nguyên quy về dạng $(A \pm B)^2 \le p$ với A, B nguyên và p nguyên dương

Thí dụ 6. *Tìm nghiệm nguyên của PT*

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y - 10 = 0 \qquad (6)$$

Lời giải. Đặt $S_1 = x + y$, $S_2 = xy$ thì PT (6) có dạng

$$2S_1^2 - 6S_2 + S_1 - 10 = 0 \Leftrightarrow S_2 = \frac{1}{6}(2S_1^2 + S_1 - 10).$$

Do $S_2 \in \mathbb{Z}$ nên $S_1 \vdots 2$.

Mặt khác $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy \ge 0$

$$\Leftrightarrow S_2 \le \frac{S_1^2}{4}.$$

Do đó $\frac{1}{6}(2S_1^2 + S_1 - 10) \le \frac{S_1^2}{4}$.

$$\Leftrightarrow S_1^2 + 2S_1 - 20 \le 0 \Leftrightarrow (S_1 + 1)^2 \le 21.$$

Vì S_1 là số nguyên chẵn nên $(S_1 + 1)^2 \in \{1; 9\}$. Do đó $S_1 \in \{-4; -2; 0; 2\}$.

Muốn cho $S_2 = \frac{1}{6}(2S_1^2 + S_1 - 10)$ là số nguyên ta chỉ chọn được $\begin{cases} S_1 = -4 \\ S_2 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} S_1 = 2 \\ S_2 = 0. \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0. \end{cases}$

Giải hai hệ này ta tìm được các nghiệm nguyên $(x; y)$ của PT (6) là $(-1; -3)$, $(-3; -1)$, $(0; 2)$, $(2; 0)$.

Nhận xét. Việc sử dụng hằng đẳng thức $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$ để giải phương trình mang lại một lời giải ngắn gọn, hiệu quả. Tuy nhiên cần linh hoạt sáng tạo để tìm cách giải hợp lí cho từng trường hợp cụ thể.

Cuối cùng các bạn hãy vận dụng phương pháp nêu trên để giải một số bài toán sau đây.

Bài 1. Giải các phương trình:

a) $x^4 + \sqrt{x^2 + 1995} = 1995$;

b) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) + x^2 = 0$;

c) $x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = 2$;

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 3^{2008} \end{cases}$$

Giải đáp bài:

ĐỀ RA có vấn đề

(Đề đăng trên THTT số 364, tháng 10 năm 2007)

(Dựa theo bạn *Mai Hiền Cường*, 12A5, THPT C Bình Lục, **Hà Nam**).

• Chỗ lập luận sau của bạn học sinh nọ:

PT $x^5 - x^2 - 1 = 0$ có nghiệm $x \geq 0$.

Kết hợp với PT $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$ (1) được $-2x = 0$, hay $x = 0$ là không đúng!

Nguyên nhân chính dẫn đến sai lầm là hai PT (1) và PT $x^5 - x^2 - 1 = 0$ không có cùng một tập hợp nghiệm, nên không thể kết hợp hai PT đó để lấy nghiệm đúng của PT (1) được.

• **Giải lại bài toán:** PT (1) tương đương với

$$x^5 = (x+1)^2 \qquad (2)$$

Do $(x+1)^2 \geq 0$ nên $x^5 \geq 0$, suy ra $x \geq 0$.

Với $0 \leq x < 1$, thì vế trái nhỏ hơn vế phải, nên PT (2) vô nghiệm. Do đó chỉ cần xét $x \geq 1$. Xét hàm số $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$ $(x \geq 1)$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$. Mặt khác

$$f'(x) = 5x^4 - 2x - 2$$
$$= 2x(x^3 - 1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0, \forall x \geq 1.$$

Suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ và $f(1).f(2) < 0$. Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất trong $(1; 2)$.

• Ngoài bạn *Cường*, các bạn sau cũng có đáp án đúng: *Phạm Thị Minh Thu*, K47 Lí, THPT chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Lê Minh Hiếu*, 10A, THPT Thiệu Hóa, *Nguyễn Thị Yến*, 11BT2, THPT Triệu Sơn II, **Thanh Hóa**; *Lang Văn Thành*, xóm 11, Tiên Kỳ, Tân Kỳ, *Vương Đình Ngọ*, 12A2, THPT Nghi Lộc III, **Nghệ An**.

NGỌC HIỂN

Một tiếp tuyến đi đâu ?

Tí: Tèo ơi! Hai đường tròn cắt nhau thì có bao nhiêu tiếp tuyến chung?

Tèo: Có hai tiếp tuyến chung.

Tí: Nhưng tớ chỉ tìm được một tiếp tuyến chung với bài toán:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tiếp tuyến chung của hai đường tròn có PT

(C_1): $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$;

(C_2): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - z = 0$.

Lời giải của tớ như sau:

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(2 ; 4)$, bán kính $R_1 = 3$, (C_2) có tâm I_2 $(1 ; 1)$ và bán kính $R_2 = 2$. Vì $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ nên (C_1) và (C_2) cắt nhau. Giả sử tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) có dạng Δ: $ax - y + b = 0$. Ta có hệ

$$\begin{cases} d(I_1, (\Delta)) = R_1 \\ d(I_2, (\Delta)) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2a - 4 + b| = 3\sqrt{a^2+1} \\ |a - 1 + b| \quad = 2\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2|2a - 4 + b| = 3|a - 1 + b| & (1) \\ |a - 1 + b| \quad = 2\sqrt{a^2+1} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) có $b = a - 5$ hoặc $b = \dfrac{-7a + 11}{5}$.

Với $b = a - 5$, thay vào (2) tìm được

$$(a ; b) = \left(\frac{4}{3}; -\frac{11}{3}\right).$$

Với $b = \dfrac{-7a + 11}{5}$, thay vào (2) PT bậc hai ẩn a vô nghiệm. Do đó PT tiếp tuyến chung của hai đường tròn là $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{11}{3}$ (!)

Tèo: Lạ thật, đâu mất một tiếp tuyến?

Xin mời bạn đọc cho ý kiến giải thích giúp Tí và Tèo nhé!

TRIỆU VĂN HƯNG
(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÌM CỰC TRỊ CỦA BIỂU THỨC NHIỀU BIẾN BẰNG CÁCH QUY VỀ MỘT BIẾN

BÙI TUẤN ANH
(GV THPT Yên Thủy, Hòa Bình)

Để tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá trị lớn nhất (GTLN) của một biểu thức chứa nhiều hơn một biến số ta có thể biểu diễn các biến số của biểu thức đó theo một biến số mới, khi đó việc tìm GTNN, GTLN của biểu thức theo biến số mới này (chú ý đến điều kiện của nó) cũng chính là việc tìm GTNN, GTLN của biểu thức ban đầu. Dưới đây là một số thí dụ minh hoạ cho phương pháp tìm GTNN, GTLN bằng cách quy về một biến nói trên.

Thí dụ 1. *Cho a, b, c, d là các số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức*

$$A=\frac{a+b+c+c}{\sqrt[4]{abcd}}+\frac{\sqrt[4]{abcd}}{a+b+c+d}.$$

Lời giải. Đặt $t=\dfrac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}$, áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$a+b+c+d\ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}\ge 4\sqrt[4]{abcd}.$$

Suy ra $t\ge 4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Khi đó bài toán quy về tìm GTNN của

$$A(t)=t+\frac{1}{t}\text{ với } t\ge 4.$$

Xét $t_2>t_1\ge 4$ ta có

$$A(t_2)-A(t_1)=\frac{(t_2-t_1)(t_1t_2-1)}{t_1t_2}>0.$$

Vậy khi $t\ge 4$ thì hàm $A(t)$ đồng biến. Do đó GTNN của A bằng $\dfrac{17}{4}$ đạt được tại $t=4$ khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Thí dụ 2. *Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $P=x^2+2y^2-3x^2y^2$, biết rằng x, y thoả mãn*

$$(x^2+y^2+1)^2-4x^2-5y^2+3x^2y^2+1=0\qquad(1)$$

Lời giải. Ta có

$(1)\Leftrightarrow(x^2+y^2)^2-3(x^2+y^2)+2=-x^2-3x^2y^2$ (2)

Dễ thấy $-x^2-3x^2y^2\le 0$ với mọi x, y. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Đặt $t=x^2+y^2$, từ (2) ta có

$t^2-3t+2\le 0\Leftrightarrow 1\le t\le 2$ và P có dạng

$$P(t)=t^2-t+2.$$

Bài toán quy về tìm GTNN và GTLN của

$$P(t)=t^2-t+2\text{ với } 1\le t\le 2.$$

Xét $1\le t_1<t_2\le 2$ ta có

$$P(t_2)-P(t_1)=(t_2-t_1)(t_1+t_2-1)>0.$$

Suy ra với $1\le t\le 2$ thì hàm $P(t)$ đồng biến, do đó:

P đạt GTNN bằng 2 tại $t=1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0\text{ và } y=\pm 1;$$

P đạt GTLN bằng 4 tại $t=2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x=0\\x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=0\text{ và } y=\pm\sqrt{2}.$$

Thí dụ 3. *Cho hai số thực a, b thuộc đoạn* [2007 ; 2008]. *Tìm GTNN của biểu thức*

$$B=\frac{a+b}{ab^2}(a^2+b^2).$$

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Về những dãy số xác định bởi dãy các phương trình

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

Trong toán học, có nhiều trường hợp không xác định được giá trị cụ thể đối tượng mà chúng ta đang xét (thí dụ số, hàm số) nhưng vẫn có thể thực hiện các phép toán trên các đối tượng đó. Thí dụ ta có thể không biết giá trị các nghiệm của một phương trình (PT), nhưng vẫn biết được tổng của chúng:

"Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos^5 x - 5\cos^3 x + 3\cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$," hay là tính tích phân của một hàm mà ta không có biểu thức tường minh:

"Chứng minh rằng với mọi $t \geq 0$, PT $x^3 + tx - 8 = 0$ luôn có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là $x(t)$. Tính $\int_0^7 [x(t)]^2 dt$."

Trong bài viết này, chúng ta sẽ đề cập đến một tình huống căn bản khác, đó là khảo sát những *dãy số xác định bởi dãy các PT*:

Cho dãy các hàm số $f_n(x)$ xác định bởi công thức tường minh hoặc truy hồi thoả mãn điều kiện: *các PT $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất* $x_n \in D$. Cần khảo sát các tính chất của dãy (x_n) như khảo sát sự hội tụ, tìm giới hạn …

Chúng ta bắt đầu từ một bài thi tuyển sinh vào khoa Toán trường Đại học Độc lập Matxcơva năm 2000.

✪Bài toán 1. *Giả sử x_n thuộc khoảng $(0 ; 1)$ là nghiệm của phương trình*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\ldots+\frac{1}{x-n}=0.$$

Chứng minh dãy (x_n) hội tụ. Tìm giới hạn đó.

Bình luận. x_n được xác định duy nhất, vì hàm số $f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\ldots+\frac{1}{x-n}$ liên tục và đơn điệu trên $(0 ; 1)$. Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể củ x_n. Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của (x_n), ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Về tính bị chặn, mọi thứ đều ổn vì $0 < x_n < 1$. Về tính đơn điệu, ta chú ý một chút đến mối liên hệ giữa $f_n(x)$ và $f_{n+1}(x)$:

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{1}{x-n-1}.$$

Đây chính là chìa khoá để chứng minh tính đơn điệu của x_n.

Lời giải. Ta thấy $0 < x_n < 1$ nên

$$f_{n+1}(x_n)= f_n(x_n)+\frac{1}{x_n-n-1}=\frac{1}{x_n-n-1}<0,$$

trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0 ; x_n)$ có ít nhất một nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Suy ra $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số (x_n) giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

Ta chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả sau:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln n.$$

(Có thể chứng minh bằng cách đánh giá $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$).

Thật vậy, giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy (x_n) giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n.

Do $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\to+\infty$ khi $n\to+\infty$, nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\frac{1}{a}.$$

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM và khảo sát hàm số

THANH LOAN
(*Hà Nội*)

Về hàm số và đồ thị học sinh cần nắm được các kiến thức cơ bản và các dạng toán sau đây.

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hàm số, tính đơn điệu của hàm số. Mối liên hệ giữa sự đồng biến, nghịch biến của một hàm số và dấu đạo hàm cấp một của nó.

2. Điểm cực đại, điểm cực tiểu, điểm cực trị của hàm số. Các điều kiện đủ để có điểm cực trị của hàm số.

3. Giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số trên một tập hợp số.

4. Các phép biến đổi đơn giản đồ thị của hàm số (phép tịnh tiến song song với các trục toạ độ, phép đối xứng qua trục toạ độ).

5. Đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên của đồ thị.

6. Sơ đồ tổng quát để khảo sát các hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị):

$y=ax^3+bx^2+cx+d$; $\quad y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$;

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad (c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$;

$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}\quad (aa'\neq 0)$.

II. CÁC DẠNG TOÁN

1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Thí dụ 1. *Tìm a để hàm số* $y=(a+2)x^3-3x^2-3x+2$ *luôn nghịch biến.*

Lời giải. Tính $y'=3(a+2)x^2-6x-3$. Hàm số luôn nghịch biến khi $y'\leq 0$ với mọi x, tức là $\begin{cases} a+2<0 \\ \Delta'=9a+27\leq 0\end{cases}$ hay $a\leq -3$.

Thí dụ 2. *Xác định m để hàm số*

$$y=\frac{2x^2-3x+m}{x-1}$$

đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Hướng dẫn. Điều kiện

$y'=\dfrac{2x^2-4x+3-m}{(x-1)^2}\geq 0$, với mọi $x>3$

$\Leftrightarrow f(x)=2x^2-4x+3-m\geq 0$, với mọi $x>3$.

ĐS: $m\leq 9$.

Lưu ý 1. Khi tìm m để hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $(a;b)$, ta làm như sau :

- Tính đạo hàm cấp một $f'(x)$.
- Xác định m để $f'(x)\geq 0$ (hoặc $f'(x)\leq 0$) với mọi $x\in(a;b)$ bằng cách vận dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất hoặc dấu của tam thức bậc hai.

2. Tìm cực trị của hàm số; tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn, một khoảng

Thí dụ 3. *Tìm GTLN và GTNN của hàm số* $y=f(x)=2\cos x-\dfrac{4}{3}\cos^3 x$ *trên đoạn* $[0;\pi]$.

Lời giải. $y'=2\sin x\cos 2x$. Trên $[0;\pi]$, $y'=0$ tại $x=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}$; $x=\pi$. Ta có $f(0)=\dfrac{2}{3}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$; $f(\pi)=-\dfrac{2}{3}$. Vậy trên $[0;\pi]$, $\max f(x)=\dfrac{2}{3}$; $\min f(x)=-\dfrac{2}{3}$.

Thí dụ 4. *Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính 4cm, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.*

Lời giải. Gọi đường cao và bán kính đáy của hình trụ thứ tự là h cm và r cm $(0<h<8$,

$0 < r < 4$). Khi đó $r^2 = 16 - \frac{h^2}{4}$ nên thể tích của hình trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(16h - \frac{h^3}{4}\right)$. Nhận thấy V là hàm số của h xác định trên khoảng (0; 8).

$V' = \pi\left(16 - \frac{3h^2}{4}\right)$; $V' = 0$ tại $h = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Ta có

h	0	$\frac{8}{\sqrt{3}}$	4
V'	$+$	0	$-$
V	↗	$\frac{16\pi}{3\sqrt{3}}$	↘

Vậy max $V = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}}$ tại $h = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính 4cm, hình trụ có đường cao bằng $\frac{8}{\sqrt{3}}$cm sẽ có thể tích lớn nhất.

Lưu ý 2. Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $(a; b)$ (hoặc $[a ; b]$) ta có thể làm như sau:

- Tính đạo hàm cấp một $f'(x)$
- Giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, ..., x_n$ trên $(a ; b)$, rồi tính $f(x_1), ..., f(x_n)$. Khi đó

$$\max_{[a,\,b]} f(x) = \max\{f(a), f(x_1), ..., f(x_n), f(b)\} \;;$$

$$\min_{[a,\,b]} f(x) = \min\{f(a), f(x_1), ..., f(x_n), f(b)\}.$$

- Ta cũng có thể lập bảng biến thiên để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $(a ; b)$.

3. Bài toán liên quan đến các đường tiệm cận, điểm cực trị, điểm uốn của đồ thị

Thí dụ 5. *Cho hàm số* $y = \frac{mx-3}{x+n}$. *Tìm* m, n *để đồ thị hàm số nhận đường thẳng* $y = 2$ *làm tiệm cận ngang và nhận đường thẳng* $x = 2$ *làm tiệm cận đứng.*

(ĐS: $m = 2$; $n = -2$)

Thí dụ 6. *Tìm* a *để đồ thị hàm số* $y = x^4 - ax^2 + 3$ *có hai điểm uốn.*

Lời giải. Tính $y'' = 12x^2 - 2a$.

Đồ thị hàm số có hai điểm uốn khi $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $a > 0$.

Thí dụ 7. *Cho hàm số* $y = \frac{ax^2 + 3ax + 2a + 1}{x+2}$. *Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định. Tìm những điểm mà tiệm cận xiên của đồ thị hàm số không bao giờ đi qua với mọi* a.

Lời giải. Viết $y = ax + a + \frac{1}{x-2}$, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên (d): $y = ax + a$. Gọi $I(x_0; y_0)$ là điểm mà (d) luôn đi qua với mọi a, thì $y_0 = ax_0 + a$ với mọi a. Suy ra $a(1 + x_0) - y_0 = 0$ với mọi a. Dẫn đến $\begin{cases} 1 + x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$. Vậy $I(-1 ; 0)$.

Gọi $K(x_1; y_1)$ là điểm mà (d) không bao giờ đi qua với mọi a, khi đó PT $y_1 = ax_1 + a$ ẩn a vô nghiệm $\Leftrightarrow a(x_1 + 1) - y_1 = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x_1 + 1 = 0$ và $y_1 \neq 0$. Vậy $K(-1 ; k)$ với $k \neq 0$.

Lưu ý 3. Cần nhớ

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là tiệm cận xiên.

- Để tìm điểm $I(x_0; y_0)$ mà họ đồ thị $y = f(x, m)$ luôn đi qua với mọi m cần điều kiện $y_0 - f(x_0, m) = 0$ với mọi m. Đa thức $y_0 - f(x_0, m)$ biến m phải có các hệ số đều bằng 0, dẫn đến HPT hai ẩn x_0 và y_0. Số nghiệm của hệ chính là số điểm cố định của họ đồ thị $y = f(x, m)$.
- Để tìm điểm $K(x_1; y_1)$ mà họ đồ thị $y = F(x, m)$ luôn không đi qua với mọi m cần điều kiện PT (ẩn m) : $y_1 - F(x_1, m) = 0$ vô nghiệm. Chú ý rằng

$Am + B = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow A = 0$ và $B \neq 0$;

$Am^2 + Bm + C = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow A = B = 0$ và $C \neq 0$; hoặc $A \neq 0$ và $B^2 - 4AC < 0$.

4. Viết phương trình tiếp tuyến (PTTT)của đồ thị hàm số y = f(x) (C)

Lưu ý 4.

i) PTTT của (C) tại điểm có hoành độ x_0 là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \qquad (1)$$

ii) PTTT của (C) đi qua điểm $A(a\,;\,b)$:

Cách 1. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0, theo (1) ta có $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$.

Tìm x_0, trở về trường hợp i).

Cách 2. PT đường thẳng đi qua $A(a\,;\,b)$ với hệ số góc k là $y = k(x - a) + b$ sẽ tiếp xúc với (C) khi HPT $\begin{cases} f(x) = k(x-a)+b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm, dẫn đến PT $f(x) = f'(x_0)(x - a) + b$ có nghiệm. Giải PT tìm được nghiệm $x_1, \ldots, x_n$. Trở về trường hợp i).

iii) PTTT của (C) có hệ số góc k:

Giải phương trình $f'(x) = k$ tìm nghiệm $x_1, \ldots, x_n$, đây chính là hoành độ tiếp điểm, rồi trở về trường hợp i).

Thí dụ 8. *Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ (C).*

a) *Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$.*

b) *Viết PTTT của (C) đi qua gốc toạ độ.*

ĐS: a) $y = 9x - 4$; b) $y = -3x$ và $y = \dfrac{15}{4}x$.

Thí dụ 9.a) *Viết PTTT của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$, biết rằng các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 3x + 2008$.*

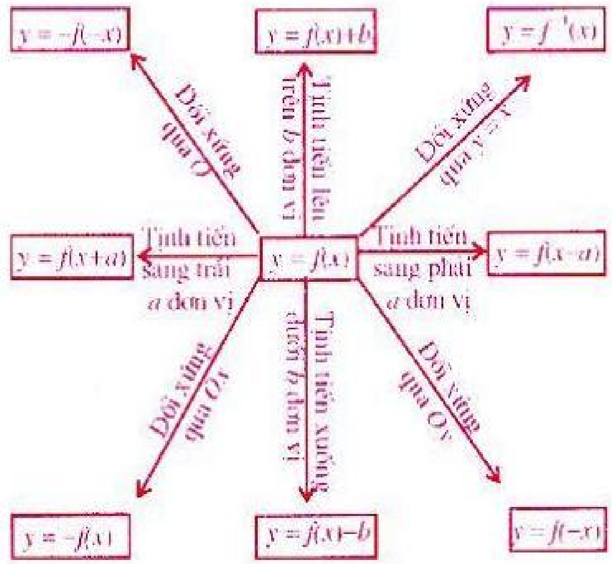
ĐS: $y = 3x - 3$ và $y = 3x - 11$.

b) *Viết PTTT của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 2}$, biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên.*

ĐS. $y = -x + 2\sqrt{2} - 5$ và $y = -x - 2\sqrt{2} - 5$.

5. Các phép biến đổi đơn giản đồ thị của hàm số. Dùng đồ thị của hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình

Lưu ý 5. Lấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ làm gốc, ta có sơ đồ biến đổi đồ thị như sau:



• Nhờ đồ thị này, ta có thể biện luận số nghiệm của phương trình $f(x, m) = 0$ theo m bằng cách biến đổi về $g(x) = h(m)$, rồi vẽ đồ thị hai hàm số $y = g(x)$ và $y = g(m)$ trên cùng hệ trục, số giao điểm (tuỳ theo m) của chúng chính là số nghiệm của phương trình.

Thí dụ 10. *Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.*

a) *Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.*

b) *Biện luận theo m số nghiệm của phương trình* $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Lời giải. a) Học sinh tự làm.

b) Ta có $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$.

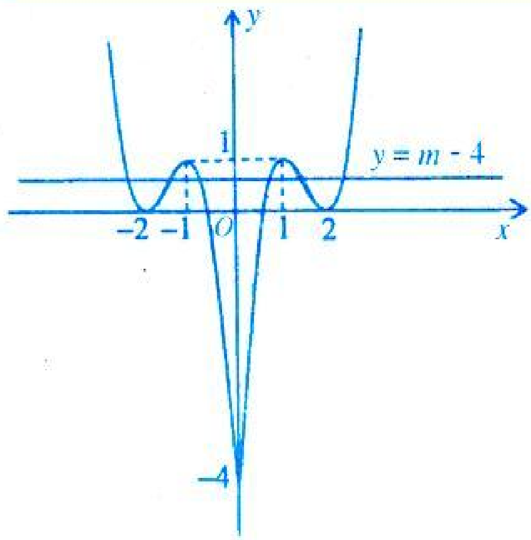
$y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ là hàm số chẵn, đồ thị của nó được suy ra từ câu a) bằng cách giữ nguyên phần đồ thị nằm bên phải trục Oy và lấy đối xứng phần đó qua trục tung (h.1). Số nghiệm của PT đã cho bằng số giao điểm của đồ thị $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ với đường thẳng $y = m - 4$. Do đó

$m < 0$: PT vô nghiệm

$m = 0$: có1 nghiệm; $0 < m < 4$: có 2 nghiệm

$m = 4$: có 4 nghiệm; $4 < m < 5$: có 6 nghiệm

$m = 5$: có 4 nghiệm; $m > 5$: có 2 nghiệm.



Hình 1

Thí dụ 11. *Cho hàm số* $y=\dfrac{-x^2+3x+m-1}{x+m^2-1}$.

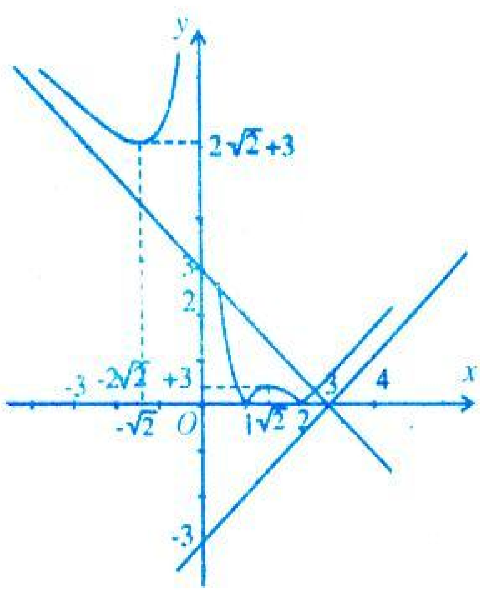
a) *Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi* $m=-1$.

b) *Bằng đồ thị biện luận theo k số nghiệm của phương trình* $\left|x+\dfrac{2}{x}-3\right|=k$.

Hướng dẫn

a) $m=-1$ thì $y=f(x)=-x-\dfrac{2}{x}+3$.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ không nằm dưới trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm dưới trục hoành qua trục hoành (h.2).



Hình 2

6. Bài toán liên quan đến khoảng cách

Thí dụ 12. *Cho hàm số*

$$y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1 \qquad (1)$$

Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực trị này cách đều gốc tọa độ O.

Hướng dẫn . Hàm số (1) có hai cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$. Tìm được toạ độ hai điểm cực trị $A(1-m;\ -2-2m^3)$; $B(1+m;\ -2+2m^3)$.

$OA=OB \Leftrightarrow 8m^3=2m \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$.

Thí dụ 13. *Cho hàm số*

$$y=\frac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1} \qquad (2)$$

Chứng minh rằng với mọi m, hàm số (2) luôn có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa chúng không phụ thuộc vào m

ĐS: Khoảng cách là $2\sqrt{5}$.

Thí dụ 14. *Cho hàm số* $y=mx+\dfrac{1}{x}$ (3)

Tìm m để hàm số (3) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực đại đến tiệm cận xiên bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn. $m>0$.

Điểm cực đại $M\left(-\dfrac{1}{\sqrt{m}};-2\sqrt{m}\right)$, tiệm cận xiên ($\Delta$): $mx-y=0$.

$d(M,\Delta)=\dfrac{|-\sqrt{m}+2\sqrt{m}|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m=1$.

BÀI TẬP

1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

a) $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$.

b) $y=x^3-3x^2$ trên khoảng $(-2;4)$.

c) $y=\sin x-\cos^2 x+\dfrac{1}{2}$.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^3-3x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết nó đi qua điểm $I(0;10)$.

c) Biện luận theo m bằng đồ thị số nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{4}x^3=9x-12\sqrt{3}m$.

MỘT HƯỚNG CHỨNG MINH bất đẳng thức có điều kiện

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Trong các đề thi chọn học sinh giỏi và các đề thi vào lớp 10 THPT chuyên, ta thường thấy xuất hiện các bài toán chứng minh bất đẳng thức có điều kiện. Đây là một dạng toán khó bởi lẽ nó còn rất "mới mẻ" với học sinh THCS và thường không có phương pháp chung để giải các bài toán dạng này.

Tuy nhiên, trong nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức có điều kiện, chúng ta có thể dựa vào điều kiện của biến để đặt ẩn phụ, đưa bài toán về dạng đơn giản hơn có thể đánh giá được trực tiếp mà không cần sử dụng các kiến thức cao. Dưới đây là một số thí dụ.

✪**Thí dụ 1.** *Cho $x + y = 2$. Chứng minh rằng*
$$x^5 + y^5 \ge 2.$$

Nhận xét. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$, dẫn đến cách đặt $x = 1 + a$, $y = 1 - a$, $a \in \mathbb{R}$ giúp cho lời giải bài toán đơn giản hơn.

Lời giải. Đặt $x = 1 + a$ với $a \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết suy ra $y = 1 - a$.

Ta có $x^5 + y^5 = (1 + a)^5 + (1 - a)^5$
$$= 2 + 20a^2 + 10a^4 \ge 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$, hay $x = y = 1$.

✪**Thí dụ 2.** *Cho $x + y + z = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau*
$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \ge 6.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Đặt $x = 1 + a$; $y = 1 + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Từ giả thiết suy ra $z = 1 - a - b$.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$
$$= (1 + a)^2 + (1 + b)^2 + (1 - a - b)^2 + (1 + a)(1 + b) + (1 + b)(1 - a - b) + (1 - a - b)(1 + a)$$
$$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 6 \ge 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} b = 0 \\ a + \dfrac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

✪**Thí dụ 3.** *Cho $a + b = c + d$. Chứng minh bất đẳng thức $c^2 + d^2 + cd \ge 3ab$.*

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d$.

Đặt $c = a + x$, với $x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết suy ra $d = b - x$. Ta có

$$c^2 + d^2 + cd$$
$$= (a + x)^2 + (b - x)^2 + (a + x)(b - x)$$
$$= \left(a - b + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} + 3ab \ge 3ab.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x = 0 \\ a - b + \dfrac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d.$$

✪**Thí dụ 4.** *Cho $x \le 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2(2 - x)$.*

Lời giải. Dự đoán giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = 4$.

Đặt $x = 4 - t$, từ giả thiết suy ra $t \ge 0$.

Ta có
$$A = (4 - t)^2(2 - 4 + t) = t^3 - 10t^2 + 32t - 32$$
$$= t(t - 5)^2 + 7t - 32 \ge -32.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 0$ hay $x = 4$.

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -32 khi $x = 4$.

✪**Thí dụ 5.** *Cho $x + y = 3$, $x \le 1$. Chứng minh rằng $y^3 - x^3 - 6y^2 - x^2 + 9y \ge 0$.*

Lời giải. Đặt $x = 1 - a$, $a \geq 0$. Từ giả thiết suy ra $y = 2 + a$. Lúc này bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(2+a)^3 - (1-a)^3 - 6(2+a)^2 - (1-a)^2 + 9(2+a) \geq 0$$

$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2 + a \geq 0$

$\Leftrightarrow a(a-1)^2 \geq 0$ (đúng vì $a \geq 0$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $a = 1$, tức là khi $x = 1$, $y = 2$ hoặc $x = 0$, $y = 3$.

✪Thí dụ 6. *Cho $x \leq 1$; $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 3x^2 + y^2 + 3xy$.*

Lời giải. Đặt $x = 1 - a$ và $x + y = 3 + b$, từ giả thiết suy ra $a, b \geq 0$.

Ta có $y = 2 + a + b$. Từ đó

$$\begin{aligned} B &= 3x^2 + y^2 + 3xy \\ &= 3(1-a)^2 + (2+a+b)^2 + 3(1-a)(2+a+b) \\ &= a^2 + b^2 - 5a + 7b - ab + 13 \\ &= \left(a - \frac{b}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{9}{2}b + \frac{27}{4} \geq \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 0 \end{cases}$, tức là $x = -\dfrac{3}{2}$ và $y = \dfrac{9}{2}$.

Vậy B đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{27}{2}$ khi $x = -\dfrac{3}{2}$ và $y = \dfrac{9}{2}$.

✪Thí dụ 7. *Cho $a + b \geq 2$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

Đặt $a = 1 + x$; $b = 1 + y$, từ giả thiết suy ra $x + y \geq 0$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1+x)^3 + (1+y)^3 \leq (1+x)^4 + (1+y)^4$$

$\Leftrightarrow 0 \leq x(1+x)^3 + y(1+y)^3$

$\Leftrightarrow x + y + 3(x+y)(x^2 - xy + y^2) + 3(x^2 + y^2) + (x^4 + y^4) \geq 0$ (đúng vì $x + y \geq 0$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$ hay $a = b = 1$.

✪Thí dụ 8. *Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 \geq a + b.$$

Lời giải. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$.

Đặt $a = 1 + x$, $b = 1 + y$. Ta có

$ab \geq 1 \Leftrightarrow (1+x)(1+y) \geq 1 \Leftrightarrow x + y + xy \geq 0.$

Ta có

$a^2 + b^2 \geq a + b$

$\Leftrightarrow (1+x)^2 + (1+y)^2 \geq 2 + x + y$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y \geq 0.$

Lại có $x^2 + y^2 \geq 2xy$, với mọi x, y nên có

$$x^2 + y^2 + x + y \geq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + xy + x + y \geq 0$$

(đúng vì $x + y + xy \geq 0$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$ hay $a = b = 1$.

Bài tập

1. Cho $a + b + c \geq 3$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

2. Cho $x, y > 0$ thoả mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{2}{xy} + \dfrac{3}{x^2 + y^2} \geq 14$.

3. Cho $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$(a+c)(b+d) + 2ac + 2bd \leq \frac{1}{2}.$$

4. Cho $a + b > 8$ và $b \geq 3$. Chứng minh rằng $27a^2 + 10b^3 > 945$.

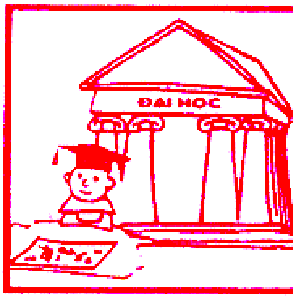
Nhắn tin

Tạp chí THTT vừa ra mắt cuốn *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ – Quyển 3*, trong đó thông tin về một số tác giả đã cũ:

Nguyễn Phú Chiến (Hà Nội), *Nguyễn Minh Thông* (Vĩnh Phúc), *Phan Nam Hùng* (Quảng Ngãi), *Nguyễn Ngọc Hương* (Tiền Giang), *Huỳnh Văn Trọng* (Bình Định), *Trần Văn Minh*, *Nguyễn Ngọc Bình Phương* (TP. Hồ Chí Minh).

Các tác giả hãy gửi địa chỉ mới để Tòa soạn gửi sách biếu. Xin cảm ơn.

THTT



Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Một số dạng toán SỬ DỤNG CÔNG THỨC TỔ HỢP VÀ NHỊ THỨC NEWTON

NGUYỄN ANH DŨNG
(*Hà Nội*)

Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị và nhị thức Newton khá phong phú, thường xuất hiện trong các kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông và tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng. Sau đây là một số kiến thức cơ bản và dạng toán thường gặp.

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Trong bài viết này ta quy ước n, k là các số tự nhiên với $n \geq 1$; $k \leq n$.

Cho một tập hợp A gồm n phần tử.

• Mỗi cách sắp xếp thứ tự n phần tử đó tạo thành một hoán vị. Số hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$.

• k phần tử sắp thứ tự của A tạo thành một chỉnh hợp chập k của n phần tử đó. Số chỉnh hợp là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

• k phần tử không phân biệt thứ tự của A tạo thành một tổ hợp chập k của n phần tử đó. Số tổ hợp là $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

• Công thức khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

• Các công thức thường dùng: $C_n^k = C_n^{n-k}$ (1)

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (2)$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \quad (3)$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \ldots + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$$

$$= C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} = 2^{n-1} \quad (4)$$

Sử dụng (2), ta chứng minh được hai công thức

$$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$$

$$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}.$$

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

1. Bài toán tính tổng

★ ***Thí dụ 1****. Rút gọn biểu thức*

$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k$,

với $k \leq n$, $n > 1$.

Lời giải. Với $k < n$, áp dụng công thức (2) và lưu ý $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$, ta có

$$S_k = C_n^0 - (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) - (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3)$$
$$+ \ldots + (-1)^k (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k)$$

Vậy $S_k = (-1)^k C_{n-1}^k$.

Nếu $k = n$ thì

$S_n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$.

Lưu ý. Nhiều bạn đã mắc sai lầm khi viết

$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$ (!)

Phải xét hai trường hợp đối với k như trong lời giải trên.

★ ***Thí dụ 2****. Tính tổng*

$S = C_{4n}^1 + C_{4n}^3 + C_{4n}^5 + \ldots + C_{4n}^{2n-1}$.

Lời giải. Áp dụng công thức (1), ta có

$$C_{4n}^1 = C_{4n}^{4n-1}, C_{4n}^3 = C_{4n}^{4n-3}, \ldots, C_{4n}^{2n-1} = C_{4n}^{2n+1}.$$

Do đó $S = C_{4n}^{4n-1} + C_{4n}^{4n-3} + \ldots + C_{4n}^{2n+1}$.

Ta được $2S = C_{4n}^1 + C_{4n}^3 + C_{4n}^5 + \ldots + C_{4n}^{4n-1} = 2^{4n-1}$ (xem công thức (4)). Vậy $S = 2^{4n-2}$.

★ ***Thí dụ 3****. (Sử dụng phép tính đạo hàm).*

Tính tổng $S = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - \ldots + (-1)^n (n+1) C_n^n$.

Lời giải. Xét đa thức $p(x) = x(1+x)^n$, ta có

$p(x) = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \ldots + C_n^n x^{n+1}$, nên

$p'(x) = C_n^0 + 2C_n^1x + 3C_n^2x^2 + ... + (n+1).C_n^nx^n$;

$p'(-1) = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n(n+1)C_n^n = S$.

Mặt khác $p(x) = x(1+x)^n \Rightarrow p'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}$. Vậy $S = p'(-1) = 0$.

Lưu ý. Để tính các tổng

$S_1 = C_n^0 + 2a.C_n^1 + 3a^2.C_n^2 + ... + (n+1)a^nC_n^n$

$S_2 = C_{2n}^0 + 3a^2.C_{2n}^2 + 5a^4.C_{2n}^4 ... + (2n+1)a^{2n}C_{2n}^{2n}$

$S_3 = 2aC_{2n}^1 + 4a^3.C_{2n}^3 + 6a^5.C_{2n}^5 ... + 2n.a^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}$

ta xét đa thức $p(x) = x(1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S_1 = p'(a)$.

Xét đa thức $q(x) = x(1+x)^{2n}$ và chứng tỏ rằng

$$2S_2 = q'(a) + q'(-a); \quad 2S_3 = q'(a) - q'(-a).$$

★ ***Thí dụ 4.*** *(Sử dụng phép tính tích phân).*

Tính tổng $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$

Lời giải. Xét đa thức $p(x) = (1+x)^n$, ta có $p(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$. Suy ra

$$\int_0^1 p(x)dx = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = S.$$

Do đó $S = \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Lưu ý. Để tính tổng

$$S = (b-a)C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + \frac{b^3-a^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n.$$ Hãy chứng tỏ rằng $S = \int_a^b p(x)dx$ với $p(x) = (1+x)^n$.

Ta thường gặp bài toán với một trong hai cận của tích phân là 0 hoặc ± 1.

Trong một số trường hợp, ta phải xét đa thức $p(x) = x^k(1+x)^n$ với $k = 1, 2, ...$

2. Chứng minh hệ thức tổ hợp

★ ***Thí dụ 5.*** *Chứng minh rằng*

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Lời giải. Ta có $(x+1)^n(1+x)^n = (x+1)^{2n}$. Vế trái của hệ thức trên chính là

$$(C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + ... + C_n^n)(C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^nx^n).$$

Dễ thấy hệ số của x^{2n} trong vế trái là $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2$;

hệ số của x^{2n} trong vế phải $((x+1)^{2n})$ là C_{2n}^n.

Do đó $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ (đpcm).

Lưu ý. Xét đẳng thức $(x+1)^n(1+x)^m = (x+1)^{n+m}$. Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để viết cả hai vế thành đa thức đối với x, đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc trong hai vế, bạn có thể viết ra được nhiều hệ thức về tổ hợp.

3. Phương trình tổ hợp

Phương trình tổ hợp là PT có chứa ẩn số trong công thức tổ hợp, chỉnh hợp, hoán vị.

★ ***Thí dụ 6.*** *Giải phương trình*

$A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$.

Lời giải. ĐK $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$. PT đã cho có dạng

$$\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!} - \frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!} = 3x^2 + 6! + 159$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + x(x+1) - \frac{3}{2}(x-1)(x-2) = 3x^2 + 879$$

$$\Leftrightarrow (x-12)(2x^2 + 11x + 147) = 0.$$

PT có nghiệm $x = 12$.

Lưu ý. Khi giải PT tổ hợp ta làm như sau: đặt điều kiện cho ẩn số; sử dụng các công thức về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để biến đổi, rút gọn và giải PT; đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện của bài toán để kết luận.

★ ***Thí dụ 7.*** *(Bài toán lập phương trình tổ hợp). Hãy tìm ba số hạng liên tiếp lập thành một cấp số cộng trong dãy số sau* $C_{23}^0, C_{23}^1, C_{23}^2, ..., C_{23}^{23}$.

Lời giải. Ba số $C_{23}^n, C_{23}^{n+1}, C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$2C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+1} + C_{23}^{n+1} + C_{23}^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{25}^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4.23!}{(n+1)!(22-n)!} = \frac{25!}{(n+2)!(23-n)!}.$$

Suy ra $(n+2)(23-n)=150 \Leftrightarrow n=8;\ n=13$.
Ta được $\div C_{23}^{8}, C_{23}^{9}, C_{23}^{10}$ và $\div C_{23}^{13}, C_{23}^{14}, C_{23}^{15}$.

Lưu ý. Một số tình huống thường gặp khi lập PT tổ hợp là:

Ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng (hoặc cấp số nhân) khi và chỉ khi $2b=a+c$ (hoặc $b^2=ac$).

Cho tập hợp A có n phần tử, số tập con của A gồm x phần tử bằng k lần số tập con của A gồm y phần tử, tương ứng với PT $C_n^x = kC_n^y$ …

4. Tính hệ số của đa thức

★***Thí dụ 8.*** *Tính số hạng không chứa x, khi khai triển* $P(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ *biết rằng n thoả mãn* $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8$.

Lời giải. Áp dụng công thức (2), ta có

$$C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9$$
$$=C_n^6+C_n^7+2\left(C_n^7+C_n^8\right)+C_n^8+C_n^9$$
$$=C_{n+1}^7+2C_{n+1}^8+C_{n+1}^9=C_{n+2}^8+C_{n+2}^9=C_{n+3}^9.$$

Giả thiết tương đương với

$$C_{n+3}^9=2C_{n+2}^8 \Leftrightarrow \frac{n+3}{9}=2 \Leftrightarrow n=15.$$

Khi đó $P(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}$

$$=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{15-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k2^kx^{\frac{30-5k}{6}}.$$

Số hạng không chứa x tương ứng với $\dfrac{30-5k}{6}=0 \Leftrightarrow k=6$.
Số hạng phải tìm là $C_{15}^6.2^6=320320$.

Lưu ý. Tính hệ số của số hạng x^α (α là một số hữu tỉ cho trước) trong khai triển nhị thức Newton của $p(x)=(f(x))^n$, ta làm như sau:

Viết $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{g(k)}$; số hạng chứa x^α tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải PT ta tìm được k. Nếu $k\in\mathbb{N}$, $k\le n$, hệ số phải tìm là a_k; nếu $k\notin\mathbb{N}$ hoặc $k>n$, thì trong khai triển không có số hạng chứa x^α, hệ số phải tìm bằng 0.

★***Thí dụ 9.*** *Hãy tìm hệ số có giá trị lớn nhất của đa thức*

$$P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+\ldots+a_{13}.$$

Lời giải. Ta có

$$P(x)=(2x+1)^{13}=\sum_{n=0}^{13}C_{13}^n(2x)^{13-n}.$$

Vậy $a_n=C_{13}^n.2^{13-n} \Rightarrow a_{n-1}=C_{13}^{n-1}.2^{14-n}$ $(n=1,2,\ldots,13)$.

Xét BPT (với ẩn số n):

$$a_{n-1}\le a_n \Leftrightarrow C_{13}^{n-1}.2^{14-n}\le C_{13}^n.2^{13-n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2.13!}{(n-1)!(14-n)!}\le\frac{13!}{n!(13-n)!}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{14-n}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow n\le\frac{14}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Do đó BĐT $a_{n-1}\le a_n$ đúng với $n\in\{1,2,3,4\}$ và dấu đẳng thức không xảy ra.
Ta được $a_0<a_1<a_2<a_3<a_4$ và $a_4>a_5>\ldots>a_{13}$.
Vậy $\max(a_n)=a_4=C_{13}^4.2^9=366080$.

Lưu ý. Để tìm hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $(ax+b)^m$ thành một đa thức, ta làm như sau:

Tính hệ số của số hạng tổng quát; giải BPT $a_{n-1}\le a_n$ với ẩn số n; hệ số lớn nhất phải tìm tương ứng với số tự nhiên n lớn nhất thoả mãn BPT trên.

BÀI TẬP LÀM THÊM

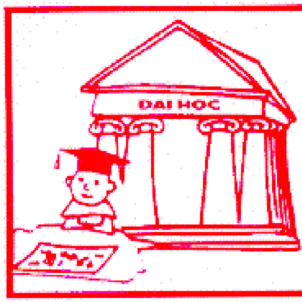
1. Tính các tổng: $S=1^2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+n^2C_n^n$;

$$P=\frac{1}{2}C_{2n}^0+\frac{1}{4}C_{2n}^2+\frac{1}{6}C_{2n}^4+\ldots+\frac{1}{2n+2}C_{2n}^{2n}.$$

2. Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức $p(x)=\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{3}\right)^{14}$.

3. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{2}.A_{2x}^2-A_x^2\le\dfrac{6}{x}.C_x^3+10$.

4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $p(x)=\left(1+x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^8$.



Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH SIÊU VIỆT

PHẠM GIA LINH
(Hà Nội)

Để giải phương trình (PT) và bất phương trình (BPT) siêu việt (mũ, lôgarit, lượng giác) ta cần nắm vững các kiến thức cơ bản và các phương pháp giải của nó.

A. PT VÀ BPT MŨ, LÔGARIT

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa và các tính chất của luỹ thừa (với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ, số mũ thực) và lôgarit.

2. Tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

3.. Các PT và BPT cơ bản

- Với mọi số dương m thì

$a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m \ (0 < a \neq 1)$;

$$a^x > m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \log_a m \quad \text{khi } a > 1, \\ x < \log_a m \quad \text{khi } 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

- Với mọi số thực m thì

$\log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m$;

$$\log_a x > m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a^m \text{ khi } a > 1 \\ x < a^m \text{ khi } 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

Trường hợp $a^x < m$, $\log_a x < m$ xét tương tự.

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1) Phương pháp đưa về cùng cơ số

★Thí dụ 1. *Giải PT* $2^{x+1}.\ 5^x = 2.\ 10^{2x+5}$ (1)

Lời giải. (1) $\Leftrightarrow 10^x = 10^{2x+5} \Leftrightarrow x = 2x + 5$.

Vậy $x = -5$.

★Thí dụ 2. *Giải PT*

$$\log_3(2x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(3-x) = 0 \qquad (2)$$

Lời giải. Biến đổi (2) $\Leftrightarrow \log_3(2x+1) = \log_3 \dfrac{1}{3-x}$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = \frac{1}{3-x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 2 = 0 \\ x < 3. \end{cases}$$

ĐS. $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$.

★Thí dụ 3. *Giải BPT*

$\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$ (3)

Lời giải. (3) $\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 80(2^{x-2}+1)$

$\Leftrightarrow 4^x + 144 < 80(2^{x-2}+1) \Leftrightarrow 4^x - 20.\ 2^x + 64 < 0$

$\Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4$.

★Thí dụ 4. *Giải BPT*

$$(\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5} + 2)^{x-1} \qquad (4)$$

Lời giải. Do $\sqrt{5} + 2 = (\sqrt{5} - 2)^{-1}$ và $\sqrt{5} - 2 < 1$

nên $(\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5} - 2)^{1-x} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} \geq 1 - x$.

ĐS. $x \geq 1$ hoặc $-2 \leq x < -1$.

Lưu ý 1. Cần nhớ

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$;

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \text{ khi } a > 1, \\ f(x) < g(x) \text{ khi } 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

$$\log_a f(x) > \log_a (x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) > 0 \text{ khi } a > 1, \\ 0 < f(x) < g(x) \text{ khi } 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

2) Phương pháp đặt ẩn phụ

★Thí dụ 5. *Giải PT*

$$(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62 \qquad (5)$$

Lời giải. Nhận xét $(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15}) = 1$.

Đặt $t = (4 + \sqrt{15})^x$ ($t > 0$) thì PT (5) có dạng

$t + \dfrac{1}{t} = 62 \Leftrightarrow t^2 - 62t + 1 = 0$, PT có hai

nghiệm $t = 31 \pm 8\sqrt{15} = \left(4 \pm \sqrt{15}\right)^2$.

Với $t = (4 + \sqrt{15})^2$ thì $(4 + \sqrt{15})^x = (4 + \sqrt{15})^2$

$\Leftrightarrow x = 2$; Với $t = (4 - \sqrt{15})^2$ thì $x = -2$.

Vậy PT (5) có tập nghiệm là $\{-2 ; 2\}$.

★**Thí dụ 6**. *Giải BPT*

$$\frac{6}{\log_2 2x}+\frac{4}{\log_2 x^2}>3 \qquad (6)$$

Lời giải. Đặt $t=\log_2 x$ ($t\neq 0$) thì (6) có dạng

$$\frac{6}{1+t}+\frac{2}{t}>3 \Leftrightarrow \frac{-3t^2+5t+2}{(1+t)t}>0 \Leftrightarrow -1<t<-\frac{1}{3}$$

hoặc $0<t<2$. Khi đó $-1<\log_2 x<-\frac{1}{3}$ hoặc

$0<\log_2 x<2$.

Vậy tập nghiệm của (6) là $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup(1;4)$.

★**Thí dụ 7.** *Giải PT*

$$3.\,49^x+2.\,14^x-4^x=0 \qquad (7)$$

Hướng dẫn. Chia hai vế của PT cho 4^x rồi đặt

$t=\left(\frac{7}{2}\right)^x$. ĐS. $x=-\log_{\frac{7}{2}}3$.

Lưu ý 2. Mục đích của phương pháp đặt ẩn phụ là chuyển các bài toán đã cho về PT (hoặc BPT) hữu tỉ đã biết cách giải.

Dạng $(a+\sqrt{b})^{f(x)}\pm(a-\sqrt{b})^{f(x)}=c$ (hoặc $>c$) với $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=1$ nên đặt $t=(a+\sqrt{b})^{f(x)}$.

Dạng $au^{2f(x)}+b(uv)^{f(x)}+cv^{2f(x)}=0$, thì nên chia cho $v^{2f(x)}$ rồi đặt $t=\left(\frac{u}{v}\right)^{f(x)}$; Khi biến đổi PT về dạng $af(x)^2+bf(x)+c=0$ (hoặc >0) với $f(x)=m^{g(x)}$ hoặc $f(x)=\log_m g(x)$, ta đặt $t=f(x)$ để đưa về PT (hoặc BPT) bậc hai ẩn t.

3) Phương pháp lôgarit hoá

★**Thí dụ 8.** *Giải PT* $\quad 3^x.8^{\frac{x}{x+2}}=6 \qquad (8)$

Lời giải. ĐK $x\neq -2$. Lôgarit cơ số 3 hai vế có

$$x+\frac{3x}{x+2}\log_3 2=1+\log_3 2 \Leftrightarrow (x-1)\left(1+\frac{2\log_3 2}{x+2}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2(1+\log_3 2)$.

★**Thí dụ 9.** *Giải PT* $\quad 2^{x^2+4}=3^{x-2} \qquad (9)$

Hướng dẫn. Lôgarit cơ số 2 hai vế.

ĐS. Tập nghiệm của PT (9) là $\{2 ; \log_2 3-2\}$.

Lưu ý 3. Phương pháp lôgarit hoá rất có hiệu lực khi hai vế của PT có dạng tích các luỹ thừa nhằm chuyển ẩn số khỏi số mũ. Cần nhớ

$a^{f(x)}=b \Leftrightarrow f(x)=\log_a b$ $(0<a\neq 1,\ b>0)$;

$a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)}=\log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log_b a=g(x)$.

4) Phương pháp sử dụng tính chất của hàm số

★**Thí dụ 10.** *Giải PT* $\quad 3^x=3-\log_5 x \qquad (10)$

Lời giải. Dễ thấy $x=1$ là nghiệm của (10).

Với $x>1$ thì $3^x>3^1=3-\log_5 1>3-\log_5 x$;

Với $x<1$ thì $3^x<3^1=3-\log_5 1<3-\log_5 x$.

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của (10).

★**Thí dụ 11.** *Giải PT* $\quad 2^x=3^{\frac{x}{2}}+1 \qquad (11)$

Lời giải. $(11)\Leftrightarrow 1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Dễ thấy $x=2$ là một nghiệm của (11).

Với $x>2$ thì $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$;

Với $x<2$ thì $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của PT (11).

★**Thí dụ 12.** *Giải PT* $\log_3(x+1)=\frac{4}{x+2} \qquad (12)$

Hướng dẫn. Vế trái là HS đồng biến, vế phải là HS nghịch biến. ĐS. $x=2$.

Lưu ý 4. Nếu PT có nghiệm x_0, một vế của PT là HS đồng biến, vế kia là HS nghịch biến (hoặc là HS hằng) thì nghiệm x_0 là duy nhất.

5) Hệ phương trình mũ và lôgarit

★**Thí dụ 13.** *Giải HPT* $\begin{cases}2^x.3^y=12\\3^x.2^y=18.\end{cases}$

Lời giải. Lôgarit cơ số 2 cả hai vế của hai PT

$\begin{cases}x+y\log_2 3=2+\log_2 3\\x\log_2 3+y=1+2\log_2 3\end{cases}$, đây là HPT bậc nhất hai ẩn. Giải tìm được $(x ; y)=(2 ; 1)$.

★**Thí dụ 14.** *Giải HPT*

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1 & \text{(i)}\\ 3\log_9(9x^2)-\log_3 y^3=3 & \text{(ii)}\end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x \ge 1$, $0 < y \le 2$.

(ii) $\Leftrightarrow 3(1+\log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y$
$\Leftrightarrow x = y$. Thay $y = x$ vào (i) dẫn đến
$(x-1)(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

Vậy HPT có hai nghiệm $(x ; y)$ là $(1 ; 1)$; $(2 ; 2)$.

★**Thí dụ 15.** *Giải HPT* $\begin{cases}\log_x(3x+2y)=2\\ \log_y(3y+2x)=2.\end{cases}$

Hướng dẫn. Đưa về HPT đối xứng loại II, từ đó tìm được nghiệm $(x ; y) = (5 ; 5)$.

★**Thí dụ 16.** *Giải HPT* $\begin{cases}5\log_2 x-3\log_4 y=-8\\ 10\log_2 x^2-\log_4 y=-9.\end{cases}$

Hướng dẫn. Đặt $u = \log_2 x$, $v = \log_4 y$.

Lưu ý 5. Ta cũng dùng các phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ,.. như HPT hữu tỉ đã biết.

B. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các công thức lượng giác.

2. Các phương trình lượng giác cơ bản

$\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, $\cot x = m$.

3. Phương trình dạng $a\sin x + b\cos x = c$,

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$.

4. PT đưa về PT đa thức của một hàm số lượng giác.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

★ **Thí dụ 17.** Giải PT

$$\cot x + \sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)=4 \qquad (13)$$

Lời giải. ĐK $\sin x \ne 0$, $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0$.

Biến đổi vế trái của (13) ta có

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$ Suy ra $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Vậy $x = \frac{\pi}{12}+k\pi$; $x = \frac{5\pi}{12}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

★**Thí dụ 18.** *Giải PT*

$$\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0 \ (14)$$

Lời giải. Dùng biến đổi tích thành tổng, ta có

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\frac{3}{2}=0$$

$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x - \cos 4x + \sin 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$ (do $|\sin 2x| \le 1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

★**Thí dụ 19.** *Giải PT*

$\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x = 6$ (15)

Lời giải. ĐK $x \ne \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ta có

$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2$

$\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)^3 - 3(\tan x + \cot x)$.

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \ge 2$) thì PT (15) có dạng $t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do đó

$\tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi$

★**Thí dụ 20.** *Giải PT*

$$\sin^3 x-\cos^3 x=\cos 2x\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad (16)$$

Hướng dẫn. ĐK: $x \ne \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Do $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

nên (16) biến đổi thành

$(\sin x - \cos x)(1-\sin x)(1-\cos x) = 0$.

ĐS: $x = \frac{\pi^2}{42}+k\pi$; $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

BÀI TẬP

Giải các PT, BPT sau :

1. $3\sin^2 x - \cos 2x - \sin 2x + \cos^2 x = 1$;

2. $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x$;

3. $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 > 0$;

4. $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$;

5. $\log_2(4^x + 15.2^x + 27) - 2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4.2^x-3}=0$;

6. $1 + 8^{\frac{x}{2}} = 3^x$.

DÙNG BIỂU THỨC LIÊN HỢP VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD-ĐT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Trong các đề thi học sinh giỏi THCS cũng như đề thi vào lớp 10 THPT, thường có bài về phương trình và hệ phương trình vô tỉ. Việc sử dụng biểu thức liên hợp cho các bài toán này nhiều khi cho ta kết quả nhanh chóng.

Trước hết ta nhắc lại một số công thức sau:

TT	*Biểu thức*	*Biểu thức liên hợp*	*Tích*
1	$\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$	$\sqrt{A}\mp\sqrt{B}$	$A-B$
2	$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B}$	$A+B$
3	$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$	$A-B$

Dưới đây là một số thí dụ minh hoạ.

★***Thí dụ 1.*** *Giải PT* $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$.

Lời giải. Điều kiện $x\geq\frac{3}{2}$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$$\frac{(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x})(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x})}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2(x-3)$$

$\Leftrightarrow$ hoặc $x=3$ (thoả mãn) hoặc

$$2-\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=0 \qquad (1)$$

Từ ĐK $x\geq\frac{3}{2}>1$ suy ra $2-\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}>0$.

Do đó PT (1) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

★***Thí dụ 2.*** *Giải PT* $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$.

Lời giải. Điều kiện $x\geq-\frac{10}{3}$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$$(x+3)(x+6)=\frac{2(\sqrt{3x+10}-1)(\sqrt{3x+10}+1)}{\sqrt{3x+10}+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+6)=\frac{6(x+3)}{\sqrt{3x+10}+1}$$

$\Leftrightarrow$ hoặc $x=-3$ (thoả mãn) hoặc

$$x+6-\frac{6}{\sqrt{3x+10}+1}=0 \qquad (1)$$

• Với $x>-3$ thì $\frac{6}{\sqrt{3x+10}+1}<3$ và $x+6>3$, nên PT (1) vô nghiệm.

• Với $-\frac{10}{3}\leq x<-3$, tương tự có $\frac{6}{\sqrt{3x+10}+1}>3$ và $x+6<3$ nên PT (1) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=-3$.

★***Thí dụ 3.*** *Giải PT* $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$ (*)

Lời giải. Ta có

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+12}-4=3(x-2)+(\sqrt{x^2+5}-3)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{x^2+12}-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}{\sqrt{x^2+12}+4}$$

$$=3(x-2)+\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$\Leftrightarrow$ hoặc $x=2$ (thoả mãn) hoặc

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-3-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=0 \qquad (1)$$

Do $\sqrt{x^2+12}>\sqrt{x^2+5}$, từ (*) suy ra $3x>5$, dẫn đến $x+2>0$, từ đó suy ra

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-3-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}<0$$

nên PT (1) vô nghiệm. Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

★*Thí dụ 4. Giải PT* $2x^2-11x+21=\sqrt[3]{4x-4}$.

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$(x-3)(2x-5)=$$
$$\frac{3(\sqrt[3]{4x-4}-2)(\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x-5)=\frac{12(x-3)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$$

$\Leftrightarrow$ hoặc $x=3$ hoặc $2x-5-\dfrac{12}{t^2+2t+4}=0$ (1)

với $t=\sqrt[3]{4x-4}$.

- Với $x>3$ thì $2x-5>1$ và $\dfrac{12}{t^2+2t+4}<1$, suy ra PT (1) vô nghiệm.
- Với $x<3$, thì $2x-5<1$ và $\dfrac{12}{t^2+2t+4}>1$, suy ra PT (1) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

★*Thí dụ 5. Giải PT* $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$.

Lời giải. Điều kiện $-2\le x\le 2$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$$\frac{\left(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}=\frac{2(3x-2)}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3x-2)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}}=\frac{2(3x-2)}{\sqrt{x^2+4}}\Leftrightarrow \text{hoặc } x=\frac{2}{3},$$

hoặc $\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}=\sqrt{x^2+4}$ (1)

Bình phương hai vế của (1) ta được

$$4\sqrt{2(2+x)(2-x)}+(2-x)(x+4)=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}\left(4\sqrt{2(2+x)}+(x+4)\sqrt{2-x}\right)=0 \quad (2)$$

Dễ thấy $4\sqrt{2(2+x)}+(x+4)\sqrt{2-x}>0$ với $-2\le x\le 2$, do đó từ (2) suy ra $x=2$ (thoả mãn). Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{2}{3}$ hoặc $x=2$.

★*Thí dụ 6. Giải HPT* $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=3 & (1)\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x-2}=3 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x\ge 2$ và $y\ge 2$. Từ HPT đã cho ta suy ra

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=\sqrt{y+1}-\sqrt{y-2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}$$
$$=\frac{(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-2})(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-2})}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-2}}.$$

Từ đó có $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{y+1}+\sqrt{y-2}$.

Nếu $x>y\ge 2$ thì $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}>\sqrt{y+1}+\sqrt{y-2}$;

Nếu $2\le x<y$ thì $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}<\sqrt{y+1}+\sqrt{y-2}$.

Do đó $x=y$. Thay vào PT (1) ta được

$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(x-2)}=5-x$ (3)

Bình phương hai vế của (3), giải ra được $x=3$ (thoả mãn).

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(3;3)$.

★*Thí dụ 7. Giải HPT* $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{y}}=2 & (1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}=2 & (2)\end{cases}$

Lời giải. Điều kiện $x>0$, $y>0$. Từ hệ đã cho suy ra

$$\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2+\frac{1}{y}}-\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$