

1. MỞ ĐẦU

1.1. Lý do chọn đề tài.

Chủ đề các bài toán về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng được đông đảo giáo viên dạy bộ môn toán và học sinh quan tâm. Trong những năm gần đây, cấu trúc đề thi HSG tỉnh, thi THPT Quốc gia (trước đây là đề thi tuyển sinh ĐH-CĐ-THCN), câu hình học tọa độ trong mặt phẳng có vị trí quan trọng, đây là một trong những câu hỏi ở mức độ kiến thức vận dụng và vận dụng nâng cao nhằm phân loại học sinh giữa mức điểm khá và điểm giỏi. Chính vì nhu cầu rất lớn của nhiều học sinh là phải giải được bài tập này trong đề thi HSG, THPT Quốc gia nên chủ đề hình học tọa độ trong mặt phẳng ngày càng trở nên hấp dẫn người dạy và người học. Cách thức ra đề bài tập loại này theo thời gian đã chuyển từ thể loại sử dụng các công cụ đại số để giải quyết bài toán hình học về loại phải nắm được tính chất hình học chìa khóa để vận dụng giải quyết bài toán. Tuy vậy, khi gặp bài toán tọa độ trong mặt phẳng, phần lớn học sinh còn lúng túng, khó khăn để tìm kiếm lời giải. Qua tìm hiểu, chúng tôi nhận thấy nhiều học sinh ở trường THPT Như Thanh còn yếu về kiến thức hình học ở chương trình hình học THCS. Học sinh chưa nắm được nhiều kết quả quan trọng của hình học phẳng trong tam giác, các tứ giác đặc biệt (Hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông), đường tròn và phương pháp chứng minh các kết quả đó. Về phía giáo viên dạy bộ môn toán, mặc dù đã có sự quan tâm nhất định về chủ đề này nhưng phần nhiều là có tâm lý e ngại khi tự mình sáng tạo bài toán hình học tọa độ nên lựa chọn con đường sưu tầm các bài toán có sẵn trên mạng Internet hoặc trong các tài liệu sách báo khác. Việc làm này tuy có đạt được một phần mục đích nhưng giáo viên chưa thực sự chủ động về nguồn tài liệu phục vụ công tác giảng dạy.

Từ thực tiễn công tác, bản thân nhiều năm ôn thi tuyển sinh ĐH-CĐ-THCN, bồi dưỡng HSG, tôi nhìn nhận chủ đề các bài toán về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng là một chủ đề quan trọng. Để phục vụ công tác bồi dưỡng, ngoài việc sưu tầm các bài tập qua tài liệu sách báo..., qua trao đổi kinh nghiệm giảng dạy với đồng nghiệp còn tự mình nghiên cứu, vận dụng các kết quả hình học phẳng để xây dựng được hệ thống bài tập tọa độ trong mặt phẳng hay và khó, giúp ích được nhiều cho học sinh phát triển kỹ năng và tư duy, tạo được nhiều hứng khởi, đam mê cho các em. Từ những lý do ở trên, tôi lựa chọn đề tài: ***“Kỹ năng xây dựng các bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng từ các tính chất hình học của tam giác”***.

1.2. Mục đích nghiên cứu.

- Ôn tập, củng cố kiến thức một cách hệ thống các tính chất hình học thường gặp trong tam giác.
- Rèn luyện kỹ năng giải các bài toán hình học tọa độ cho người học.
- Phát triển kỹ năng sáng tạo bài tập hình học tọa độ từ các tính chất hình học phẳng.

1.3. Đối tượng nghiên cứu.

- Nghiên cứu các tính chất hình học trong tam giác.
- Tìm tòi, sáng tạo các bài toán hình học tọa độ từ các tính chất hình học thuần túy đã biết.

1.4. Phương pháp nghiên cứu.

- Nghiên cứu thông qua các tài liệu có sẵn.
- Tự nghiên cứu thông qua các ý tưởng toán học của bản thân.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.

2.1. Cơ sở lý luận

Năm 1637, nhà Toán học-Triết học thiên tài người Pháp là Descartes đã cho ra đời cuốn sách “La Geometrie” với nội dung là xây dựng hình học bằng phương pháp tọa độ. Cuốn sách ra đời đã đánh dấu một bước tiến mạnh mẽ của nền toán học thời bấy giờ. Phương pháp tọa độ ra đời đã giúp con người đại số hóa môn hình học trừu tượng, nghĩa là con người dùng công cụ đại số để nghiên cứu hình học (Điểm, đường thẳng, đường tròn, vectơ... đã được biểu diễn theo những con số).

Trong mặt phẳng chứa các đối tượng hình học (Điểm, đường thẳng, đường tròn, vectơ...), ta có thể đặt vào đó một hệ trục tọa độ trục chuẩn Oxy, khi đó các yếu tố hình học đã được số hóa, phiên dịch bài toán này sang ngôn ngữ tọa độ ta có được một bài toán tọa độ. Nội dung chính của đề tài này là từ các bài toán hình học thuần túy, đặt vào đó một hệ trục tọa độ để có được bài toán hình học tọa độ, giải bài toán này theo ngôn ngữ tọa độ có sử dụng các yếu tố hình học đặc trưng.

2.2. Thực trạng của vấn đề nghiên cứu

- Ở trường THPT Như Thanh, phần lớn học sinh có kiến thức về chương trình hình học THCS còn hạn chế; số lượng học sinh giải được các bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng là chưa nhiều.

- Vì đối tượng học sinh khó có thể tiếp cận được các bài toán hình học tọa độ trong mặt phẳng nên nhiều giáo viên chưa có hứng thú trong giảng dạy, nghiên cứu, phân loại các bài tập dạng này để phục vụ cho công tác giảng dạy và kiểm tra đánh giá.

- Nguồn tài liệu chủ yếu được thu thập từ các đề thi thử THPT Quốc gia của các trường trên cả nước; chưa có tài liệu đúc kết, phân loại và nêu rõ phương pháp giải các dạng toán hình học tọa độ sát thực với mức độ đề thi THPT Quốc gia.

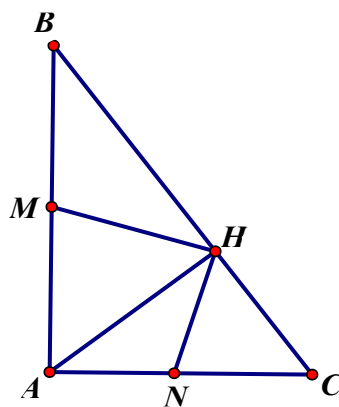
2.3. Các giải pháp thực hiện để giải quyết vấn đề

Trong suốt phần này, tác giả đã đưa ra 15 tính chất hình học đặc trưng trong tam giác và chỉ ra phương pháp chứng minh các tính chất này. Sau mỗi tính chất được đưa ra có phần lời bình nhằm định hướng cách sáng tạo các bài toán hình học tọa độ từ các tính chất hình học đặc trưng, tiếp đó xây dựng bài toán hình học tọa độ và hướng dẫn giải theo phương pháp này. Tác giả đã sắp xếp cấu trúc

bắt đầu từ các tính chất trong tam giác vuông, đến tam giác cân, tam giác đều và đến tam giác bất kỳ cùng các đường tròn nội, ngoại tiếp của nó.

Tính chất 1: Tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu của A lên BC; M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC. Khi đó: $MH \perp NH$.

Chứng minh:



(Hình 1a)

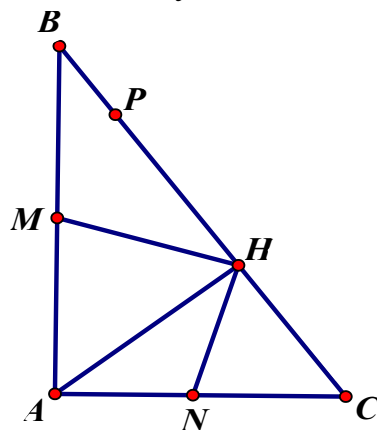
Ta có tam giác AHB vuông tại H và M là trung điểm của AB nên $MH = MB$, điều này chứng tỏ tam giác MHB cân tại M. Tương tự ta cũng có tam giác NHC cân tại N. Từ đó ta có được: $\angle MBH = \angle MHB, \angle NCH = \angle NHC$

Lại có: $\angle MBH + \angle NCH = 90^\circ$ nên $\angle MHB + \angle NHC = 90^\circ$ hay $MH \perp NH$.

Bình luận: Nếu cho phương trình đường thẳng MH và toạ độ điểm N ta sẽ tìm được toạ độ điểm H, kết hợp với điểm P có toạ độ cho trước thuộc BC ta sẽ lập được phương trình BC. Ràng buộc điểm C thuộc một đường cho trước ta sẽ tìm được C. Từ đó tìm được toạ độ A, B. Sau đây là một ví dụ về bài toán toạ độ được tạo nên từ ý tưởng trên.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm $N(7; 2)$, M lần lượt là trung điểm của AC, AB; H là hình chiếu của A lên BC. Biết đường thẳng MH có phương trình $2x - y - 2 = 0$, BC đi qua điểm $P(0; 4)$, điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 3 = 0$. Hãy tìm toạ độ các đỉnh của tam giác.

Hướng dẫn giải:



(Hình 1b)

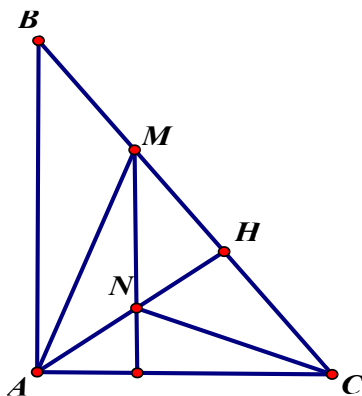
Theo tính chất 1, ta có $MH \perp NH$. Từ giả thiết, ta lập được phương trình của NH là: $x + 2y - 11 = 0$. Giải hệ tìm được toạ độ điểm $H(3; 4)$.

Từ tọa độ các điểm H và P thuộc BC ta có phương trình của BC là: $y = 4$. Từ đây, ta tìm được tọa độ điểm C(11; 4). Vì N(7; 2) là trung điểm của AC nên ta tìm được tọa độ điểm A(3; 0). Đường thẳng AB vuông góc với AC nên phương trình của AB là: $2x + y - 6 = 0$. Giải hệ tìm được B(1; 4).

Vậy: A(3; 0), B(1; 4), C(11; 4).

Tính chất 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu của A lên BC; M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BH và AH. Khi đó ta có $CN \perp AM$.

Chứng minh:



(Hình 2)

Xét tam giác ACM. Có AH là một đường cao. Theo giả thiết: M, N lần lượt là các trung điểm của các đoạn thẳng HB, AH nên MN là đường trung bình của tam giác AHB, bởi vậy: $MN \parallel AB$. Lại có: $AB \perp AC$ nên $MN \perp AC$. Vậy MN là một đường cao thứ hai của tam giác ACM. Từ đây, ta có $CN \perp AM$.

Bình luận: Nếu cho phương trình đường thẳng CN và tọa độ điểm M ta sẽ lập được phương trình AM. Ràng buộc điểm A thuộc một đường cho trước ta sẽ tìm được A. Biểu diễn tọa độ điểm N theo phương trình CN, tìm tọa độ điểm H theo tọa độ N nhờ công thức tọa độ trung điểm. Từ $MH \perp AH$ ta có tọa độ điểm H. Từ đó tìm được tọa độ B, C.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao là AH. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH và AH. Biết M(0; -2) và điểm A thuộc đường thẳng có phương trình $x + y = 0$, đường thẳng đi qua hai điểm N, C có phương trình: $3 - 2x = 0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải: (Sử dụng hình 2 để giải bài toán).

Theo tính chất 2, ta có: $CN \perp AM$.

Từ giả thiết điểm M(0; -2) và đường thẳng đi qua hai điểm N, C có phương trình:

$3 - 2x = 0$, ta lập được phương trình của AM là: $y + 2 = 0$. Tọa độ điểm A là A(2; -2). Vì N thuộc đường thẳng có phương trình: $3 - 2x = 0$, nên có số thực a để $N(\frac{3}{2}; a)$. N là trung điểm của AH nên H(1; 2a + 2). Ta có MH và AH vuông góc với

nhau nên: $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$ hoặc $a = -\frac{5}{2}$.

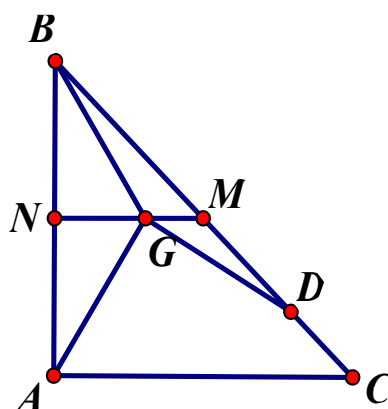
* Với $a = -\frac{3}{2}$, ta có $H(1; -1)$, BC có phương trình: $x - y - 2 = 0$. Từ đó tìm được tọa độ điểm $C(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$, $B(-1; -3)$.

* Với $a = -\frac{5}{2}$, ta có $H(1; -3)$, $B(-1; -1)$. Đường thẳng AC có phương trình: $3x - y - 8 = 0$, từ đây tìm được $C(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2})$.

Vậy $A(2; -2)$, $C(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$, $B(-1; -3)$ hoặc $A(2; -2)$, $B(-1; -1)$, $C(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2})$.

Tính chất 3: Tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AB. G là một điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng MN. D thuộc đoạn BC sao cho $GA = DG$ (D không trùng với các đầu mút). Khi đó, ta có: tam giác AGD vuông cân tại G.

Chứng minh:



(Hình 3a)

Ta có MN là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên $GB = GA$. Kết hợp với giả thiết ta có $GA = GB = GD$. Điều này chứng tỏ, có đường tròn tâm G bán kính GA đi qua 3 điểm A, B, D.

Lại có: $\angle ABD = 45^\circ$ nên $\angle AGD = 90^\circ$ hay tam giác AGD vuông cân tại G.

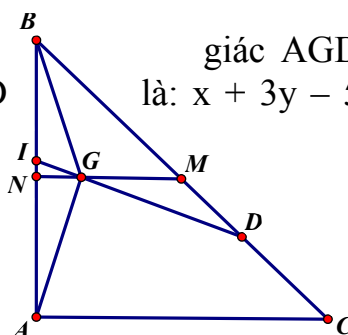
Bình luận: Lấy điểm G là trọng tâm tam giác ABM (G thuộc MN), cho phương trình của AG và tọa độ điểm D ta sẽ lập được phương trình GD và tìm được tọa độ điểm G, A. Gọi I là giao điểm của GD với AB, chứng minh được $GD = 3GI$, ta tìm được tọa độ điểm I. Từ đó viết được phương trình đường thẳng AB.

Ví dụ: Tam giác ABC vuông cân tại A. M là trung điểm BC, G là trọng tâm của tam giác ABM, $D(-8; 1)$ là điểm thuộc cạnh MC sao cho $GA = GD$. Đường thẳng AG có phương trình: $3x - y - 15 = 0$ và hoành độ của điểm A nhỏ hơn 5. Xác định tọa độ điểm A và lập phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải:

Theo tính chất 3, ta có tam

giác AGD vuông cân tại G. Từ đó lập được phương trình của GD là: $x + 3y - 5 = 0$. Ta tìm được tọa độ điểm



(Hình 3b)

Giả sử điểm $A(a; 3a-15)$, Từ $GA = GB$, ta có: $A(4; -3)$. Gọi N là giao điểm của MG với AB .

Đặt $\angle NBG = \alpha$. Ta có:

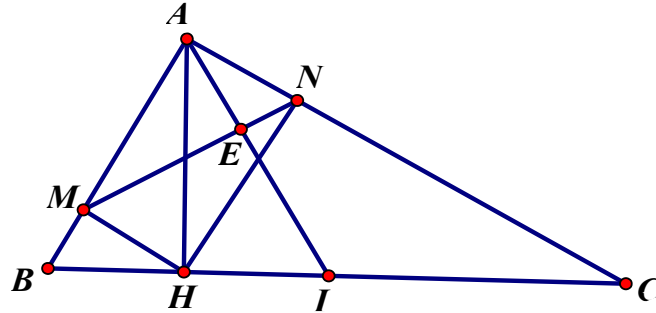
$$\angle NAG = \angle NGI = \alpha; \tan \alpha = \frac{NG}{BN} = \frac{NI}{NG} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{3NI}{AN} \Leftrightarrow AN = 9NI \Rightarrow GI = \frac{\sqrt{10}}{9} AN$$

. Lại có: $GA = \sqrt{AN^2 + \frac{AN^2}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} AN = GD$. Từ đó ta có $GD = 3GI$, ta tìm được

$I(4; \frac{1}{3})$. Dễ dàng có được phương trình của AB là: $x - 4 = 0$.

Tính chất 4: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu của điểm A lên BC ; M, N lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, AC . Khi đó: $MN \perp IA$ (I là trung điểm của BC).

Chứng minh:



(Hình 4a)

Từ giả thiết ta có: Tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật. Từ đó ta có:

$$\angle AMN = \angle AHN \quad (1)$$

Lại có các $\angle AHN, \angle ACH$ cùng phụ với $\angle HAN$ nên: $\angle AHN = \angle ACH$ (2).

Vì tam giác ABC vuông tại A và I là trung điểm của BC nên $IA = IC$ hay tam giác IAC cân tại I , bởi vậy $\angle ICA = \angle CAI$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có: $\angle AMN = \angle CAI$.

Lại vì $\angle AMN + \angle ANM = 90^\circ$ nên $\angle CAI + \angle ANM = 90^\circ$.

Từ đây ta có: $\angle ANE = 90^\circ$.

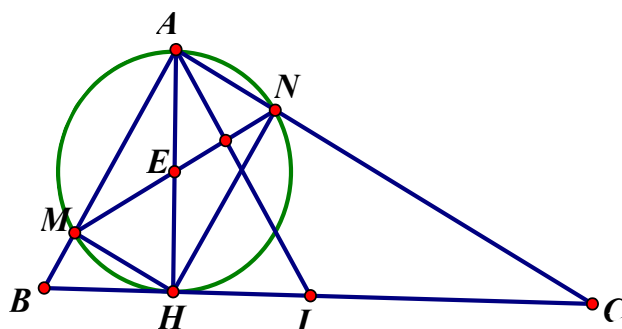
Bình luận: Nếu cho phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và phương trình của MN ta sẽ tìm được tọa độ điểm A . Dựa vào phương trình của NM ta sẽ

biểu diễn tọa độ điểm H theo một ẩn t . Sử dụng điều kiện AH vuông góc với IH ta tìm được tọa độ điểm H . Từ đây viết được phương trình của BC .

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A và nội tiếp đường tròn (T) có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của A lên BC . Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Tìm tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC , biết đường thẳng MN có phương trình $20x - 10y - 9 = 0$ và điểm H có tung độ lớn hơn hoành độ.

Hướng dẫn giải:

Từ giả thiết ta có $HM \perp AB, HN \perp AC$. Theo tính chất 4, ta có: $MN \perp AI$ (I là trung điểm của BC). Ta lập được phương trình của AI là: $x + 2y - 5 = 0$.



(Hình 4b)

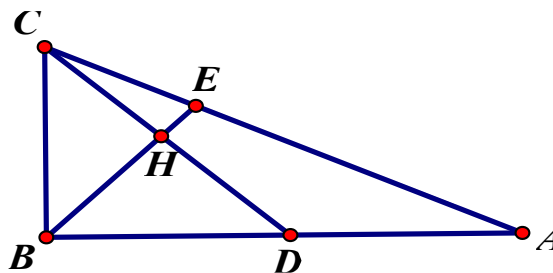
Vì A thuộc AI nên có số thực a sao cho $A(5-2a; a)$. Kết hợp với A thuộc (T) ta có: $(5-2a)^2 + a^2 - 6(5-2a) - 2a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = 2$. Khi đó ta có: $A(1; 2)$ hoặc $A(5; 0)$. Điểm $A(5; 0)$ không thỏa mãn vì A, I cùng phía với MN .

Gọi E là tâm đường tròn đường kính AH . Vì E thuộc đường thẳng MN nên có số thực t sao cho: $E(t; 2t - \frac{9}{10})$. Do E là trung điểm của AH nên: $H(2t-1; 4t - \frac{38}{10})$.

Từ AH vuông góc với IH ta có: $t = \frac{8}{5}$ hoặc $t = \frac{28}{5}$. Từ đó có $H(\frac{11}{5}; \frac{13}{5})$ thỏa mãn điều kiện. Khi đó, phương trình BC là: $2x + y - 7 = 0$.

Tính chất 5: Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = mBC$ ($m > 0$). Gọi E là điểm trên đoạn thẳng AC sao cho $AE = mEC$; D là điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $BD = BC$. Khi đó: $CD \perp BE$.

Chứng minh:



(Hình 5a)

Từ giả thiết ta có: $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$.

Lại có điểm E thuộc đoạn thẳng AC nên E chính là chân đường phân giác trong của $\angle ABC$. Từ đây ta có: $\angle ABE = 45^\circ$ (1).

Theo giả thiết ta có tam giác BCD vuông cân tại B nên: $\angle BDC = 45^\circ$ (2).

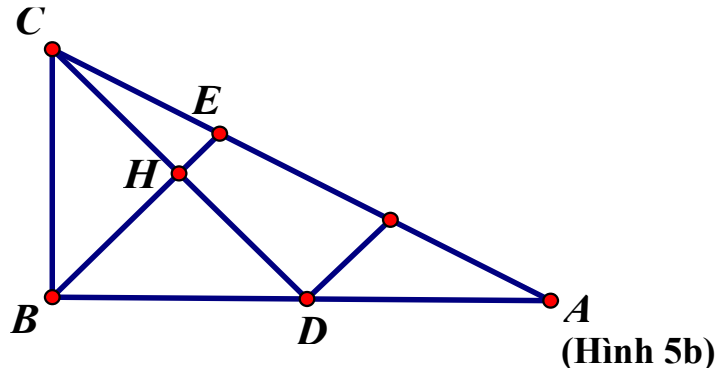
Từ (1), (2) ta có $\angle BDC + \angle ABE = 90^\circ$. Suy ra: $CD \perp BE$.

Bình luận: Lấy $m = 2$, cho phương trình của CD và tọa độ điểm E ta lập được phương trình BE và tìm được tọa độ điểm H là giao điểm của CD và BE. Sử dụng tính chất đường trung bình để chứng minh được $\overline{EB} = 4\overline{EH}$, từ đây tìm được tọa độ điểm B, C, A.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại B, $AB = 2BC$. Gọi D là trung điểm của AB và E là điểm thỏa mãn: $\overline{EA} = -2\overline{EC}$. Đường thẳng CD có phương trình $x - 3y + 3 = 0$ và điểm $E(\frac{19}{3}; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải:

Theo tính chất 5, ta có $BE \perp CD$. Từ đường thẳng CD có phương trình $x - 3y + 3 = 0$ và điểm $E(\frac{19}{3}; 2)$, ta lập được phương trình của đường thẳng BE: $3x + y - 21 = 0$.



Gọi H là giao điểm của CD và BE, tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ 3x + y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow H(6; 3).$$

Gọi (T) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Phương trình của (T) là $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = HB^2$.

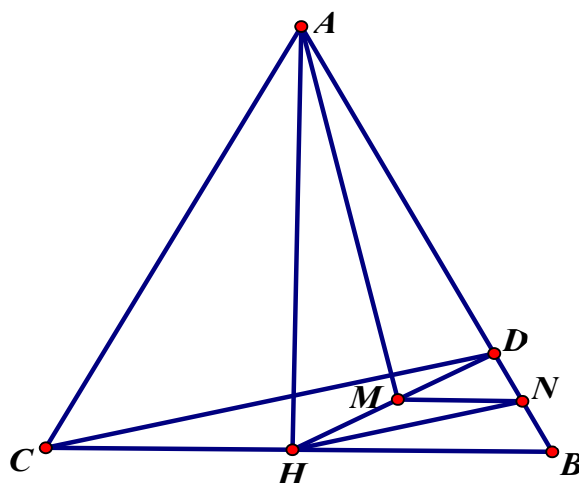
Gọi M là trung điểm của AE. Sử dụng tính chất đường trung bình cho các tam giác CDM, ABE ta có được: $\overline{EB} = 4\overline{EH}$. Từ đây tìm được tọa độ điểm B(5; 6). Phương trình của đường tròn (T) là: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

Từ đó tìm được tọa độ: C(4; 9), D(2; 3), A(-1; 0) hoặc D(4; 9), C(2; 3), A(3; 12).

Vậy: A(-1; 0), B(5; 6), C(4; 9) hoặc A(3; 12), B(5; 6), C(2; 3).

Tính chất 6: Tam giác ABC cân tại A. Gọi H là hình chiếu của A lên BC, D là hình chiếu của H lên AB, M là trung điểm của DH. Khi đó: $AM \perp CD$.

Chứng minh:



(Hình 6)

Lấy N là trung điểm của DB. Khi đó $MN \parallel CB$ nên MN vuông góc với AH. Lại có HD vuông góc với AN nên M là trực tâm của tam giác AHN. Ta suy ra AM vuông góc với HN. Dễ thấy $HC \parallel CD$ nên AM vuông góc với CD.

Bình luận: Nếu cho phương trình đường trung tuyến AM và tọa độ một điểm thuộc CD ta sẽ lập được phương trình CD. Gọi tọa độ điểm M theo đường thẳng AM, biểu diễn tọa độ D theo tọa độ của M và H và cho D thuộc CD ta tìm được tọa độ D. Từ đó tìm được tọa độ các đỉnh của tam giác ABC. Sau đây là một ví dụ về bài toán tọa độ được tạo nên từ ý tưởng trên.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $AB = AC$, điểm $H(2; 0)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC. Gọi D là hình chiếu của điểm H lên AB. Biết đường trung tuyến AM của tam giác AHD có phương trình là: $x + y - 1 = 0$. Đường thẳng CD đi qua $E(1; 1)$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải: (Sử dụng hình 6 để giải bài tập này).

Theo tính chất 6 ta có: $AM \perp CD$.

Từ phương trình của đường thẳng AM và điểm E thuộc CD ta có phương trình của CD: $x - y = 0$. Vì M thuộc AM nên có số thực m sao cho $M(m; 1-m)$.

Do M là trung điểm của DH nên $D(2m-2; 2-2m)$. Vì D thuộc CD nên $m = 1$.

Vậy $M(1; 0)$, $D(0; 0)$.

AB vuông góc với DH nên lập được phương trình AB là: $x = 0$.

Từ đây có tọa độ điểm $A(0; 1)$.

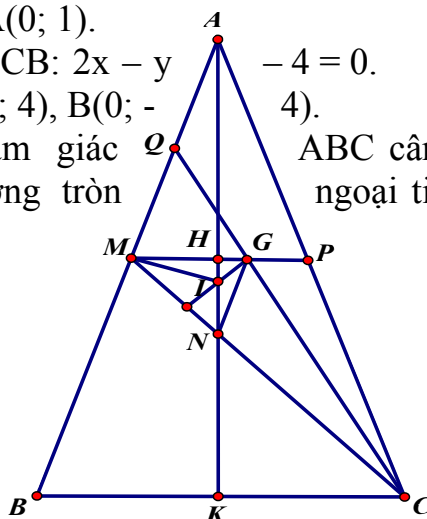
Lập được phương trình CB: $2x - y - 4 = 0$.

Giải hệ ta tìm được: $C(4; 4)$, $B(0; -4)$.

Tính chất 7: Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác AMC.

Khi đó: $GI \perp CM$.

ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm ngoại tiếp tam giác ABC, G là trọng



Chứng minh:

(Hình 7)

Gọi P là trung điểm của AC, K là trung điểm của BC, P là trung điểm của AC, H là giao điểm của AK với MP, N là giao điểm của CM với AK.

Xét tam giác MGN: Có NH là một đường cao. Gọi Q là giao điểm của CG với AB.

Dễ thấy N là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có: $\frac{CN}{CM} = \frac{CG}{CQ} = \frac{2}{3}$

(Tính chất trọng tâm tam giác). Theo định lý Ta-Lét đảo trong tam giác CMA ta có $NG \parallel AM$. Lại có $MI \perp AB$ nên $MI \perp NG$.

Vậy I là trực tâm của tam giác MGN, do đó $GI \perp CM$.

Bình luận: Nếu cho tọa độ điểm G và phương trình của CM ta lập được phương trình GI; Ràng buộc điểm I thuộc một đường thẳng cho trước ta tìm được tọa độ điểm I và phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó tìm được tọa độ các đỉnh của tam giác ABC. Bài toán sau đây được thiết lập từ ý tưởng trên.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{5}{2}$. M là trung điểm của AB và CM có phương trình $2x + 3y - 4 = 0$; tâm I thuộc đường thẳng $x + 2y - 3 = 0$; Trọng tâm của tam giác ACM là $G(\frac{1}{3}; 2)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết C có hoành độ dương và A có tung độ nguyên.

Hướng dẫn giải: (Sử dụng hình 7 để giải bài toán).

Theo tính chất 7, ta có $GI \perp CM$.

Từ CM có phương trình $2x + 3y - 4 = 0$ và $G(\frac{1}{3}; 2)$, ta có phương trình của IG là:

$3x - 2y + 3 = 0$. Từ đó, tìm được tọa độ điểm I là: $I(0; \frac{3}{2})$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$.

Giải hệ tìm được tọa độ điểm C(2; 0).

Giả sử A(a; b) (b là số nguyên).

Sử dụng điều kiện A thuộc đường tròn $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$ và $G(\frac{1}{3}; 2)$ là trọng tâm tam giác ACM ta tìm được: A(0; 4), M(-1; 2). Từ đó có được B(-2; 0).

Tính chất 8: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I. M là một điểm bất kì trên cung BC không chứa điểm A của đường tròn. Khi đó: $MB + MC = MA$.

Chứng minh:

Lấy điểm D trên đoạn thẳng AM sao cho $MD = MB$.

Ta có: $\angle AMB = \angle ACB = 60^\circ$ nên tam giác BMD là tam giác đều.

Ta có: $BD = BM$.

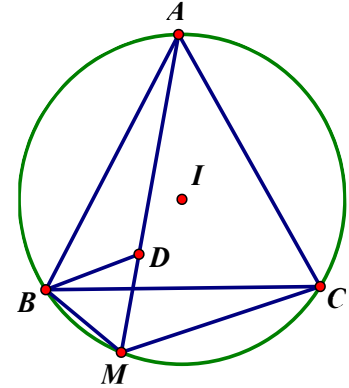
Xét hai tam giác: $\triangle ABD$ và $\triangle CBM$.

Ta có: $AB = BC, BD = BM, \angle ABD = \angle CBM$

(Vì $\angle ABD + \angle DBC = \angle CBM + \angle CBD = 60^\circ$).

Từ đó ta có: $\triangle ABD = \triangle CBM$, ta suy ra: $MC = AD$.

Vậy: $MB + MC = MD + DA = MA$.



(Hình 8a)

Bình luận: Nếu cho phương trình của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có được: Tọa độ I, Bán kính R và BC. Cho chu vi tam giác MBC bằng $BC + 2R$ ta có $MA = 2R$ nên MA là đường kính. Bài toán sau đây được sáng tạo từ ý tưởng này.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác đều ABC và nội tiếp đường tròn tâm (T): $x^2 + y^2 = 25$. Cho M(0;-5) và tam giác MBC có chu vi bằng $10 + 5\sqrt{3}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác biết B có hoành độ âm.

Hướng dẫn giải: Dễ kiểm tra được M thuộc đường tròn (T) và M thuộc cung BC không chứa điểm A. Vì đường tròn (T) có tâm là O(0; 0), R = 5 nên tìm được: $BC = 5\sqrt{3}$.

Từ giả thiết, ta có: $MB + MC = 10$

Theo tính chất 8, ta có $MA = MB + MC = 10$.

Suy ra MA là đường kính nên A đối xứng với M qua O, ta có được: A(0; 5).

Vì BC vuông góc với AM và khoảng cách

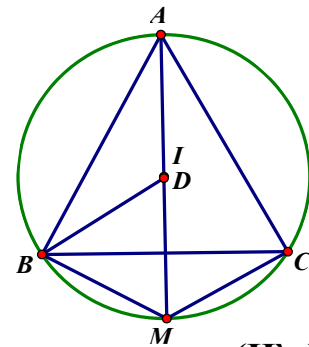
từ A đến BC bằng $\frac{15}{2}$ nên lập được phương

trình của BC là: $y - \frac{5}{2} = 0$.

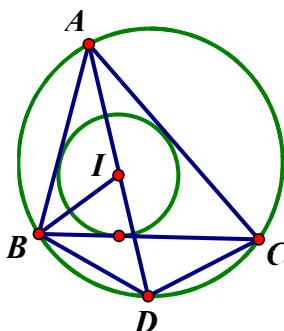
Ta tìm được $B(-\frac{5\sqrt{3}}{2}; -\frac{5}{2})$, $C(\frac{5\sqrt{3}}{2}; -\frac{5}{2})$.

Tính chất 9: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm K và ngoại tiếp đường tròn tâm I. Đường thẳng AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại điểm D khác A. Khi đó: $DB = DC = DI$.

Chứng minh: Vì AD là đường phân giác của $\angle BAC$ nên D chính là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ (không chứa điểm A). Từ đó ta có: $BD = DC$.



(Hình 8b)



(Hình 9a)

Ta có: $\angle BID = \angle IBA + \angle IAB$ (góc ngoài tam giác IBA). Mặt khác: $\angle BDI = \angle DBC + \angle CBI = \angle DAC + \angle CBI = \angle IBA + \angle IAB = \angle BID$.

Từ đó, ta có tam giác DBI cân tại I hay $BD = DI$.

Vậy: $DB = DC = DI$.

Bình luận: Nếu cho tọa độ tâm đường tròn nội tiếp và tọa độ điểm D, đồng thời cho B thuộc một đường thẳng cho trước ta sẽ tìm được tọa độ điểm B. Cho phương trình đường cao AH ta sẽ lập được phương trình BC, từ $DC = DB$ ta tìm được C. Từ đây tìm được tọa độ điểm A.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $K(1; 0)$. Đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC có phương trình: $2x + y - 7 = 0$ và $D(1; -5)$ là giao điểm của AK với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết B có hoành độ nhỏ hơn -1 và B thuộc đường thẳng $x + y + 9 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Theo tính chất 9, ta có $DB = DK$. Vì B thuộc đường thẳng $x + y + 9 = 0$ nên có số thực b sao cho $B(b; -b - 9)$.

Vì $BK = DK = 5$ nên:

$$(b - 1)^2 + (b + 4)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Theo giả thiết có $B(-4; -5)$ thỏa mãn yêu cầu.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh B. Vì BC vuông góc với AH nên ta lập được phương trình của BC là: $x - 2y - 6 = 0$.

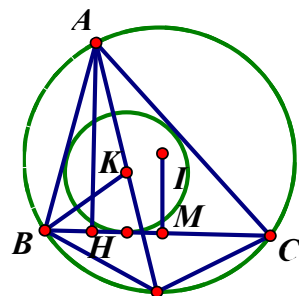
Vì C thuộc đường thẳng BC nên có số thực c sao cho $C(2c + 6; c)$.

Ta có $DK = DC$ nên ta tìm được $C(4; -1)$ (một điểm C nữa trùng điểm B nên không thỏa mãn).

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $M(0; -3)$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta có BC vuông góc với IM. Phương trình của IM là: $2x + y - 3 = 0$. Vì I thuộc MI nên có số thực c sao cho: $I(b; -2b - 3)$. Từ $IB = ID$ ta tìm được $b = -\frac{3}{2}$, từ

đó ta có $I(-\frac{3}{2}; 0)$.

Giả sử $A(a; -2a + 7)$, từ $IA = IB$ ta có được $a = 4$ hoặc $a = 1$.



(Hình 10b)

- với $a = 4$ ta có $A(4; -1)$ không thỏa mãn vì trùng với điểm C.
- Với $a = 1$, ta có $A(1; 5)$.

Vậy $A(1; 5)$, $B(-4; -5)$, $C(4; -1)$.

Tính chất 10: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I. AD là đường phân giác trong góc A của tam giác và cắt đường tròn (I) tại điểm M. Tiếp tuyến tại A với đường tròn cắt BC tại E. Đường phân giác góc AEC cắt AD tại H. Khi đó: $EH \perp AD$.

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh cho tam giác EAD cân tại E.

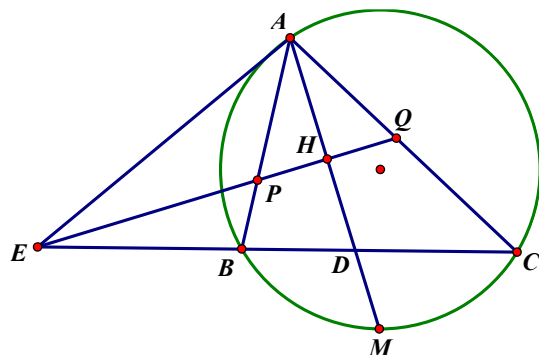
Ta có, điểm M là điểm chính giữa của cung BC (Cung không chứa điểm A).

Ta có: $\angle EAD = \frac{1}{2} sđ\widehat{AM}$ (1) (Cung chứa điểm B).

$$\angle ADE = \frac{1}{2} (sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{CM}) =$$

$$\frac{1}{2} (sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{BM}) = \frac{1}{2} sđ\widehat{AM} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có: $\angle ADE = \angle EAD$ hay tam giác EAD cân tại E. EH là đường phân giác của tam giác EAD trở thành đường cao, chứng tỏ: $EH \perp AD$



(Hình 10)

Bình luận: Nếu ta cho tọa độ điểm D, phương trình các đường thẳng EA, AB ta sẽ tìm được tọa độ điểm A, tọa độ điểm H. Lập phương trình EH, từ đó xác định được tọa độ điểm E và dễ dàng lập được phương trình BC.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T). Đường phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại $D(-1; 1)$. Đường thẳng AB có phương trình $2x + 3y - 9 = 0$, tiếp tuyến tại A với đường tròn (T), cắt BC tại E và có phương trình: $2x + y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của DA, E là giao điểm của tiếp tuyến với BC, theo tính chất 10, ta có $EH \perp AD$.

$$\text{Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(3; 1).$$

Vì H là trung điểm của AD nên $H(1; 1)$.

Do $EH \perp AD$ nên ta có EH có phương trình là $y = 1$.

Từ đây có được tọa độ điểm $E(1; 5)$.

$\overrightarrow{DE} = (2; 4) \Rightarrow \vec{n} = (2; -1)$ là vector pháp tuyến của BC. Do đó đường thẳng BC có phương trình: $2x - y + 3 = 0$.

Tính chất 11: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm K, nội tiếp đường tròn tâm I. Các đường thẳng AK, BK, CK lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại các điểm P, Q, R. Khi đó: điểm K là trực tâm của tam giác PQR.

Chứng minh:

Ta chỉ cần chứng minh cho $AP \perp RQ$. Kết quả $RC \perp PQ$, $QB \perp RP$ được chứng minh tương tự.

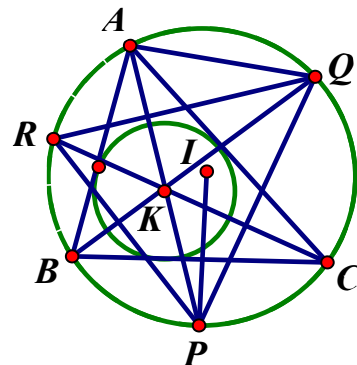
Từ giả thiết dễ dàng có được: P, Q, R lần lượt là các điểm chính giữa của các cung $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$.

$$\text{Ta có: } \angle RQA = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{RA} = \frac{1}{4} \text{sđ} \widehat{AB}$$

(cung AB không chứa điểm P).

$$\angle QAP = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{PQ} = \frac{1}{4} \text{sđ} \widehat{AB} \quad (\text{cung AB chứa điểm P}).$$

$$\text{Từ đó: } \angle RQA + \angle QAP = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ. \quad \text{Suy ra: } AP \perp RQ. \quad (\text{Hình 11})$$



Vậy I là trực tâm của tam giác PQR.

Bình luận: Nếu cho tọa độ các điểm P, Q, R ta sẽ tìm được tọa độ trực tâm K của tam giác PQR. Sử dụng tính chất A, K đối xứng nhau qua RQ ta tìm được tọa độ điểm A. Tọa độ các điểm B, C được tìm tương tự.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm K. Các đường thẳng AK, BK, CK lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại các điểm $P(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2})$, $Q(4; 3)$, $R(-6; 3)$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Hướng dẫn giải:

Theo tính chất 11, ta có K là trực tâm của tam giác PQR.

Giả sử $I(x; y)$. Ta có:

$$\overrightarrow{KQ} = (4 - x; 3 - y), \overrightarrow{KR} = (-6 - x; 3 - y), \overrightarrow{PR} = (-\frac{15}{2}; \frac{15}{2}), \overrightarrow{PQ} = (\frac{5}{2}; \frac{15}{2}).$$

$$\text{K là trực tâm nên } \begin{cases} \overrightarrow{KQ} \perp \overrightarrow{PR} \\ \overrightarrow{KR} \perp \overrightarrow{PQ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

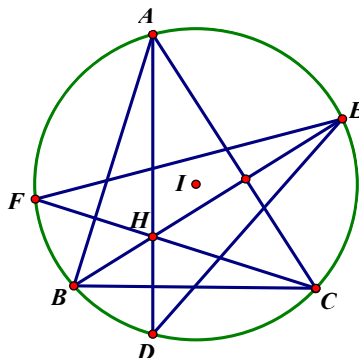
Dễ chứng minh được: K, A đối xứng với nhau qua RQ. Gọi M là hình chiếu của K lên RQ, ta tìm được $M(\frac{3}{2}; 3)$. M là trung điểm của IA nên ta có $A(\frac{3}{2}; \frac{11}{2})$.

Làm tương tự ta cũng có: $B(-\frac{7}{2}; -\frac{9}{2})$, $C(\frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$.

Vậy: $A(\frac{3}{2}; \frac{11}{2})$, $B(-\frac{7}{2}; -\frac{9}{2})$, $C(\frac{9}{2}; -\frac{1}{2})$.

Tính chất 12: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng AH, BH, CH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác lần lượt tại các điểm D, E, F. Khi đó: H chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DFE

Chứng minh:



(Hình 12)

Ta sẽ chứng minh cho BE là đường phân giác của góc DEF.

Thật vậy: $\angle DEB = \angle DAB$ (Góc nội tiếp chắn cùng một cung).

Tương tự: $\angle FEB = \angle FCB$.

Lại có: $\angle DAB = \angle FCB$ (Cùng phụ với góc ABC).

Từ đó, ta có: $\angle FEB = \angle DEB$. Suy ra BE là phân giác của góc DEF.

Tương tự, ta cũng có được các đường thẳng DA, CF cũng là các đường phân giác của tam giác DFE nên H chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DFE.

Bình luận: Nếu đặc biệt hóa tam giác ABC thành tam giác cân tại A thì đường cao qua đỉnh A sẽ trở thành đường kính. Nếu cho biết tọa độ điểm D, F và phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ta sẽ tìm được tọa độ điểm A, thiết lập được phương trình IB, từ đó tìm được tọa độ điểm B, C. Bài toán 12, được xây dựng dựa trên ý tưởng đó.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (T) có phương trình $(x-5)^2 + y^2 = 50$. Tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn (T), Đường kính của (T) đi qua A cắt (T) tại điểm D(0; 5) (D khác A). Đường cao kẻ từ đỉnh C của tam giác cắt (T) tại $F(-\frac{6}{5}; -\frac{17}{5})$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết B có hoành độ âm.

Hướng dẫn giải: Ta có (T) có tâm I(5; 0), bán kính $R = 5\sqrt{2}$. Do I là trung điểm của AD nên ta có A(10; -5). Theo tính chất 12, ta có B là điểm chính giữa của cung DF nên IB vuông góc với DF.

Từ đây ta lập được phương trình đường thẳng BI là: $x + 7y - 5 = 0$.

Ta tìm được tọa độ điểm B(-2; 1).

Đường thẳng BC có phương trình: $x - y + 3 = 0$. AI vuông góc với BC nên phương trình của AI là: $x + y - 5 = 0$. Từ đây ta có H(1; 4) là giao điểm của AI và BC. Vì H là trung điểm của BC nên C(4; 7).

Vậy: A(10; -5), B(-2; 1), C(4; 7).

Tính chất 13: Cho tam giác ABC. N nằm trên đường phân giác trong của góc B và N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AC. Khi đó, N nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh:

Giả sử N_0 là điểm nằm ở chính giữa cung AC (Cung không chứa điểm B) của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó N_0 thuộc đường phân giác trong của góc B của tam giác.

Vì $\angle N_0A = \angle N_0C$ nên $N_0A = N_0C$, hay N_0 thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC.

Từ đó, ta có N_0 trùng với N.

Bình luận: Nếu cho biết tâm I và tọa độ điểm N ta sẽ thiết lập được phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cho thêm các dữ kiện để lập được phương trình BC, từ đó tìm được tọa độ các điểm B, C. Lập phương trình AC đi qua C và vuông góc với IA ta sẽ tìm được tọa độ điểm A.

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Điểm I(-1; 0) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. M(3; 3) là điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC, N(2; 4) là điểm nằm trên đường phân giác trong của góc B và thỏa mãn $AN = CN$. Đường thẳng BC đi qua điểm D(1; 4) và điểm B có tung độ lớn hơn tung độ điểm C. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác.

Hướng dẫn giải:

Theo tính chất 13, ta có N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACB, hơn nữa N là điểm chính giữa của cung AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tâm I bán kính $IN = 5$ có phương trình:

$$(x+1)^2 + y^2 = 25.$$

BC vuông góc với IM nên BC có phương trình:

$$4x + 3y - 16 = 0.$$

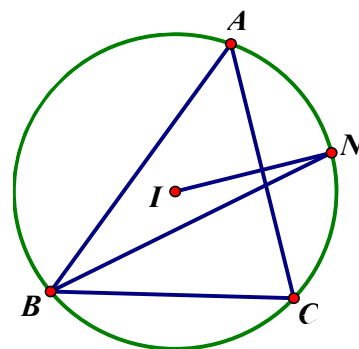
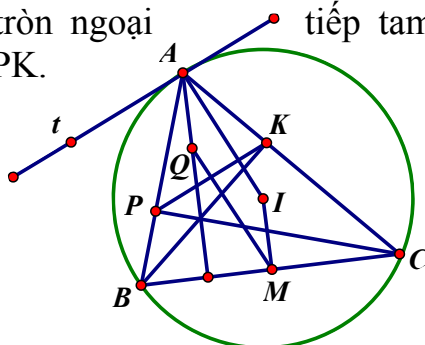
Từ đó ta tìm được tọa độ các điểm B, C là:

$B(\frac{2}{5}; \frac{24}{5}), C(4; 0)$. Do AC vuông góc với IN nên ta lập được phương trình của AC

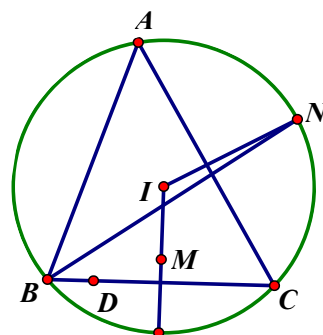
là: $3x + 4y - 12 = 0$. Từ phương trình của AC và phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta tìm được tọa độ điểm A là: $A(-\frac{12}{5}; -\frac{24}{5})$

Tính chất 14: Cho tam giác ABC với các đường cao BK và CP. Giả sử d là tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó: AI và MQ cùng vuông góc với PK.

Chứng minh:



(Hình 13a)



(Hình 13b)

(Hình 14a)

a/ Ta chỉ chứng minh cho trường hợp tam giác ABC là tam giác nhọn (Hình 15a). các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Dựng tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $\angle tAB = \angle ACB$ (1) (Góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và một dây).

Lại có: Tứ giác BPKC là tứ giác nội tiếp nên $\angle ABC + \angle BPK = 180^\circ$ và $\angle BPK + \angle KPA = 180^\circ$ nên $\angle BCK = \angle KPA$ (2).

Từ (1), (2) ta có: $\angle tAB = \angle KPA$ nên tiếp tuyến tại A song song với PK.

Mặt khác $IA \perp At$ nên $IA \perp PK$.

b/ Đường tròn đường kính BC và đường tròn đường kính AH có 2 giao điểm phân biệt là P, K. Do đó, đường thẳng đi qua 2 tâm đường tròn QM vuông góc với PK.

Bình luận: Với hình chữ nhật ABCD, E đối xứng với B qua C, BH vuông góc với DE, ta có DC và BH là các đường cao của tam giác DEB. Nếu cho phương trình của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEB và phương trình CH ta sẽ tìm được tọa độ điểm E. Cho thêm tọa độ một điểm thuộc BC ta sẽ thiết lập được phương trình của BC từ đó tìm được tọa độ các điểm C, B, D, A.

Ví dụ: a/ Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với B qua C. Gọi H là hình chiếu của B lên DE. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE và đường thẳng CH lần lượt có phương trình: $x^2 + (y - 4)^2 = 25$, $3y + 4x = 0$, đường thẳng BC đi qua điểm M(5; 0), điểm E có hoành độ âm, điểm D có tung độ dương. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

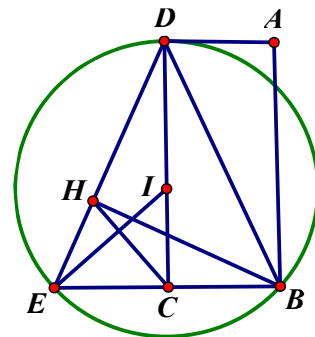
Hướng dẫn giải: Ta có, đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE có phương trình: $x^2 + (y - 4)^2 = 25$ (Có tâm I(0; 4), R = 5).

Vì C, H lần lượt là chân các đường cao kẻ từ D, B của tam giác BDE nên theo tính chất 14, ta có: $CH \perp IE$. Từ kết quả này, ta lập được phương trình của IE là: $4x - 3y + 12 = 0$.

E là giao điểm của IE và đường tròn ngoại tiếp tam giác DEB ta tìm được tọa độ E(-3; 0).

Vì BC đi qua E và M nên BC có phương trình: $y = 0$.

Từ đó tìm được tọa độ điểm B(3; 0). Vì C là trung điểm của BE nên C(0; 0). Đường thẳng CI có phương trình: $x = 0$. Từ đó ta tìm được D(0; 9) và A(3; 9).



(Hình 14c)

Vậy: $A(3; 9)$, $B(3; 0)$, $C(0; 0)$, $D(0; 9)$.

b/ Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(0; -3)$. Trung điểm của BC là $M(1; -6)$. Gọi D, E lần lượt là chân các đường cao kẻ từ B, C của tam giác. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết điểm D có hoành độ dương, phương trình DE là $y + 2 = 0$, phương trình AH là: $2x + y - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải:

Gọi Q là trung điểm của AH, theo tính chất 14, ta có QM vuông góc với ED. Từ đây ta có phương trình của QM là $x = 1$. ta tìm được tọa độ điểm $Q(1; -1)$. Lại vì Q là trung điểm của AH nên $A(2; 1)$.

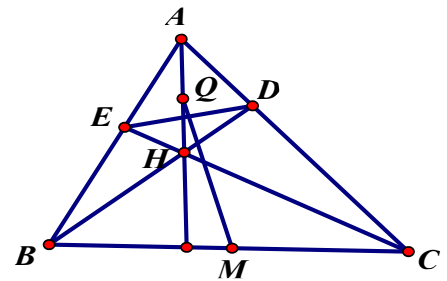
Ta có $QA = QD$ nên tìm được $D(3; -2)$.

Phương trình đường thẳng AC là: $3x + y - 7 = 0$.

Phương trình đường thẳng BC là: $x + 2y + 11 = 0$.

Từ đây ta có: $C(5; -8)$, $B(-3; -4)$.

Vậy: $A(2; 1)$, $B(-3; -4)$, $C(5; -8)$.

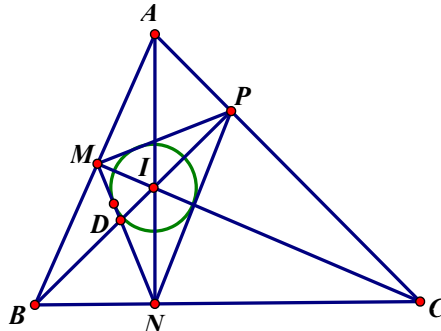


(Hình 14d)

Tính chất 15: Tam giác nhọn ABC với các đường cao AN, BP, CM, trực tâm là I. Khi đó, ta có điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

Chứng minh:

Ta có tứ giác BMIN và APIM là các tứ giác nội tiếp nên ta có: $\angle NMC = \angle PBC$, $\angle CMP = \angle NAC$ (1). Lại có: $\angle PBC = \angle NAC$ (2) (vì cùng phụ với góc ACB).



(Hình 15)

Từ (1), (2) ta có: $\angle NMC = \angle CMP$, tức là CM là đường phân giác của góc NMP.

Chứng minh tương tự ta cũng có được: AN, BP là các đường phân giác trong của tam giác MNP.

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

Bình luận: Nếu cho tọa độ các điểm M, N, P thì ta tìm được tọa độ điểm I nhờ tính chất đường phân giác trong của tam giác MNP. Khi đó ta dễ dàng lập được phương trình đường thẳng AC

Ví dụ: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác nhọn ABC. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của C, A, B lên AB, BC, CA. Biết $M(1; -1)$, $N(0; 2)$, $P(\frac{13}{5}; \frac{19}{5})$. Hãy lập phương trình đường thẳng AC.

Hướng dẫn giải:

Theo tính chất 15, ta có 3 đường thẳng AM, BN, CP đồng quy tại điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

$$\text{Ta có: } MP = \frac{\sqrt{640}}{5}; NP = \frac{\sqrt{250}}{5} \Rightarrow \frac{MP}{NP} = \frac{8}{5}.$$

Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác MNP ta có:

$$\frac{MP}{NP} = \frac{MD}{ND} = \frac{5}{8} \Rightarrow 8MD = 5ND \Leftrightarrow 8\overrightarrow{MD} + 5\overrightarrow{ND} = \vec{0} \text{ (Vì D nằm trong đoạn thẳng MN).}$$

$$\text{Từ kết quả này, ta tìm được tọa độ điểm } D\left(\frac{5}{13}; \frac{11}{13}\right) \Rightarrow \overrightarrow{PD} = \left(-\frac{144}{65}; -\frac{192}{65}\right).$$

$\vec{n} = (3; 4)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC, phương trình đường thẳng AC đi qua điểm P là: $3x + 4y - 23 = 0$.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

2.4.1. Đối với học sinh:

- Được ôn tập, củng cố các tính chất của hình học phẳng, đặc biệt là các tính chất trong tam giác.

- Rèn luyện kỹ năng giải bài toán hình học tọa độ và rèn luyện tư duy trừu tượng.

- Có cách nhìn sâu sắc về bài toán tọa độ; hiểu được các bài toán hình học tọa độ không phải tự nhiên mà có được mà phải qua quá trình miệt mài, sáng tạo của con người để có được các bài toán hay và khó. Từ đó các em có được đam mê, động lực để học toán và ngày càng yêu toán hơn.

- Đề tài được tác giả áp dụng giảng dạy tại các lớp 12C1(2007-2010), 12C2(2010-2013), 12C1(2013-2016), hiệu quả của việc dạy học đã được khẳng định qua các kỳ thi HSG, kỳ thi ĐH-CĐ (nay gọi là kỳ thi THPT QG). Kết quả tôi có 16 giải cấp tỉnh môn Toán và MTCT, trong đó có 03 giải Nhì, 06 giải Ba và 06 giải Khuyến khích. Nhiều HS thi ĐH-CĐ với số điểm đạt từ khá trở lên.

2.4.2. Đối với bản thân và đồng nghiệp

- Đề tài này là một tài liệu dùng cho hoạt động giảng dạy của bản thân và đồng nghiệp.

- Đề tài cũng đã tổng kết nhiều tính chất đặc trưng của hình học thuần túy, làm cơ sở cho bản thân và đồng nghiệp sáng tạo nên những bài toán ktọa độ làm phong phú hơn nguồn tư liệu cho hoạt động giảng dạy. Bên cạnh đó, đề tài cũng đã gợi ý cho bản thân và đồng nghiệp tiếp tục mở rộng nghiên cứu các tính chất của các loại hình khác như hình thang, hình bình hành, thoi, chữ nhật, vuông để sáng tạo nên các bài toán hình học tọa độ mới một cách đa dạng.

2.4.3. Đối với nhà trường

- Đề tài đã và đang được áp dụng trong hoạt động giảng dạy góp phần nâng cao chất lượng giáo dục; cải thiện thành tích thi HSG, thi THPT Quốc gia của học sinh nhà trường theo chiều hướng tích cực.

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận.

Quá trình nghiên cứu đề tài đã thu được một số kết quả sau:

- Phát biểu và chứng minh một số tính chất hình học trong tam giác;
- Xây dựng được một hệ thống các bài tập hình học tọa độ trên cơ sở các tính chất hình học đã đưa ra; đề xuất phương pháp giải các bài tập này một cách phù hợp.
- Rèn luyện các kỹ năng về xây dựng các bài toán hình học tọa độ từ các tính chất hình học thuần túy.
- Người học thấy được cội nguồn của các bài toán hình học tọa độ hay và khó, tạo cho người học hứng thú và đam mê với toán học.

3.2. Kiến nghị

- Trên cơ sở các tính chất đã nêu, phát động giáo viên bộ môn toán trong nhà trường hãy tiếp tục sáng tạo các bài toán hình học tọa độ để làm phong phú hơn nguồn tư liệu cho hoạt động chuyên môn.
- Tìm tòi các tính chất hình học ở các dạng hình khác như hình thang, hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông và từ đó sáng tạo các bài tập hình học tọa độ để phục vụ cho công tác giảng dạy.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	<i>Thanh Hóa, ngày 10 tháng 5 năm 2016</i> Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác. Tác giả Trịnh Minh Lâm
--------------------------------	--