PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA VIỄN

ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học. 2023 - 2024
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1: ***(4,0 điểm).***

1. Cho biểu thức $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ và $x>0, x\neq 1$.

   a) Rút gọn biểu thức P.

   b) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

2.Tính: $S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2024\sqrt{2023}+2023\sqrt{2024}}$

Câu 2: ***(4,0 điểm).***

1. Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$ và: $a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$

Chứng minh rằng: $\frac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

2. Cho d: $y=(m^2+1)x+4$. Tìm m sao cho d cắt Ox tại A cắt Oy tại B mà

a) S_{OAB} đạt giá trị lớn nhất

b) Khoảng cách từ O đến d đạt giá trị lớn nhất

Câu 3: ***(4,0 điểm).***

1. Giải phương trình $x^2-x-4=2(x-1)\sqrt{x-1}$

2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+2x^2+3x+2=y^3$.

Câu 4: ***(6 điểm).*** Cho (O;R) và đường thẳng a không có điểm chung với đường tròn. Điểm M bất kì thuộc đường thẳng a. Qua M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là 2 tiếp điểm). Kẻ OH vuông góc với đường thẳng a tại H. kẻ AB cắt OH tại K, cắt OM tại I.

1. Chứng minh rằng: $OI.OM=OK.OH$

2. Chứng minh: khi M chuyển động trên đường thẳng a thì AB luôn đi qua 1 điểm cố định.

3. Tìm vị trí của M để S_{OIK} đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: ***(2,0 điểm).***

1. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$2abc(a+b+c)\leq\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

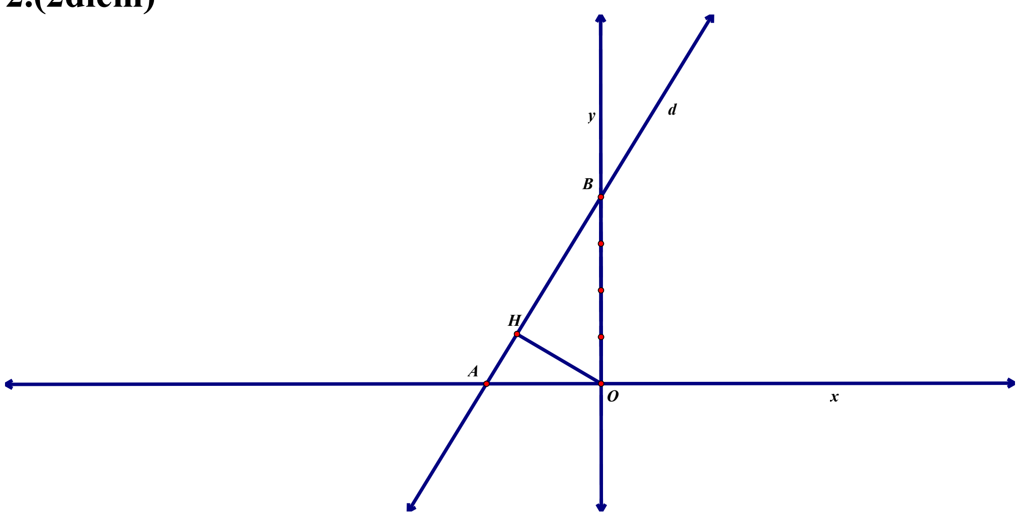
2. Số nguyên a được gọi là “đẹp” nếu với mọi cách sắp xếp theo thứ tự tùy ý của 100 số 1, 2, ..., 100 luôn tồn tồn tại 10 số hạng liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng a. Tìm số “đẹp” lớn nhất.

-----------------Hết---------------

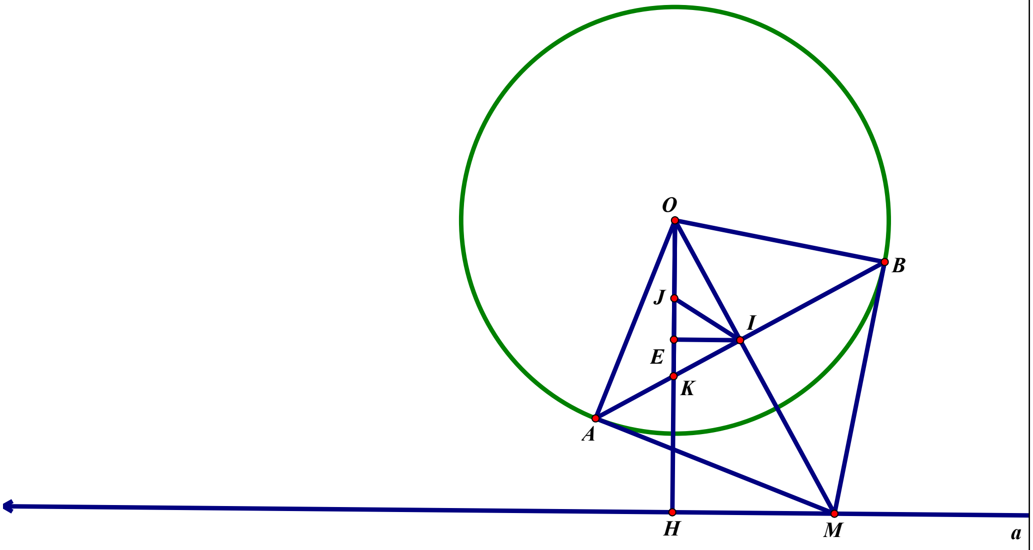
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA VIỄN

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG LỚP 9
Năm học. 2023-2024
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu	Đáp án	Điểm
	1a. (1,0điểm)	
	ĐKXĐ: $x>0, x\neq 1$	
	Ta có: $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}+1)}$ $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ $P=\frac{2x+3+x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ $P=\frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$	0.75
	Vậy $P=\frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$	0,25
Câu 1 (4 điểm)	**1b. (1,0điểm)**	
	Ta có $P=\frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+2+\frac{3}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}+2$	
	Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{x}.\frac{3}{\sqrt{x}}}=2\sqrt{6}\Rightarrow P\geq 2\sqrt{6}+2$	0,5
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x}=\frac{3}{\sqrt{x}}\Rightarrow 2x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2+2\sqrt{6}$ đạt tại $x=\frac{3}{2}$.	0,5
	2.(2,0 điểm)	
	Xét số hạng tổng quát dạng: với n là số nguyên dương ta có: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$	1,0

	$S = (\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + ... + (\frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2024}})$ $S = 1 - \frac{1}{2\sqrt{506}} = \frac{2\sqrt{506} - 1}{2\sqrt{506}}$	1,0
Câu 2 (4 điểm)	**1.(2,0 điểm)**	
	Ta có : $a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \Rightarrow a = (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{c})$ (vì b>0) Chứng minh tương tự : $b = (2\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})$ (vì a>0)	1,0
	Biến đổi vế trái ta có : $\frac{a + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{b + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2} = \frac{(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{c}) + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2}{(2\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c}) + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2}$ $= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 2\sqrt{c})}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})(2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 2\sqrt{c})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$ Vậy đẳng thức được chứng minh	1,0
	2.(2điểm)  	0,25
	Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4$, d cắt Oy tại $B(0;4)$ Cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{m^2 + 1}$, d cắt Ox tại $A(\frac{-4}{m^2 + 1};0)$ Ta có : $OA = \left\lvert \frac{-4}{m^2 + 1} \right\rvert = \frac{4}{m^2 + 1}$ và OB = 4	0,75
	a. $S_{OAB} = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2}.\frac{4}{m^2 + 1}.4 = \frac{8}{m^2 + 1} \le 8$ Dấu "=" xảy ra khi m = 0 Vậy max $S_{OAB} = 8$ khi m = 0	0,5
	b. Xét ΔOAB vuông tại A, đường cao AH ta có:	0,5

	$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{(\frac{4}{m^2+1})^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{m^4+2m^2+2}{16}$ $\Rightarrow OH^2=\frac{16}{m^4+2m^2+2}\le 8$ $\Rightarrow OH\le 2\sqrt{2}$ Dấu "=" xảy ra khi m = 0 Vậy khoảng cách từ O đến d lớn nhất là $OH=2\sqrt{2}$ khi m = 0	
Câu 3(4điểm)	**1. (2,0 điểm)**	
	Điều kiện: $x\ge 1$ (*). $x^2-x-4=2(x-1)\sqrt{x-1}$ Ta có: $\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{x-1}+x-1-2(x-\sqrt{x-1})-3=0$ $\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x-1}\right)^2-2\left(x-\sqrt{x-1}\right)-3=0$	0,75
	Đặt $x-\sqrt{x-1}=y$ phương trình trở thành $y^2-2y-3=0.$ $y^2-2y-3=0\Leftrightarrow (y+1)(y-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\y=3\end{array}\right.$	0,5
	+Với $y=-1$ ta có phương trình: $x-\sqrt{x-1}=-1\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x+1$ $\Leftrightarrow x-1=x^2+2x+1 (vì: x\ge 1)$ $\Leftrightarrow x^2+x+2=0 (ptvn)$ + Với $y=3$ ta có phương trình: $x-\sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x-3\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\x-1=x^2-6x+9\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\x^2-7x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=5$ Vậy phương trình có nghiệm $x=5.$	0,75
	2. (2,0 điểm) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+2x^2+3x+2=y^3$.	
	Ta có: $y^3-x^3=2x^2+3x+2=2(x+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{8}>0;(x+2)^3-y^3=4x^2+9x+6=(2x+\frac{9}{4})^2+$	1,0
	$\rightarrow x^3<y^3<(x+2)^3\rightarrow x<y<x+2\rightarrow y=x+1\rightarrow x^2=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.\rightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\y=0\end{array}\right.$	0,75
	Vậy phương trình có 2 nghiệm: $(1;2);(1;0)$	0,25
Câu 4 *(6,0 điểm)*	Vẽ hình đúng theo yêu cầu chung của đề:	

		0,5
	1. (2,0 điểm) Chứng minh rằng: $OI.OM = OK.OH$	
	Ta có MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O;R) ⇨ MA = MB Lại có: OA = OB Do đó OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB $\Rightarrow MO \perp AB$ tại I	0,25 0,25 0,25
	$xét \Delta OIK và \Delta OHM có:$ $\widehat{HOM} chung$ $\widehat{OIK} = \widehat{OHM} = 90^0$ $\Rightarrow \Delta OIK \sim \Delta OHM (g.g)$ $\Rightarrow \frac{OI}{OH} = \frac{OK}{OM}$	0,5 0,5
	$\Rightarrow OI.OM = OK.OH (dpcm)$	0,25
	2. (2,0 điểm) Chứng minh: khi M chuyển động trên đường thẳng a thì AB luôn đi qua 1 điểm cố định.	
	Ta có: $OI.OM = OK.OH (cmt)$	0,25
	Xét ΔBMO vuông tại B, $BI \perp OM$ ta có: $OI.OM = OB^2 = R^2$	0,5
	Do đó: $OK.OH = R^2$ $\Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH}$	0,5
	Vì O và H cố định nên OH không đổi ⇨ OK không đổi	0,5
	Mà $K \in OH$ cố định => K cố định Vậy AB đi qua K cố định khi M chuyển động trên đường thẳng a	0,25
	3. (1,5 điểm) Tìm vị trí của M để S_{OIK} đạt giá trị lớn nhất.	
	Gọi J là trung điểm của OK => J cố định Kẻ $IE \perp OK$ tại E Ta có : ΔOIK có OK không đổi	0,5

	Ta có: $S_{OIK} = \frac{1}{2}.OK.IE$ vì OK không đổi nên S_{OIK} lớn nhất khi IE lớn nhất Mà $IE \le IJ = \frac{1}{2}OK$ (quan hệ đường vuông góc và đường xiên, trung tuyến thuộc cạnh huyền trong tam giác vuông)	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv J \Leftrightarrow \Delta IKO$ vuông cân tại I $\Rightarrow \widehat{IOK} = 45^0 \Rightarrow \Delta HMO$ vuông cân tại H Vậy S_{OIK} lớn nhất $\Leftrightarrow HM = HO$	0.5
Câu 5 *(2,0 điểm)*	**1.(1điểm) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$.** **Chứng minh rằng:** $2abc(a+b+c) \le \frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$	
	Sử dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$. Ta có: $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \ge a^2b.b^2c + b^2c.c^2a + c^2a.a^2b = abc\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$	0,25
	Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức: SVac - Xơ và giả thiết $ab+bc+ca=1$ ta có: $ab^2+bc^2+ca^2 = \frac{b^2}{\frac{1}{a}} + \frac{c^2}{\frac{1}{b}} + \frac{a^2}{\frac{1}{c}} \ge \frac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = abc(a+b+c)^2$. Từ đó suy ra $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \ge \left[abc(a+b+c)\right]^2$.	0,25
	Bây giờ ta sẽ chứng minh: $\left[abc(a+b+c)\right]^2 - 2abc(a+b+c) + \frac{5}{9} \ge 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 \ge 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) \ge 0$ (với $t = 3abc(a+b+c)$	0,25
	Mặt khác ta có: $3abc(a+b+c) = 3(ab.ac+bc.ba+ca.cb) \le (ab+bc+ca)^2 = 1 \Rightarrow 0 < t \le 1$. Suy ra đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.	0,25
	2. Tổng của cả dãy 100 số là: $\frac{(1+100)100}{2} = 5050$ Chia 100 số thành 10 bộ 10 số liên tiếp thì trung bình tổng của 10 bộ số này là $\frac{5050}{10} = 505$. Nên tồn tại ít nhất 1 bộ 10 số liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 505. Ta chứng minh số a lớn nhất có thể bằng 505 bằng cách chọn ra ví dụ mà tổng 10 số liên tiếp bất kỳ nhỏ hơn hoặc bằng 505, khi đó mọi số a lớn hơn 505 đều không thỏa mãn.	0,5
	Thật vậy, xét cách sắp xếp sau: 100, 1, 99, 2, 98, 3, ... , 51, 50 (Chia thành các cặp có tổng bằng 101, viết số lớn đứng trước rồi xếp các cặp cạnh nhau theo thứ tự giảm dần của số lớn hơn). Nếu 10 số liên tiếp gồm 5 cặp số như vậy thì tổng 10 số này là 505. Nếu không, 10 số này sẽ gồm số đầu là số nhỏ hơn trong 1 cặp và kết thúc là số lớn hơn trong 1 cặp khác. Các số này thuộc 6 cặp khác nhau là: x, 101 – x, x – 1, 102 – x, ..., x – 4, 105 – x, x – 5, 106 – x Và 10 số được chọn là các số từ 101 – x đến x – 5 (trong dãy trên), dễ thấy tổng 10 số như vậy là 500. Do đó	0,5

	tổng 10 số liên tiếp bất kỳ đều không quá 505. Vậy a = 505.	

--------Hết--------