

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI	2
II. THỰC TRẠNG	2
III. CÁC GIẢI PHÁP	3
A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ	3
1. Các định lý	3
2. Các tính chất	3
B. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP	3
1. Sử dụng đồng thời phương pháp hàm số giải hệ phương trình	4
- Bài 1; 2; 3	5 - 6
2. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp biến đổi tương đương	6
2.1. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp nâng lũy thừa khử căn hoặc phương pháp giải những phương trình đa thức bậc cao.	6 - 7
- Bài 1; 2; 3	7- 8
2.2. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp giải phương trình đẳng cấp	9- 10 - 11
- Bài 1; 2	
2.3. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp nhân liên hợp	11- 12- 13
- Bài 1; 2; 3	
3. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp đặt ẩn số phụ	14 - 15
- Bài 1; 2	
4. Sử dụng phương pháp thế sau đó kết hợp với phương pháp hàm số	16 - 17
- Bài 1; 2	
5. Kết hợp phương pháp cộng đại số với phương pháp hàm số	17 - 18
- Bài 1; 2	
IV. Hiệu quả do sáng kiến đem lại	19
V. Đề xuất, khuyến nghị	20
PHỤ LỤC	21

thông qua kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp khác

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI:

Hệ phương trình là một chủ đề rất quan trọng trong các chủ đề toán học ở trường phổ thông. Đặc biệt, trong kỳ thi THPT Quốc gia những bài toán hệ phương trình thường xuất hiện ở những góc độ khác nhau và độ khó cũng ngày càng được nâng lên nên đôi lúc cách giải quyết đối với nhiều học sinh còn gặp nhiều khó khăn.

Một trong những loại hệ phương trình hay gặp trong các kỳ thi và gây cho học sinh khó khăn khi tiếp cận là hệ phương trình trong đó có sử dụng phương pháp hàm số. Với mong muốn giúp các em học sinh có kỹ năng tốt, không còn ngỡ ngàng khi gặp các hệ phương trình dạng này, tôi suy nghĩ rằng, cần phải hệ thống lại kiến thức, phân dạng bài tập cụ thể và cần có phân tích đối em học sinh về các bài toán đó để học sinh hiểu, vận dụng và có tư duy logic những bài tập có dạng tương tự.

II. THỰC TRẠNG

Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình được đánh giá là một trong ba câu phân loại học sinh (cùng với bài toán về hình giải tích trong mặt phẳng Oxy và bất đẳng thức) trong các đề thi thpt Quốc gia. Cho nên khi gặp hệ phương trình nói chung, hệ phương trình có thể giải được bằng phương pháp hàm số nói riêng, đa số học sinh đều đánh giá đây là câu khó nên thường có chung tâm lý là không làm câu này, do đó trong quá trình ôn tập cũng không chú trọng ôn luyện dạng toán này.

Số lượng học sinh làm được trọn vẹn câu hệ phương trình có thể giải được bằng phương pháp hàm số không nhiều, thường chỉ có những em khá giỏi về môn Toán mới làm được, điều này được thể hiện qua kết quả của các kỳ thi cấp trường và cấp sở. Lý do là các em không biết bắt đầu từ phương trình nào của hệ, không biết cách biến đổi để đưa về việc xét hàm đặc trưng, hoặc quên các phương pháp giải cơ bản của phương trình...

III. CÁC GIẢI PHÁP

A. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ

1. Các định lý

- Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.
 - a) Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a;b)$, dấu “=” xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên $(a;b)$.
 - b) Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a;b)$, dấu “=” xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên $(a;b)$.
- Nếu hàm số **liên tục** trên đoạn $[a;b]$ (hoặc nửa khoảng) và có đạo hàm $f'(x) \geq 0$ trên khoảng $(a;b)$, dấu “=” xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên **đoạn** $[a;b]$ (hoặc nửa khoảng tương ứng).
- Nếu hàm số **liên tục** trên đoạn $[a;b]$ (hoặc nửa khoảng) và có đạo hàm $f'(x) \leq 0$ trên khoảng $(a;b)$, dấu “=” xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên **đoạn** $[a;b]$ (hoặc nửa khoảng tương ứng).

2. Các tính chất

- Tính chất 1:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ và $u;v \in (a;b)$, khi đó

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

- **Tính chất 2:** Nếu hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên $(a; b)$ và $y = g(x)$ là **hàm hằng** hoặc là một hàm số **nghịch biến** trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.
Nếu có $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm **duy nhất** x_0 trên $(a; b)$.

Chú ý:

- Khoảng $(a; b)$ nêu trong tính chất có thể thay bởi các **miền**
 $(-\infty; a), (-\infty; a], [a; b], (a; b), [a; b), (b; +\infty), [b; +\infty), (-\infty; +\infty)$.
- Khi gặp hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} f(x) = f(y) & (1) \\ g(x; y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = f(t)$, ta thường gặp trường hợp hàm số liên tục trong tập xác định của nó.

Nếu hàm số $y = f(t)$ đơn điệu, thì từ (1) suy ra $x = y$. Khi đó bài toán đưa về giải phương trình (2) theo ẩn x (hoặc y).

Nếu hàm số $y = f(t)$ có một cực trị tại $t = a$ thì nó thay đổi chiều biến thiên một lần khi qua a . Từ (1) suy ra $x = y$ hoặc x, y nằm về hai phía của a .

- Vận dụng linh hoạt các định lí, tính chất trên, từ một phương trình ẩn x , ta sẽ đưa hai vế về dạng $f[h(x)] = f[g(x)]$ (chẳng hạn như $f(\sqrt{x+5}) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = x$) với $f(t)$ là một hàm đơn điệu đặc trưng trên miền D đang xét. Thông thường có thể dự đoán được $h(x)$ và **bậc** của $g(x)$, từ đó đồng nhất hệ số để tìm $g(x)$.

B. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Sử dụng đồng thời phương pháp hàm số giải hệ phương trình

Đối với hệ phương trình hai ẩn x, y , ta thường phải xuất phát từ một phương trình của hệ để tìm mối liên hệ đơn giản hơn giữa x và y , một trong những cách đó là sử dụng phương pháp hàm số. Khi tìm được mối liên hệ giữa x và y đơn giản hơn ta thế vào phương trình còn lại, thường ta sẽ thu được phương trình một ẩn (theo ẩn x hoặc ẩn y). Nhưng phương trình thu được lại phức tạp (chứa bậc cao, chứa căn,...) hoặc chứa những biểu thức tương đồng nhau về mặt hình thức, khi đó ta có thể tiếp tục sử dụng phương pháp hàm số để giải phương trình một ẩn này.

Bài 1. (Đại học khối A năm 2010) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 & (2) \end{cases}$$

Phân tích: Ta nhận thấy khó có thể bắt đầu với phương trình (2), để ý đến phương trình (1), $4x^2 + 1$ là biểu thức bậc hai của x và $y - 3$ có thể coi là biểu thức bậc hai của $\sqrt{5 - 2y}$. Nếu đặt $t = \sqrt{5 - 2y}$ thì

$$(y - 3)\sqrt{5 - 2y} = \left(\frac{5 - t^2}{2} - 3 \right) t = \frac{-1}{2}(t^2 + 1)t$$

Biểu thức $(t^2 + 1)t$ có hình thức giống với $(4x^2 + 1)2x$, do vậy ta sẽ biến đổi (1) về dạng $f(u) = f(v)$. Để đưa về dạng này ta thường “cô lập” biến, do vậy sẽ chuyển $(y - 3)\sqrt{5 - 2y}$ sang vế phải của (1).

Giải

Điều kiện $x \leq \frac{3}{4}; y \leq \frac{5}{2}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow (4x^2 + 1)2x = (5 - 2y + 1)\sqrt{5 - 2y}$ (3)

Xét hàm số $f(t) = (t^2 + 1)t = t^3 + t$, với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Do đó

$$(3) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{5 - 4x^2}{2} \end{cases}$$

Thay $y = \frac{5 - 4x^2}{2}$ vào phương trình (2) ta được:

$$4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7 = 0 \quad (4)$$

Phân tích: Phương trình (4) trông khá “phức tạp” nên ta định hướng sử dụng phương pháp hàm số để giải quyết

Nhận thấy $x = 0$ và $x = \frac{3}{4}$ không là nghiệm của phương trình (4)

Xét hàm số $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7$ với $x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$, ta có:

$$g'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3 - 4x}} < 0, \quad \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right)$$

Do đó $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{3}{4}\right)$. Mà $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ nên phương trình (4) có nghiệm duy nhất

$x = \frac{1}{2}$ suy ra $y = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài 146. (ĐH-A2013) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y & (1) \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq 1$.

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn x , điều kiện để tồn tại x là

$$\Delta' = (y-1)^2 - y^2 + 6y - 1 = 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$$

Đặt $u = \sqrt[4]{x-1}$, suy ra $u \geq 0$. Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{u^4 + 2} + u = \sqrt{y^4 + 2} + y \quad (3)$$

Xét $f(t) = \sqrt{t^4 + 2} + t$, với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = \frac{2t^3}{\sqrt{t^4 + 2}} + 1 > 0, \forall t \geq 0$

Do đó phương trình (3) tương đương với $y = u$, nghĩa là $x = y^4 + 1$.

Thay vào phương trình (2) ta được: $y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0 \quad (4)$

Hàm $g(y) = y^7 + 2y^4 + y - 4$ có $g'(y) = 7y^6 + 8y^3 + 1 > 0$ với $\forall y \geq 0$.

Mà $g(1) = 0$, nên (4) có hai nghiệm không âm là $y = 0$ và $y = 1$

Với $y = 0$ ta được nghiệm $(x; y) = (1; 0)$; với $y = 1$ ta được nghiệm $(x; y) = (2; 1)$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ đã cho là $(1; 0)$ và $(2; 1)$.

Nhận xét: Phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ chỉ khi hàm số $f(t)$ đơn điệu trên D và $u, v \in D$. Nếu hàm đặc trưng $f(t)$ có đạo hàm $f'(t)$ chưa xác định một dấu (luôn dương hoặc luôn âm) trên $\mathbb{R}$ thì ta phải tìm cách chặn biến $x; y$ để $u, v \in D$ và $f(t)$ đơn điệu trên D . Để chặn biến x, y ta có thể dựa vào điều kiện xác định của hệ phương trình, điều kiện để phương trình bậc hai ẩn x tham số y (hoặc ẩn y tham số x) có nghiệm, hoặc nhận xét điều kiện của biểu thức để hệ có nghiệm (chẳng hạn: $A + B = 0, B \geq 0 \Rightarrow A \leq 0$; $A\sqrt{B} = c < 0 \Rightarrow A < 0$; $A^2 + B^2 = 1 \Rightarrow -1 \leq A, B \leq 1, \dots$)

Bài 147. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} & (1) \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)} & (2) \end{cases}$$

Giải

Xét $y = 0, (1) \Rightarrow x = 0$ thay vào (2) thì không thỏa mãn.

Xét $y \neq 0$, chia 2 vế của (1) cho y^{11} ta được:
$$\left(\frac{x}{y}\right)^{11} + \frac{x}{y} = y^{11} + y \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^{11} + t, t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 11t^{10} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó,

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2,$$

Thế $x = y^2$ vào (2) ta được: $7x^2 + 13x + 8 = 2x^2 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3x - 1)} \quad (4)$

Xét $x = 0$ không là nghiệm phương trình, chia 2 vế cho x^3 ta được:

$$(4) \Leftrightarrow \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Đặt $t = \frac{1}{x}$, phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned} 8t^3 + 13t^2 + 7t &= 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \\ \Leftrightarrow (2t + 1)^3 + 2(2t + 1) &= 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2} + (3 + 3t - t^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Xét hàm số $g(u) = u^3 + 2u, u \in \mathbb{R}$ ta có $g'(u) = 3u^2 + 2 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$ nên hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó,

$$(5) \Leftrightarrow g(2t+1) = g(\sqrt[3]{3+3t-t^2})$$

$$\Leftrightarrow (2t+1)^3 = 3+3t-t^2 \Leftrightarrow (t+1)(8t^2+5t+2) = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Suy ra $x = -1 \Rightarrow y^2 = -1$, hệ đã cho vô nghiệm.

Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2+1)x + (y-4)\sqrt{3-y} = 0 \\ 22x^2 + 9y^2 + 18\sqrt{4-3x} = 76 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (1; 2)$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 3 = (4x^2 - 2x^2y)\sqrt{3-2y} + \frac{4x^2+1}{x} & (1) \\ (2x+1)\sqrt{2-\sqrt{3-2y}} = x+2 + \sqrt[3]{2x^2+x^3} & (2) \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right)$

2. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp biến đổi tương đương

2.1. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp nâng lũy thừa khử căn hoặc phương pháp giải những phương trình đa thức bậc cao.

Ngoài phương pháp hàm số đã nêu ở phần trước, giáo viên cần nhắc lại cho học sinh một số phép biến đổi tương đương cơ bản của phương trình để biến đổi phương trình ban đầu về phương trình đã biết cách giải sau:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \text{ (} f(x) \geq 0 \text{)} \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$$

Bài 1. (Đại học khối A năm 2012) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Phân tích: Hai vế của phương trình đầu đều có dạng bậc 3 (với hai biến x, y), nên ta định hướng đưa phương trình đầu về dạng $f(u) = f(v)$, tuy nhiên hàm đặc trưng lúc đó $f(t) = t^3 - 12t$ không đơn điệu trên $\mathbb{R}$ do đó ta phải chặn biến. Nhìn vào phương trình thứ 2 ta

thấy đưa được về $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ suy ra $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 1; \left|y + \frac{1}{2}\right| \leq 1$.

Giải

$$\begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) & (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2), suy ra $\begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq y + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y + 1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 12t$ trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$, ta có $f'(t) = 3(t^2 - 4) < 0$, suy ra $f(t)$ nghịch biến.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$ (3)

Thay vào (2), ta được

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Thay vào (3), ta được nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right); (x; y) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Bài 148. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y^2) + 2 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x = (y - 1)^3 - 3(y - 1)$ (3)

Do $0 \leq y \leq 2 \Rightarrow -1 \leq y - 1 \leq 1$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ với $-1 \leq t \leq 1$, có $f'(t) = 3t^2 - 3 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-1; 1]$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow f(x) = f(y - 1) \Leftrightarrow x = y - 1$ hay $y = x + 1$

Thế vào (2) ta được

$$x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{1 - x^2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 2\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x^4 + 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 1)$.

Bài 149. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y & (1) \\ 2x^2 - 5xy + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải.

Điều kiện: $x > -1, y > -1$.

Phương trình (1) của hệ được viết lại dưới dạng

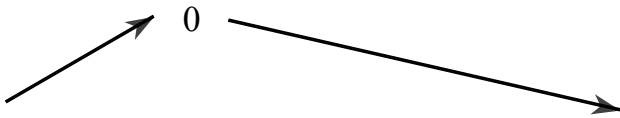
$$\ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \ln(1+t) - t$ với $t \in (-1; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$.

Ta thấy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Bảng biến thiên

t	-1	0	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		0	



Ta có (3) $\Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

- Nếu x, y thuộc cùng một miền đơn điệu của hàm số $f(t)$ thì

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Thế vào phương trình (2) ta được: $x = y = 0$.

- Nếu x, y nằm trên hai miền đơn điệu khác nhau của $f(t)$ thì $xy < 0$. Khi đó vế trái của (2) luôn dương, phương trình không thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$.

Bài tập tương tự

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 2(\sqrt{y} - \sqrt{x+1} - x) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + x - y = 2 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (3; 4)$.

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{3-y} = y^2 - x^2 + 4x - 6y + 5 \\ \sqrt{2x+3} + \sqrt{4y+1} = 6 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (3; 2), (x; y) = (-1; 6)$.

- Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{5\sqrt{5}-7}{2}; \frac{5\sqrt{5}+5}{2} \right)$

2.2. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp giải phương trình đẳng cấp

Trong phương pháp này, ngoài việc nắm được ứng dụng hàm số vào giải phương trình, ta cần phải nắm được cách giải một số dạng phương trình đẳng cấp sau:

+) Phương trình: $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$

Xét $y = 0 \Rightarrow x = 0$.

Xét $y \neq 0$, chia hai vế cho y^2 được phương trình $a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0$ là phương trình bậc hai ẩn $\frac{x}{y}$.

+) Phương trình $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$.

Xét $y = 0 \Rightarrow x = 0$

Xét $y \neq 0$, chia hai vế cho y^3 được $a\left(\frac{x}{y}\right)^3 + b\left(\frac{x}{y}\right)^2 + c\left(\frac{x}{y}\right) + d = 0$ là phương trình bậc ba ẩn $\frac{x}{y}$.

+) Phương trình dạng: $\alpha x + \beta y = \sqrt{mx^2 + ny^2}$, bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình đẳng cấp bậc hai đối với hai ẩn $x; y$.

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 8y^4 + 1 = 0 & (1) \\ y^4 + (x^3 + y)^2 = 1 + x^6 + \sqrt{1 - 2x^3y} & (2) \end{cases}$$

Phân tích: Ta đưa được phương trình (2) về dạng $f(y^2) = f(\sqrt{1 - 2x^3y})$ với $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, do đó ta có $y^2 = \sqrt{1 - 2x^3y} \Leftrightarrow y^4 = 1 - 2x^3y$ (*).

Để ý đến phương trình (1) ta thấy các biểu thức chứa biến đều có bậc 4, nếu chữ số 1 có thể chuyển về thành biểu thức bậc 4 thì ta được phương trình đẳng cấp bậc 4, điều này giải quyết được do phương trình (*) ta vừa thu được. Ta có lời giải sau:

Giải

Điều kiện: $1 - 2x^3y \geq 0$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow y^4 + y^2 = 1 - 2x^3y + \sqrt{1 - 2x^3y}$ (3)

Xét hàm số: $f(t) = t^2 + t$ với $t \geq 0$, có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ với mọi $t \geq 0$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

Mà $y^2; \sqrt{1 - 2x^3y} \in [0; +\infty)$ nên:

$$(3) \Leftrightarrow f(y^2) = f(\sqrt{1 - 2x^3y}) \Leftrightarrow y^2 = \sqrt{1 - 2x^3y} \Leftrightarrow y^4 + 2x^3y = 1 \quad (4)$$

Thay $1 = y^4 + 2x^3y$ vào (1) ta được:

$$x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4 = 0 \quad (5)$$

Do $y = 0$ không thỏa mãn nên chia hai vế phương trình (5) cho y^4 ta được:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 12\left(\frac{x}{y}\right) + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y} + 3\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ x = -3y \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x = y$, thay vào (4) ta có: $3x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Với $x = -3y$, cũng từ (4) ta có: $-53y^4 = 1$ (vô nghiệm)

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}; \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}; -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

Bài 150. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^3 + 3y = (x+5)\sqrt{x+2} & (1) \\ 2x^2 + 16 = 3(2y^2 + y\sqrt{x^2 - 2x + 4}) & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \geq -2, y \in \mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow y^3 + 3y = \sqrt{(x+2)^3} + 3\sqrt{x+2}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng: $f(y) = f(\sqrt{x+2}) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+2}$

Thay vào (2) ta được $2x^2 + 16 = 3(2(x+2) + \sqrt{x+2}\sqrt{x^2 - 2x + 4})$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 3\sqrt{x+2}\sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 4) - 2(x+2) = 3\sqrt{x+2}\sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

Đặt $u = \sqrt{x+2}, v = \sqrt{x^2 - 2x + 4}, (u \geq 0, v > 0)$

Phương trình trở thành $2v^2 - 3uv - 2u^2 = 0$ (3)

Do $v > 0$, chia hai vế phương trình (3) cho v^2 ta được:

$$2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 3\left(\frac{u}{v}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{u}{v} = \frac{1}{2} \text{ hoặc } \frac{u}{v} = -2.$$

Do $u \geq 0, v > 0$ nên $\frac{u}{v} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow v = 2u$

Suy ra $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{13}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là:

$$(3 + \sqrt{13}; \sqrt{5 + \sqrt{13}}), (3 - \sqrt{13}; \sqrt{5 - \sqrt{13}}).$$

Bài tập tương tự

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^6 + 9x^2 + 10 + 3y^2 = y^3 + 12y \\ 2y - 6x - 6 + \sqrt{y(x+1)} = 0 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{9 + \sqrt{161}}{8}; \frac{153 + 9\sqrt{161}}{32} \right) \left(\frac{9 - \sqrt{161}}{8}; \frac{153 - 9\sqrt{161}}{32} \right)$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} \\ 2y^3 + x^2 + y = (x^2 + 6y + 6)\sqrt{y+1} \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (3; 3)$

2.3. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp nhân liên hợp

Trong mục này ta xét đến lớp bài toán có thể sử dụng phương pháp hàm số để đơn giản một phương trình trong hệ, sau đó thế vào phương trình còn lại sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp.

Mục đích của phương pháp nhân lượng liên hợp là đưa phương trình thu được về phương trình tích số. Một số dạng nhân lượng liên hợp cần chú ý sau:

- Nhân lượng liên hợp bằng cách nhóm các số hạng trong phương trình: Quan sát các số hạng có trong phương trình để tìm mối liên hệ giữa chúng, sau đó nhóm lại rồi nhân lượng liên hợp để làm xuất hiện nhân tử chung.

- Nhân lượng liên hợp bằng cách thêm bớt hằng số: Đoán nghiệm x_0 của phương trình, sau đó thêm bớt hằng số rồi nhân lượng liên hợp để xuất hiện nhân tử $x - x_0$. Cách đoán nghiệm x_0 ta có thể dùng chức năng SOLVE của máy tính cầm tay hoặc chọn số x_0 sao cho $\sqrt{f(x_0)}$ là số nguyên (hoặc hữu tỉ).

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3y + y^3 = x^6 + 2x^4 & (1) \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $y \geq -1$.

Do $x=0$ không thỏa mãn hệ đã cho nên chia hai vế của phương trình (1) cho x^3 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} \right)^3 + 2 \frac{y}{x} = x^3 + 2x \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 2 \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = f(x) \Leftrightarrow \frac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$

Thế $y = x^2$ vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} (x+2)\sqrt{x^2+1} &= x^2 + 2x + 1 \\ \Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{x^2+1} - x) &= 1 \end{aligned}$$

Ta có $\sqrt{x^2+1}+x > |x|+x \geq 0$ nên nhân hai vế của phương trình trên với $\sqrt{x^2+1}+x$ ta được:

$$\begin{aligned}x+2 &= \sqrt{x^2+1}+x \\ \Leftrightarrow x^2+1 &= 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = (-\sqrt{3}; 3), (x; y) = (\sqrt{3}; 3)$.

Bài 151. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y) = 1 & (1) \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = y^2+8 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $-2 \leq x \leq \frac{22}{3}$

Do $\sqrt{1+y^2}-y > \sqrt{y^2}-y = -y+|y| \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$

Nên nhân hai vế của phương trình (1) với $\sqrt{1+y^2}-y$ ta được

$$(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = (-y) + \sqrt{(-y)^2+1} \quad (3)$$

Xét hàm số $h(t) = t + \sqrt{t^2+1}, t \in \mathbb{R}$

Ta có $h'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}} > \frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $h(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó (3) $\Leftrightarrow x = -y$.

Thay $y = -x$ vào phương trình (2) ta được

$$4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2+8$$

Nhẩm được nghiệm $x=2$, thực hiện nhân liên hợp ta thu được nghiệm $x=2$ và phương trình:

$$\frac{4}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4} = x+2 \quad (*)$$

đặt $VT = f(x); VP = g(x)$

Ta có: $f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{x+2} \cdot (2+\sqrt{x+2})^2} - \frac{9}{2\sqrt{22-3x} \cdot (2+\sqrt{22-3x})^2} < 0$ và

$$g'(x) = 1 > 0 \text{ với } \forall x \in \left[-2; \frac{22}{3}\right].$$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến, $g(x)$ đồng biến trên $\left[-2; \frac{22}{3}\right]$

Mà $f(-1) = g(-1) = 1$ suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -1$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ đã cho: $(2; -2), (-1; 2)$

Bài 152. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6} = 6-y & (1) \\ (x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1} \cdot \sqrt{x^2-4x+5} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \geq -6; y \geq -1$.

Phương trình (2) tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} &= \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+2}} \\ \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}} &= \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{(\sqrt{y+1})^2+1}} \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, t \in \mathbb{R}$, có $f'(t) = \frac{1}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó, } (3) \Leftrightarrow f(x-2) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} 2(x-2)\sqrt{x+6} &= -x^2 + 4x + 3 \\ \Leftrightarrow 2(x-2)(\sqrt{x+6} - 3) &= -x^2 - 2x + 15 \\ \Leftrightarrow 2(x-2) \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} &= -(x-3)(x+5) \\ \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{2x-4}{\sqrt{x+6}+3} + x+5 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Do $x \geq 2$ nên $\frac{2x-4}{\sqrt{x+6}+3} + x+5 \geq 7$ nên phương trình trên chỉ có nghiệm $x=3$, suy ra $y=0$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 0)$.

Bài tập tương tự

$$\begin{aligned} 1. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1 & (1) \\ x^2 + \sqrt{3-x} = 2y^2 - 4\sqrt{2-y} + 5 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Đáp số: $(x; y) = (-1; 1), (x; y) = (2; -2)$.

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0 \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13 \end{cases}$$

Hướng dẫn

Đưa phương trình đầu của hệ về dạng: $f(\sqrt{5-x}) = f(\sqrt{4-y})$, với $f(t) = (2+3t^2)t$, hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta thu được

$$5-x = 4-y \Leftrightarrow y = x-1$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, đến đây giải đơn giản.

3. Kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp đặt ẩn số phụ

Một số phép đặt ẩn phụ cơ bản giải phương trình:

+ Nếu phương trình chứa $\sqrt[n]{f(x)}$ và $f(x)$ ta đặt $t = \sqrt[n]{f(x)}$

+ Nếu phương trình chứa $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ và $f(x).g(x)$, ta đặt $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$

Ngoài ra cần chú ý một số cách biến đổi để làm xuất hiện ẩn phụ: Chia hai vế cho một biểu thức khác 0 hoặc thực hiện biến đổi hằng đẳng thức.

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 & (1) \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = y^3 + y \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó, $(3) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x+1$

Thế vào (2) ta được:

$$\sqrt{1-x^2} + 1 = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \quad (4)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \ (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 2}{2}$$

Phương trình (4) trở thành

$$\frac{t^2 - 2}{2} + 1 = t \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Với $t = 0$, ta có

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 0 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Với $t = 2$ ta có

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 1)$.

Bài 153. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 & (1) \\ y + \frac{y}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x^2 > 1$.

Do $\sqrt{y^2 + 1} - y > \sqrt{y^2} - y \geq 0$, nên

$$(1) \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})(\sqrt{y^2 + 1} - y) = \sqrt{y^2 + 1} - y$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 1} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}, t \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó,

$$(3) \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y$$

Thay vào (2) ta được: $y + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{35}{12}$ (4)

Ta thấy phương trình (4) có nghiệm thì $\begin{cases} y > 0 \\ y^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow y > 1$. Khi đó,

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow y^2 + \frac{2y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} + \frac{y^2}{y^2 - 1} = \frac{1125}{144} \\ &\Leftrightarrow \frac{y^4}{y^2 - 1} + \frac{2y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} - \frac{1125}{144} = 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - 1}}$ ($t > 0$), phương trình trên trở thành:

$$t^2 + 2t - \frac{1125}{144} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{49}{12} \\ t = \frac{25}{12} \end{cases}$$

Do $t > 0$ nên $t = \frac{25}{12}$, và ta có

$$\frac{y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{25}{12} \Leftrightarrow 144y^4 - 625y^2 + 625 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{25}{16} \\ y^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{5}{4} \\ y = \pm \frac{5}{3} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện $y > 1$ ta được $y = \frac{5}{4}; y = \frac{5}{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right); (x; y) = \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Bài tập tương tự

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y^2) + 2 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + 2 = 0 \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (0; 1)$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ (y + 4)^2 = 5 - x\sqrt{2y + 10} \end{cases}$

Đáp số: $(x; y) = (-\sqrt{2}; -1), (\sqrt{\sqrt{3} - 1}; 2 + \sqrt{3})$

4. Sử dụng phương pháp thế sau đó kết hợp với phương pháp hàm số

Trong phương pháp này, ta thực hiện biến đổi một phương trình của hệ về dạng tích số, thực hiện rút một ẩn theo ẩn kia (trong một số trường hợp ta phải rút $x^2, y^2, xy, \dots$) và thế vào phương trình còn lại của hệ và sử dụng phương pháp hàm số.

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} \\ 2x^3 - y^3 + x^2y^2 = 2xy - 3x^2 + 3y \end{cases}$$

Phân tích: Nhìn vào hệ ta thấy khó có thể bắt đầu ở phương trình thứ nhất của hệ. Để ý đến phương trình thứ hai, ta thấy có những cặp hệ số giống nhau: hệ số 2 (trong $2x^3; 2xy$), hệ số 3 (trong $3x^2, 3y$), hệ số 1 (trong y^3, x^2y^2) do đó ta sẽ nghĩ đến ghép từng cặp biểu thức có hệ số giống nhau lại để làm xuất hiện nhân tử chung.

Giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 2$

Ta có (2) $\Leftrightarrow 2x(x^2 - y) + y^2(x^2 - y) + 3(x^2 - y) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + y^2 + 3)(x^2 - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 \text{ (vì } 2x + y^2 + 3 > 0, \text{ với mọi } -1 \leq x \leq 2)$$

Thay $y = x^2$ vào (1) ta được: $x^2 - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ (3)

Xét hàm số $f(x) = x^2 - x - \sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + 1 + \sqrt{2}, x \in [-1; 2]$

Ta có $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

Và $f''(x) = 2 + \frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4(2-x)\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in (-1; 2)$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$, nên phương trình $f'(x) = 0$ có nhiều nhất 1

nghiệm. Mặt khác $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, từ đó ta có BBT của $f(x)$

x	-1	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f\left(\frac{1}{2}\right)$	

Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \sqrt{2} - \sqrt{6} < 0$, nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất 2

nghiệm, hơn nữa $f(0) = f(1) = 0$, do đó phương trình (3) có 2 nghiệm $x = 0; x = 1$.

Tóm lại hệ đã cho có 2 nghiệm $(0; 0)$ và $(1; 1)$

Bài 154. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x. \end{cases}$$

Phân tích: Ta thấy phương trình thứ nhất của hệ là phương trình bậc nhất ẩn y nên ta sẽ rút y theo x rồi thế vào phương trình thứ hai của hệ.

Giải

ĐKXD: $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow y(\sqrt{x^2 + 2} - x) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 2} + x \quad (1).$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ, ta có :

$$(\sqrt{x^2 + 2} + x)^2 + 2(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + 2x + (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)\left[1 + \sqrt{(x + 1)^2 + 2}\right] = (-x)\left[1 + \sqrt{(-x)^2 + 2}\right] \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t(1 + \sqrt{t^2 + 2})$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Mặt khác, phương trình (*) có dạng $f(x + 1) = f(-x) \Leftrightarrow x + 1 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào (1) ta tìm được $y = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài tập tương tự

$$1. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2^{x+3y+2y^2} + 4 \cdot 2^{x+4y} = 2^{2x+3y} + 4^{(y+1)^2} & (1) \\ 2\sqrt{2x-2y-3} = \frac{2y^2+2y-x+xy}{2y^2+2y-3x+2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } (1; -1), (8; 6), \left(\frac{22-4\sqrt{10}}{9}; \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^3y - y^4 = 28 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 18\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Đáp số: } (2\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

5. Kết hợp phương pháp cộng đại số với phương pháp hàm số

Trong dạng này, chúng ta chưa sử dụng luôn được phương pháp hàm số để biến đổi hệ phương trình mà muốn sử dụng được, chúng ta cần phải kết hợp các phương trình của hệ lại, khi đó mới áp dụng được tính chất của hàm số để biến đổi.

$$\text{Bài 1. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3(2+3y) = 1 \\ x(y^3-2) = 1 \end{cases}$$

Phân tích: Đối với hệ này, ta nghĩ đến cô lập biến rồi sử dụng phương pháp hàm số. Chia hai vế phương trình thứ nhất cho x^3 , chia hai vế phương trình thứ hai cho x rồi cộng lại ta được:

$$y^3 + 3y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}, \text{ đến đây ta có thể sử dụng phương pháp hàm số.}$$

Giải

- Với $x = 0$ dễ thấy không thỏa mãn hệ trên.
- Với $x \neq 0$, ta có:

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 2 + 3y = \frac{1}{x^3} \\ y^3 - 2 = \frac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow y^3 + 3y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, (1) có dạng $f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$.

Thế vào hệ sẽ được:
$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^3 \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; y = -1 \\ x = \frac{1}{2}; y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(-1; -1), \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài 155. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(3y + 55) = 64 & (1) \\ xy(y^2 + 3y + 3) = 12 + 51x & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn: Tương tự bài 1, ta cô lập các biến x, y ; chia hai vế phương trình (1) cho x^3 , phương trình (2) cho x rồi cộng lại với nhau biến đổi về dạng:

$$(y+1)^3 + 3(y+1) = \left(\frac{4}{x}\right)^3 + 3 \cdot \frac{4}{x}$$

Giải

Với $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì hệ không được thỏa mãn.

Với $x \neq 0, y \neq 0$, HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 55 = \frac{64}{x^3} \\ y^3 + 3y^2 + 3y = \frac{12}{x} + 51 \end{cases}$

Cộng theo vế lại ta được: $(y+1)^3 + 3(y+1) = \left(\frac{4}{x}\right)^3 + 3 \cdot \frac{4}{x} \quad (3)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (3) có dạng $f(y+1) = f\left(\frac{4}{x}\right) \Leftrightarrow y+1 = \frac{4}{x} \Leftrightarrow xy = 4 - x$

Kết hợp với (1) ta được:

$$\begin{aligned}
& 3x^2(4-x) + 55x^3 = 64 \\
& \Leftrightarrow 13x^3 + 3x^2 - 16 = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-1)(13x^2 + 16x + 16) = 0 \\
& \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=3
\end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 3)$.

Bài tập tương tự

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y \end{cases}$$

Đáp số: Nghiệm của hệ: $(x; y) = (1; 0), (5; 2)$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 & (1) \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 & (2) \end{cases}$$

Đáp số: Nghiệm $(x; y)$ của hệ là: $(3; 3), \left(\frac{11}{9}; \frac{11}{9}\right)$.

IV. Hiệu quả do sáng kiến đem lại

Qua áp dụng tại các lớp 12A, 12B và 12C ở trường THPT Mai Anh Tuấn đã mang lại những kết quả thiết thực, cụ thể:

Trong đề thi khảo sát chất lượng 8 tuần đầu học kì I năm học 2015-2016 của trường THPT THPT Mai Anh Tuấn có câu:

“Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + \sqrt{xy} + y - 3\sqrt{y} + 3 = 0 \\ 3x - y + 5\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy} = 0 \end{cases}$$
”

Đây là một câu không quá khó, ta chỉ cần cộng theo về các phương trình của hệ (mục đích là để khử $\sqrt{xy}$) và biến đổi về dạng $f(\sqrt{x}+1) = f(\sqrt{y})$ với $f(t) = t^3 + 2t$. Tuy nhiên theo thống kê, những học sinh làm được câu này không nhiều, mặc dù nội dung ứng dụng hàm số giải phương trình, hệ phương trình đã được tổ chuyên môn thống nhất ngay từ đầu năm và các thầy cô nghiêm túc thực hiện.

	Lớp 12A	Lớp 12B	Lớp 12C	Tổng số HS
Số học sinh làm được câu HPT	12/42	17/43	13/45	42/130
Tỉ lệ	28,6%	39,5%	30,2%	32,2%

Sau khi áp dụng sáng kiến tại 3 lớp 12A, 12B, 12C (với thời lượng 20 tiết/lớp), trong kỳ thi thử đại học lần 2 của trường THPT Mai Anh Tuấn có câu:

“Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 6x - 3y - 4 = 0 \\ \sqrt{x^2+5} + \sqrt{y+3} = x^2 + 2y - 1 \end{cases}$$
”

tỉ lệ học sinh làm được câu này đã tăng lên rõ rệt mặc dù cách giải quyết hệ này phức tạp hơn (biến đổi phương trình thứ nhất về dạng $f(y) = f(x-1)$ với $f(t) = t^3 + 3t$ từ đây được $y = x - 1$. Thế vào phương trình thứ 2 và dùng tiếp phương pháp nhân lượng liên hợp sẽ được:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = x+4 (*) \end{array} \right.$$
 sau đó dựa vào đánh giá chứng minh phương trình (*) vô nghiệm.)

	Lớp 12A	Lớp 12B	Lớp 12C	Tổng số HS
Số học sinh làm được câu HPT	25/42	26/43	24/45	75/130
Tỉ lệ	59,5%	60,5%	53,3%	57,7%

- Các em không còn tâm lý e ngại khi gặp hệ phương trình nói riêng và phương trình, bất phương trình, hệ phương trình nói chung vì qua sáng kiến các em đã nắm được một cách hệ thống các phương pháp cơ bản giải phương trình còn bất phương trình thì các phương pháp giải cũng tương tự.

V. Đề xuất, khuyến nghị

Đối với các nhà quản lý giáo dục, các nhà trường: Tổ chức các chương trình tập huấn bồi dưỡng nghiệp vụ hàng năm cho giáo viên đặc biệt là các chuyên đề ôn thi THPT Quốc gia, thi học sinh giỏi cấp tỉnh. Các chuyên đề khó như phương trình-bất phương trình-hệ phương trình, phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, bất đẳng thức cần được tập trung nhiều hơn để giúp cho các cơ sở giáo dục, các thầy cô giáo có thêm tư liệu trong việc đào tạo, bồi dưỡng nâng cao năng lực toán học nói riêng và phát triển tư duy cho học sinh nói chung.

Đối với mỗi giáo viên:

- Phải không ngừng tự học, tự trau dồi bản thân để nâng cao trình độ chuyên môn, nghiệp vụ của mình.

- Mỗi dạng toán cần có phương pháp giải riêng, có công thức từ đó hình thành cho học sinh con đường tư duy logic để giải toán, giúp cho các em có cách học, tự học hiệu quả.

- Người thầy cần phải tăng cường kiểm tra, sửa chữa sai sót cho học sinh, bên cạnh đó cũng cần động viên kịp thời để các em luôn có hứng thú với bộ môn của mình.

- Thầy giáo hướng dẫn cách tự đọc sách cho học sinh, hướng dẫn các em tự tìm tòi qua sách vở, báo toán, các trang web về toán học. Sử dụng mạng xã hội để trao đổi với các em về các vấn đề liên quan đến môn học.

- Người thầy tăng cường luyện tập cho các em các dạng chuyên đề và bộ đề thi để các em có nhiều thời gian tiếp cận và tập dượt với dạng toán thi, từ đó giúp các em có được kết quả học tập ngày càng tốt hơn.

Trên đây là báo cáo sáng kiến của tôi được đúc rút trong quá trình học tập và công tác của mình tại trường THPT Mai Anh Tuấn, chắc chắn sẽ có nhiều thiếu sót. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý vị và các bạn đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Người viết SKKN

Lê Thị Liên

PHỤ LỤC

Danh mục các tài liệu tham khảo

1. **Phạm Kim Chung, Phạm Chí Tuân, Lê Đình Mẫn, Ngô Hoàng Toàn.** *Phương trình vô tỷ*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. **Lê Văn Đoàn, Văn Đức Chín.** *Phương trình, bất phương trình & hệ phương trình*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
3. **Báo toán học và tuổi trẻ**
4. Các Website toán học: mathvn.com, k2pi.net, violet.vn,...