# CHUYÊN ĐỀ : SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN, PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1. **Đường trung tuyến của một tam giác**

**A**

* Đoạn thẳng *AM* nối đỉnh *A* của

**B M C**

*ABC* với trung điểm *M* của cạnh *BC* gọi là đường trung

tuyến (xuất phát từ đỉnh *A* hoặc ứng với cạnh *BC* ) của *ABC* .

* Đường thẳng *AM* cũng gọi là đường trung tuyến của
* Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

# Tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến

*ABC* .

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm). Điểm gặp nhau của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác đó.



# Vị trí của trọng tâm:

Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng 2

3

độ dài đường trung tuyến đi

qua đỉnh ấy:

*AG*  *BG*  *CG*  2

*AD BE CF* 3

# PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

**Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác**

1. **Phương pháp giải:**

Sử dụng linh hoạt các tỉ số liên quan đến trọng tâm tam giác.

1. **Bài toán.**

**Bài 1.** Chọn câu sai:

1. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.
2. Các đường trung tuyến của tam giác cắt tại một điểm.
3. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.
4. Một tam giác có hai trọng tâm.

# Lời giải

Một tam giác chỉ có một trọng tâm nên D sai. Chọn đáp án D.

**Bài 2.** Điền số thích hợp vào chỗ trống: “Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng … độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy”

1. 2 . 3

# Lời giải

Chọn đáp án A.

1. 3 . 2

C. 3. D. 2.

Theo tính chất trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng 2

3

độ dài đường

trung tuyến đi qua đỉnh ấy. Số cần điền là 2 .

3

**Bài 3.** Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số *BG* ?

*BE*

***A***

***B D C***

***F***

***E***

***G***

# Lời giải

Ta có . *AD*, *BE*,*CF* . là ba đường trung tuyến của tam giác *ABC* và chúng cắt nhau tại *G* nên

*G* là trọng tâm của tam giác *ABC* .

Theo tính chất ba đường trung tuyến của tam giác ta có . *BG*  2 .  *BG*  2 *BE*.

*BE* 3 3

**Bài 4.** Cho hình vẽ sau.Tình tỉ số *AG*

?

*GD*

***A***

***F***

***E***

***G***

# Lời giải

***B D C***

Ta có *AD*, *BE*,*CF* là ba đường trung tuyến của tam giác *ABC* và chúng cắt nhau tại *G* nên *G*

là trọng tâm của tam giác *ABC* .

Theo tính chất ba đường trung tuyến của tam giác ta có:

*AG*  2  *AG*  2 *AD*  *GD*  *AD*  *AG*  *AD*  2 *AD*  1 *AD*

*AD* 3 3 3 3

2 *AD*

 *AG*  3

 2  *AG*  2*GD*.

*GD* 1 *AD*

3

**Bài 5.** Tam giác *ABC* có trung tuyến

# Lời giải

*AM*  9cm

và trọng tâm *G* . Tính độ dài đoạn *AG* ?

***A***

***B M C***

***G***

Vì *G* là trọng tâm của tam giác *ABC* và *AM* là đường trung tuyến, nên

*AG*  2 *AM*

3

(Tính

chất ba đường trung tuyến của tam giác), do đó:

*AG*  2 .9  6cm .

3

**Bài 6.** Cho

*ABC*, *BC*

 *a*, *CA*

 *b*, *AB*

 *c*.

Kẻ trung tuyến

*AM*. Đặt *AM*

 *ma* .

Chứng minh rằng

*b*  *c*  *a*  *m*

 *b*  *c*

2 *a* 2

# Lời giải

***A***

***c b***

ma

***B a C M***

Với Với

*AMB*

*AMC*

ta có: ta có:

*AM*  *MB*  *AB* (1)

*AM*  *MC*  *AC* (2)

Cộng từng vế của 1 *và*

2

ta được:

2 *AM*  *MB*  *MC*   *AB*  *AC*

Hay 2*ma*

* *a*  *b*  *c*

 *ma*

* *b*  *c*  *a*

2

Chứng minh tương tự ta có

*m*  *b*  *c*

*a* 2

Khi đó ta có:

*b*  *c*  *a*  *m*  *b*  *c*

2 *a* 2

**Bài 7.** Cho

*ABC* có hai đường trung tuyến

*BD*, *CE*

1. Tính các tỉ số

*BG* , *CG BD CE*

1. Chứng minh . *BD*

# Lời giải

* *CE*
* 3 *BC* .

2

***A***

***B C***

***E***

***D***

***G***

Gọi giao điểm của hai đường trung tuyến *BD*, *CE* là *G* .

*GBC*

có: *GB*

* *GC*
* *BC*

(bất đẳng thức tam giác).

Mà *GB*  2 *BD* ,

*GC*  2 *CE* nên: 2 *BD*  2 *CE*  *BC* .

3

Do đó *BD*  *CE*

3 3 3

* 3 *BC* .

2

**Bài 8.** Cho

*ABC* có

*BC* 

8 *cm* , các đường trung tuyến

*BD*, *CE* cắt nhau tại *G* . Chứng

minh *BD*

* *CE*
* 12 *cm* .

**Lời giải**

***A***

***B C***

***E***

***D***

***G***

*GBC*

có: *GB*

* *GC*
* *BC*

(bất đẳng thức tam giác).

Mà *GB*  2 *BD* ,

*GC*  2 *CE* nên: 2 *BD*  2 *CE*  *BC* .

3

Do đó *BD*  *CE*

3 3 3

* 3 *BC*  3 .8  12 .

2 2

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* có hai đường trung tuyến *BP*, *CQ* cắt nhau tại *G* . Trên tia đối của

tia . *PB* . lấy điểm *E* sao cho *PE*  *PG* . Trên tia đối của tia *QG* lấy điểm *F* sao cho

*QF*  *QG* . Chứng minh:

a) *GB*

 *GE*, *GC*

 *GE* ; b) *EF*

 *BC* và

*EF* / /*BC* .

**Lời giải**

***A***

***Q***

***P***

***E***

***G***

***F***

***B C***

1. Vì *G* là trọng tâm

*ABC*

nên *BG*

 2*GP*, *CG*

 2*GQ* .

Lại có *PE*

Do đó *BG*

 *PG*, *QF*

 *GE*, *CG*

 *QG*

 *GF*.

nên *GE*

 2*GP*, *GF*

 2*GQ* .

1. Suy ra

*GBC*

 *GEF*

(c.g.c)

Từ đó ta có *EF*

 *BC*

và *GEF*  *GBC*

 *EF* / / *BC* .

**Bài 10.** Cho tam giác *ABC* có hai đường trung tuyến *AD*, *BE* cắt nhau tại *G* . Trên tia

đối của tia *DG* lấy điểm *M* sao cho *D* là trung điểm của đoạn thẳng

*EG* lấy điểm *N* sao cho *E* là trung điểm *GN* . Chứng minh:

*MG*. Trên tia đối của tia

1. *GN*

 *GB*, *GM*

 *GA*;

1. *AN*

 *MB* và *AN*

/ / *MB* .

**Lời giải**

***C***

***D***

***E***

***N***

***G***

***M***

***B A***

1. Vì *G* là trọng tâm

*ABC*

nên *BG*

 2*GE*, A*G*

 2*GD* .

Lại có *GN* 

2*GE*, *GM*

 2*GD* .( *D* , *E* lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng *MG* , *GN* )

Do đó *GN*

 *GB*, *GM*

 *GA*;

1. Suy ra

*GBM*

 *GNA* (c.g.c)

Từ đó ta có *AN*

 *MB*

và *GMB*  *GAN*

 *AN* / / *MB* .

# Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

1. **Phương pháp giải:**

Để chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác, ta có thể dùng một trong hai cách sau:

+ Chứng minh điểm đó là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác.

+ Chứng minh điểm đó thuộc mộtđường trung tuyến của tam giác và thỏa mãn một trong các tỉ lệ về tính chất trọng tâmcủa tam giác.

1. **Bài toán.**

**Bài 1.** Cho hai đường thẳng

*xx* ' *và yy* ' cắt nhau tại *O*. Trên tia *Ox* lấy hai điểm

*A*, *B* sao cho

*A* nằm giữa *O và B*, *AB*  2*OA*. Trên *yy* ' lấy hai điểm *L và M* sao cho *O* là trung điểm của

*LM* . Nối *B* với

*L*, *B* với *M* và gọi *P* là trung điểm của đoạn

*MB*, *Q* là trung điểm của đoạn

*LB* . Chứng minh rằng các đoạn thẳng *LP và MQ* đi qua *A* .

# Lời giải



Ta có *O* là trung điểm của đoạn *LM* . Suy ra *BO* là đường trung tuyến của

Mặt khác *BO*  *BA*  *AO* vì *A* nằm giữa *O và B* hay *OB*  2*OA*  *OA*  3*OA*

*BLM*

1

Suy ra

*BA* 

2 *BO*

3

2

Từ 1, 2 suy ra *A* là trọng tâm của

*BLM*

Mà *LP và MQ* là các đường trung tuyến của điểm của đoạn *LM* )

*BLM*

(vì *P* là trung điểm *MB* và *O* là trung

Suy ra các đoạn thẳng *LP và MQ* đi qua *A* (theo tính chất ba đường trung tuyến)

**Bài 2.** Cho

*ABC*

với đường trung tuyến *AD* . Trên tia *AD* lấy điểm *E* sao cho *AD*

 *DE* ,

trên tia *BC* lấy điểm *M* sao cho *BC*

# Lời giải

 *CM* . Chứng minh *C* là trọng tâm của  *AEM* .

***A***

***B***

***M***

***D***

***C***

Theo đề bài ta có *AD*

 *DE*

***E***

nên *C* thuộc *MD* là đường trung tuyến của tam giác *AEM* 1

Mặt khác ta có *BC*

 2*CD*

và *BC*

 *CM*

nên *CM*

 2*CD*

2

Từ 1 và 2

suy ra *C* là trọng tâm của  *AEM* .

**Bài 3.** Cho

*ABC* . Trên đường trung tuyến *AM* của tam giác đó, lấy hai điểm

*D*, *E* sao cho

*AD*  *DE*

 *EM* . Chứng minh *E* là trọng tâm của

*ABC* .

**Lời giải**

***A***

***B M C***

***D***

***E***

Từ giả thiết *AD*  *DE*  *EM*

ta có

*AE*  2 *AM* .

3

Mà *E* thuộc trung tuyến *AM* nên *E* là trọng tâm của *ABC* .

**Bài 4.** Cho

*ABC* . Vẽ trung tuyến *BM* . Trên tia BM lấy hai điểm

*G*, *K* sao cho

*BG*  2 *BM*

3

và *G* là trung điểm của *BK* . Gọi *E* là trung điểm *CK*; *GE* cắt *AC* tại *I* . Chứng minh: *I* là

trọng tâm của

# Lời giải

*KGC* .

***A***

***B C***

***K***

***G M***

***I***

***E***

Theo đề bài

*BG*  2 *BM* . Suy ra

3

*BG*  2*GM*

 *GK*  2*GM*

 *M* là trung điểm *GK* .

Do đó *I* là giao điểm ba đường trung tuyến trong *KGC* .

# Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

1. **Phương pháp giải:**

Chú ý những tính chất của tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

1. **Bài toán.**

**Bài 1.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* ***,*** trung tuyến *AM* ***.*** Chứng minh rằng *AM* vuông góc với

*BC* ***.***

# Lời giải

***A***

Xét

*ABM*

và *ABM*

***B M C***

có:

*AB*  *AC* *GT*  *BM*  *CM* *GT*  *AM* : cạnh chung

 *ABM*  *ACM* (*c*  *c*  *c*)  *AMB*  *AMC*

(Hai góc tương ứng)

Mà *AMB*  *AMC*  180

nên

*AMB*  *AMC*  90

hay *AM*  *BC*

**Bài 2.** Cho

*ABC*

có các đường trung tuyến *BD và CE* bằng nhau. Chứng minh rằng

*ABC* là

tam giác cân.

# Lời giải

***A***

***B C***

***E***

***D***

***G***

Gọi *G* là giao điểm của *BD và CE*  *BG*  2 *BD* ; *CG*  2 *CE*

3 3

Do *BD*  *CE* nên *BG*  *CG* ; *GD*  *GE*  *BGE*  *CGD* (c.g.c)  *BE*  *CD*

Ta lại có:

*BE*  1 *AB* ; *CD*  1 *CA*

2 2

Do đó *AB*  *AC*

 *ABC*

cân tại *A*

**Bài 3.** Cho tam giác

*ABC*,

đường trung tuyến Gọi *K* là trung điểm của

*BM* . Trên tia đối của

tia lấy *KA* điểm *E* sao cho *KE*  *KA*.

1. Điểm *M* là trọng tâm của tam giác nào? Vì sao?
2. Gọi *F* là trung điểm của *CE*. Chứng minh rằng ba điểm

# Lời giải

*A*, *M* , *F* thẳng hàng.

***A***

***B C***

***K***

***M***

***F***

Xét

*ACE* , ta có:

*KA*  *KE*(*gt*)  *CK*

***E***

là đường trung tuyến

Mà *CM*  2 *CK*

3

nên *M* là trọng tâm

*ACE* .

Do *F* là trung điểm của

*EC*(*gt*) nên *AF* là đường trung tuyến thứ ba của

*ACE*

Mà *M* là trọng tâm nên *AF* đi qua *M*

Hay ba điểm *A*, *M* , *F* thẳng hàng.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , trung tuyến *AM* . Trên tia đối của tia *MA* lấy điểm *D* sao cho

*MD*  *MA* .

1. Tính *ABD*
2. Chứng minh

*ABD*

 *BAC* .

1. Chứng minh *AM*

# Lời giải

 1 *BC*

2

1. *AMC*

 *DMB*

(c.g.c)

 *ADB*  *DAC*

 *ABD*  90*o* .

 *BD*

/ / *AC*

Mà *AB*  *AC*

nên *AB*  *BD*

1. *ABD*
2. *ABD*

 *BAC*

 *BAC*

(c.g.c).

(c.g.c)  *AD*

 *BC* .

Mà *AM*

 1 *AD*  *AM*

2

 1 *BC*

2

# Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác Bài 1.** Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

|  |  |
| --- | --- |
| *GD*  ...*BD*; *AG*  ...*GE*;*GD*  ...*BG*; *AE*  ...*AG*;*AE*  ...*GE*. | ***C******D******E******G******A******B***Hình 1 |

**Bài 2.** Cho tam giác *ABC* , các đường trung tuyến *BD* và *CE* cắt nhau ở *G* . Cho biết *BD*  *CE* . Hãy so sánh *GBC* và *GCB* .

# Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

**Bài 1.** Cho tam giác *ABC* , đường trung tuyến *AM* . Gọi *I* là trung điểm *BM* . Trên tia đối của tia *IA* lấy điểm *E* sao cho *IE*  *IA* .

1. Điểm *M* là trọng tâm của tam giác nào?
2. Gọi *F* là trung điểm của *CE* . Chứng minh rằng ba điểm *A*, *M* , *F* thẳng hàng.

**Bài 2.** Cho

*ABC* , *M* là trung điểm *AC* . Trên đoạn *BM* lấy điểm *K* sao cho *KM*

 1 *KB* .

2

Điểm *H* thuộc tia đối của tia *MK* sao cho *BH*  2*BK* . Gọi *I* là điểm thuộc cạnh *AC* và

*IC*  1 *CA* . Đường *KI* cắt *HC* ở *E* .

3

1. Chứng minh *I* là trọng tâm của *HKC* và *E* là trung điểm của *HC* .
2. Tính các tỉ số

*IE* , *IC*

. Chứng minh ba điểm

*H* , *I* , *F* thẳng hàng ( *I* là trung điểm *KC* )

*IK MC*

**Bài 3.** Cho hai đoạn thẳng *AC* và *BD* cắt nhau tại trung điểm *O* của mỗi đoạn. Gọi

*M* , *N* lần

lượt là trung điểm của minh:

*BC*, *CD* . Đoạn thẳng

*AM* , *AN* cắt *BD* lần lượt tại *I* và *K* . Chứng

1. *I* là trọng tâm của

*ABC*

và *K* là trọng tâm của  *ADC* ;

1. *BI*

 *IK*

 *KD* .

**Bài 4.** Cho tam giác *ABC* , đường trung tuyến *BD* . Trên tia đối của tia *DB* lấy điểm *E* sao cho

*DE* 

*BD* . Gọi

*P*, *Q* lần lượt là điểm trên *BE* sao cho *BP*

 *PQ*

 *QE* . Chứng minh:

1. *CP*, *CQ* cắt

*AB*, *AE* tại trung điểm của

*AB*, *AE* .

1. *CP* // *AQ* và *CQ* // *AP* .

# Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

**Bài 1.** Cho tam giác . *ABC* . cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho

*DAE*  *ABD*.

Chứng minh rằng

*DAE*  *ECB*.

**Bài 2.** Cho tam giác *ABC* có các đường trung tuyến *BD* và *CE* bằng nhau. Chứng minh rằng :

*ABC* là tam giác cân.

**Bài 3.** Cho

*ABC*

có ba đường trung tuyến

*AM* , *BN*, *CP* cắt nhau tại *G* . Biết

*AM*  *BN*

 *CP* . Chứng mình

*ABC* đều.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

có ba đường trung tuyến

*AM* , *BN*, *CP* cắt nhau tại G. Biết

*AG*  *BG*

 *CG* . Chứng minh

*ABC* đều.

# ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác Bài 1.**

C

D

G E

A

Hình 1

B

*GD*  1 *BD*; *AG*  2*GE*; 3

*GD*  1 *BG*; *AE*  3 *AG*; 2 2

*AE*  3*GE*.

**Bài 2.** Hình 2. A

D

E

G

C

B

Xét *ABC* có

*BD* và *CE* là 2 đường trung tuyến cắt nhau tại *G* (gt)

 *BG*  2 *BD*;*CG*  2 *CE*

3 3

(Tính chất ba

đường trung tuyến của tam giác).

Hình 2

Mà *BD*  *CE* (gt)  *BG*  *CG* .

Xét ∆ CGB có *BG*  *CG*

giác).

Vậy *GBC*  *GCB* .

(cmt)  *GBC*  *GCB* ( Quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam

# Dạng 2 . Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

**Bài 1.** Hình 4.

A

I

M

F

C

B

E

Hình 4

1. Vì *AM* là đường trung tuyến của *BC* (gt)

 *BM*  *CM* (Tính chất đường trung tuyến).

Mà *BI*  *IM*  1 *BM*

2

( vì *I* là trung điểm của *BM* )

 *CM*  2*IM*

 *CM*  2*CI*  *CM*   *CM*  2 *CI* .

3

Xét *ACE* có

*CI* là đường trung tuyến (vì *AI*  *IE* );

*CM*  2 *CI*

3

Vậy *M* là trọng tâm của

*ACE* ( tính chất ba đường trung tuyến của tam giác)

1. Xét *ACE* có

*AF* là đường trung tuyến của *CE* (vì *F* là trung điểm của *CE* );

*M* là trọng tâm của *ACE*

 *AF* đi qua điểm *M* (tính chất ba đường trung tuyến của tam giác)

Vậy *A*, *F*, *M* thẳng hàng

**Bài 2.**

***A***

***B C***

***H***

***K M***

***I***

***E***

1. *M* là trung điểm *KH* . Suy ra *I* là trọng tâm của

*HKC* . Suy ra *KI* là trung tuyến

*HKC* .

1. *IE*  1 , *IC*

 2 . Suy ra *HI* cũng là trung tuyến

*HKC* .

*IK*

# Bài 3.

2 *MC* 3

***D***

***A***

***K N***

***I O***

***C***

***B M***

1. *ABC*

có hai đường trung tuyến

*BO*, *AM* cắt nhau tại *I* nên *I* là trọng tâm của

*ABC* .

Tương tự ta có *K* là trọng tâm của *ADC* .

1. Từ ý a) suy ra ta có: *BI*

 2 *BO* , DK = 2 DO

3 3

Mặt khác *BO*

 *DO*

 *BI*  *DK*  2 *BO*  1 *BD*

3 3

 *IK*

 1 *BC* .

3

Do đó *BI*

# Bài 4.

 *IK*

 *KD*.

***E***

***A***

***Q N***

***P D***

***C***

***B M***

1. Chứng minh được

*P*, *Q* lần lượt là trọng tâm

*ABC* ,

*AEC* .Suy ra ĐPCM.

1. Chú ý

*ADP*

= *CQD*

và *ADQ*

 *CDP* .

# Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều Bài 1. Hình 5.

***A***

***D G***

***E F***

***B C***

***H***

Vẽ *AF*  *BD*,*CG*  *BD*,*CH*  *AE* .

Vì *ABC* cân tại *A* (gt) nên *AB*  *AC* , *ABC*  *ACB* .

Xét

*ABF* vuông và

*CAH* vuông có

*AB*  *AC* 





*ABF*  *CAH* 

Suy ra *AF*  *CH*

*ABF*  *CAH* ( cạnh huyền – góc nhọn), ( hai cạnh tương ứng) (1).

Do *BD* là đường trung tuyến của *ABC* nên *AD*  *CD* .

Xét

*ADF* vuông và

*CDG*

vuông có

*AD*  *CD* 





*ADF*  *CDG*

( cạnh huyền – góc nhọn),

*ADF*  *CDG*

Suy ra *AF*  *CG* (hai cạnh tương ứng) (2). Từ (1) và (2) suy ra *CH*  *CG* .

Xét

*CEH*

vuông và

*CEG* vuông có

*CH*  *CG* (cmt); *EC* chung

 *CEH*  *CEG* (cạnh huyền – cạnh góc vuông),

Suy ra *CEH*  *CEG* ( hai góc tương ứng).

Ta có *CEG*  *EBC*  *ECB*

(vì *CEG* là góc ngoài của

*BEC* ),

*CEH*  *EAC*  *ECA* (vì *CEH* là góc ngoài của *AEC* ),

Do đó *EBC*  *ECB*  *EAC*  *ECA* (3).

Mặt khác, *EBA*  *EBC*  *ECB*  *ECA* (vì *ABC*  *ACB* ) (4)

Lấy (3) trừ (4) theo từng vế và do *EAC*  *EBA ECB*  *EBA*  *EBA*  *ECB*  *EBA*  *ECB*.

Mà *DAE*  *ABD* (gt)

(gt), ta được :

Vậy *DAE*  *ECB*.

**Bài 2.** Hình 3.

A

D

E

G

C

B

Hình 3

Gọi *G* là giao điểm của *BD* và *CE* nên *EGB*  *DGC* (Hai góc đối đỉnh).

Xét *ABC* có *BD* và *CE* là 2 đường trung tuyến cắt nhau tại *G* (gt)

 *BG*  2 *BD*,*CG*  2 *CE*

3 3

(Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác).

Do *BD*  *CE*

nên

*BG*  *CG*,*GD*  *GE*

Xét

*BGE*

và *CGD*

có :

*GE*  *GD* 



*EGB*  *DGC*   *BGE*  *CGD* (c.g.c)

*BG*  *CG* 



 *BE*  *CD* ( Hai cạnh tương ứng)

Ta có

*BE*  1 *AB*,*CD*  1 *AC*

2 2

(vì *BD* và *CE* là 2 đường trung tuyến)

 *AB*  *AC*. Vậy

# Bài 3.

*ABC*

là tam giác cân.

***B M C***

***A***

***P***

***N***

***G***

Ta có *BN*

 *CP*

nên *GB*

 *GC*, *GP*

 *GN* .

Ta chứng minh *AB*

 *AC* . Tương tự, ta có *AB*

 *BC* .

Vậy *AB*

 *BC*

 *CA*.

Suy ra

# Bài 4.

*ABC* đều.

***B M C***

***A***

***P***

***N***

***G***

Ta có *AG*

 *BG*

 *CG* và *AG*

 2 *AM* , *BG*  2 *BN* , *CG*  2 *CP*

3 3 3

 *AM*

 *BN*

 *CP* . Tương tự Bài 3 suy ra ĐPCM.

# PHIẾU BÀI TẬP

**Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác Bài 1.** Chọn câu sai:

1. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.
2. Các đường trung tuyến của tam giác cắt tại một điểm.
3. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.
4. Một tam giác có hai trọng tâm.

**Bài 2.** Điền số thích hợp vào chỗ trống: “Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng … độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy”

1. 2 . 3
2. 3 . 2

C. 3. D. 2.

**Bài 3.** Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số *BG* ?

*BE*

***A***

***B D C***

***F***

***E***

***G***

**Bài 4.** Cho hình vẽ sau.Tình tỉ số *AG*

?

*GD*

***A***

***B***

***F***

***E***

***G***

**Bài 5.** Tam giác *ABC* có trung tuyến

***D***

*AM*  9cm

***C***

và trọng tâm *G* . Tính độ dài đoạn *AG* ?

**Bài 6.** Cho

*ABC*, *BC*

 *a*, *CA*

 *b*, *AB*

 *c*.

Kẻ trung tuyến

*AM*. Đặt *AM*

 *ma* .

Chứng minh rằng

*b*  *c*  *a*  *m*  *b*  *c*

2 *a* 2

**Bài 7.** Cho

*ABC* có hai đường trung tuyến

*BD*, *CE*

1. Tính các tỉ số

*BG* , *CG BD CE*

1. Chứng minh *BD*
* *CE*
* 3 *BC*

2

**Bài 8.** Cho

*ABC* có

*BC* 

8 *cm* , các đường trung tuyến

*BD*, *CE* cắt nhau tại *G* . Chứng

minh *BD*

* *CE*
* 12 *cm* .

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* có hai đường trung tuyến *BP*, *CQ* cắt nhau tại *G* . Trên tia đối của

tia *PB* lấy điểm *E* sao cho *PE*  *PG* . Trên tia đối của tia *QG* lấy điểm *F* sao cho

*QF*  *QG* . Chứng minh:

a) *GB*

 *GE*, *GC*

 *GE* ; b) *EF*

 *BC* và

*EF* / /*BC* .

**Bài 10.** Cho tam giác *ABC* có hai đường trung tuyến *AD*, *BE* cắt nhau tại *G* . Trên tia

đối của tia *DG* lấy điểm *M* sao cho *D* là trung điểm của đoạn thẳng

*EG* lấy điểm *N* sao cho *E* là trung điểm *GN* . Chứng minh:

*MG*. Trên tia đối của tia

1. *GN*

 *GB*, *GM*

 *GA*;

1. *AN*

 *MB* và *AN*

/ / *MB* .

**Bài 11.** Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

*GD*  ...*BD*; *AG*  ...*GE*; ***C***

*GD*  ...*BG*; *AE*  ...*AG*;

***D***

***E***

***G***

*AE*  ...*GE*.

***A***

***B***

Hình 1

**Bài 12.** Cho tam giác *ABC* , các đường trung tuyến *BD* và *CE* cắt nhau ở *G* . Cho biết

*BD*  *CE* . Hãy so sánh *GBC* và *GCB* .

# Dạng 2.Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

**Bài 1.** Cho hai đường thẳng

*xx* ' *và yy* ' cắt nhau tại *O*. Trên tia *Ox* lấy hai điểm

*A*, *B* sao cho

*A* nằm giữa *O và B*, *AB*  2*OA*. Trên *yy* ' lấy hai điểm *L và M* sao cho *O* là trung điểm của

*LM* . Nối *B* với

*L*, *B* với *M* và gọi *P* là trung điểm của đoạn

*MB*, *Q* là trung điểm của đoạn

*LB* . Chứng minh rằng các đoạn thẳng *LP và MQ* đi qua *A* .

**Bài 2.** Cho

*ABC*

với đường trung tuyến *AD* . Trên tia *AD* lấy điểm *E* sao cho *AD*

 *DE* ,

trên tia *BC* lấy điểm *M* sao cho *BC*  *CM* . Chứng minh *C* là trọng tâm của  *AEM* .

**Bài 3.** Cho

*ABC* . Trên đường trung tuyến *AM* của tam giác đó, lấy hai điểm

*D*, *E* sao cho

*AD*  *DE*

 *EM* . Chứng minh *E* là trọng tâm của

*ABC* .

**Bài 4.** Cho

*ABC* . Vẽ trung tuyến *BM* . Trên tia BM lấy hai điểm

*G*, *K* sao cho

*BG*  2 *BM*

3

và *G* là trung điểm của *BK* . Gọi *E* là trung điểm *CK*; *GE* cắt *AC* tại *I* . Chứng minh: *I* là

trọng tâm của *KGC* .

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* , đường trung tuyến *AM* . Gọi *I* là trung điểm *BM* . Trên tia đối của tia *IA* lấy điểm *E* sao cho *IE*  *IA* .

1. Điểm *M* là trọng tâm của tam giác nào?
2. Gọi *F* là trung điểm của *CE* . Chứng minh rằng ba điểm *A*, *M* , *F* thẳng hàng.

**Bài 6.** Cho

*ABC* , *M* là trung điểm *AC* . Trên đoạn *BM* lấy điểm *K* sao cho *KM*

 1 *KB* .

2

Điểm *H* thuộc tia đối của tia *MK* sao cho *BH*  2*BK* . Gọi *I* là điểm thuộc cạnh *AC* và

*IC*  1 *CA* . Đường *KI* cắt *HC* ở *E* .

3

1. Chứng minh *I* là trọng tâm của *HKC* và *E* là trung điểm của *HC* .
2. Tính các tỉ số

*IE* , *IC*

. Chứng minh ba điểm

*H* , *I* , *F* thẳng hàng ( *I* là trung điểm *KC* )

*IK MC*

**Bài 7.** Cho hai đoạn thẳng *AC* và *BD* cắt nhau tại trung điểm *O* của mỗi đoạn. Gọi *M* , *N* lần

lượt là trung điểm của minh:

*BC*, *CD* . Đoạn thẳng

*AM* , *AN* cắt *BD* lần lượt tại *I* và *K* . Chứng

1. *I* là trọng tâm của

*ABC*

và *K* là trọng tâm của  *ADC* ;

1. *BI*

 *IK*

 *KD* .

**Bài 8.** Cho tam giác *ABC* , đường trung tuyến *BD* . Trên tia đối của tia *DB* lấy điểm *E* sao cho

*DE* 

*BD* . Gọi

*P*, *Q* lần lượt là điểm trên *BE* sao cho *BP*

 *PQ*

 *QE* . Chứng minh:

1. *CP*, *CQ* cắt

*AB*, *AE* tại trung điểm của

*AB*, *AE* .

1. *CP* // *AQ* và *CQ* // *AP* .

**Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều Bài 1.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* ***,*** trung tuyến *AM* ***.*** Chứng minh rằng *AM* vuông góc với

*BC* ***.***

**Bài 2.** Cho

*ABC*

có các đường trung tuyến *BD và CE* bằng nhau. Chứng minh rằng

*ABC* là

tam giác cân.

**Bài 3.** Cho tam giác

*ABC*,

đường trung tuyến

*AM*. Gọi *K* là trung điểm của

*BM* . Trên tia đối

của tia lấy *KA* điểm *E* sao cho *KE*  *KA*.

1. Điểm *M* là trọng tâm của tam giác nào? Vì sao?
2. Gọi *F* là trung điểm của *CE*. Chứng minh rằng ba điểm

*A*, *M* , *F* thẳng hàng.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , trung tuyến *AM* . Trên tia đối của tia *MA* lấy điểm *D* sao cho

*MD*  *MA* .

1. Tính *ABD*
2. Chứng minh

*ABD*

 *BAC* .

1. Chứng minh *AM*

 1 *BC*

2

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho

*DAE*  *ABD*.

Chứng minh rằng

*DAE*  *ECB*.

**Bài 6.** Cho tam giác *ABC* có các đường trung tuyến *BD* và *CE* bằng nhau. Chứng minh rằng :

*ABC* là tam giác cân.

**Bài 7.** Cho

*ABC*

có ba đường trung tuyến

*AM* , *BN*, *CP* cắt nhau tại *G* . Biết

*AM*  *BN*

 *CP* . Chứng mình

*ABC* đều.

**Bài 8.** Cho

*ABC*

có ba đường trung tuyến

*AM* , *BN*, *CP* cắt nhau tại G. Biết

*AG*  *BG*

 *CG* . Chứng minh

*ABC* đều.

# BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác Bài 1.** Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

*GD*  ...*BD*; *AG*  ...*GE*; ***C***

*GD*  ...*BG*; *AE*  ...*AG*;

***D***

***E***

***G***

*AE*  ...*GE*.

***A***

***B***

Hình 1

**Bài 2.** Cho tam giác *ABC* , các đường trung tuyến *BD* và *CE* cắt nhau ở *G* . Cho biết *BD*  *CE*

. Hãy so sánh *GBC* và *GCB* .

# Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

**Bài 1.** Cho tam giác *ABC* , đường trung tuyến *AM* . Gọi *I* là trung điểm *BM* . Trên tia đối của tia *IA* lấy điểm *E* sao cho *IE*  *IA* .

1. Điểm *M* là trọng tâm của tam giác nào?
2. Gọi *F* là trung điểm của *CE* . Chứng minh rằng ba điểm *A*, *M* , *F* thẳng hàng.

**Bài 2.** Cho

*ABC* , *M* là trung điểm *AC* . Trên đoạn *BM* lấy điểm *K* sao cho *KM*

 1 *KB* .

2

Điểm *H* thuộc tia đối của tia *MK* sao cho *BH*  2*BK* . Gọi *I* là điểm thuộc cạnh *AC* và

*IC*  1 *CA* . Đường *KI* cắt *HC* ở *E* .

3

1. Chứng minh *I* là trọng tâm của *HKC* và *E* là trung điểm của *HC* .
2. Tính các tỉ số

*IE* , *IC*

. Chứng minh ba điểm

*H* , *I* , *F* thẳng hàng ( *I* là trung điểm *KC* )

*IK MC*

**Bài 3.** Cho hai đoạn thẳng *AC* và *BD* cắt nhau tại trung điểm *O* của mỗi đoạn. Gọi

*M* , *N* lần

lượt là trung điểm của minh:

*BC*, *CD* . Đoạn thẳng

*AM* , *AN* cắt *BD* lần lượt tại *I* và *K* . Chứng

1. *I* là trọng tâm của

*ABC*

và *K* là trọng tâm của  *ADC* ;

1. *BI*

 *IK*

 *KD* .

**Bài 4.** Cho tam giác *ABC* , đường trung tuyến *BD* . Trên tia đối của tia *DB* lấy điểm *E* sao cho

*DE* 

*BD* . Gọi

*P*, *Q* lần lượt là điểm trên *BE* sao cho *BP*

 *PQ*

 *QE* . Chứng minh:

1. *CP*, *CQ* cắt

*AB*, *AE* tại trung điểm của

*AB*, *AE* .

1. *CP*//*AQ* và *CQ*//*AP* .

# Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

**Bài 1.** Cho tam giác . *ABC* . cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho

*DAE*  *ABD*.

Chứng minh rằng

*DAE*  *ECB*.

**Bài 2.** Cho tam giác *ABC* có các đường trung tuyến *BD* và *CE* bằng nhau. Chứng minh rằng :

*ABC* là tam giác cân.

**Bài 3.** Cho

*ABC*

có ba đường trung tuyến

*AM* , *BN*, *CP* cắt nhau tại *G* . Biết

*AM*  *BN*

 *CP* . Chứng mình

*ABC* đều.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

có ba đường trung tuyến

*AM* , *BN*, *CP* cắt nhau tại G. Biết

*AG*  *BG*

 *CG* . Chứng minh

*ABC* đều.

**CHUYÊN ĐỀ: BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC**

**PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.**

# Tia phân giác của một góc

+ Định nghĩa tia phân giác của góc: Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.

+ Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc gọi là đường phân giác của góc đó.

+ Mọi điểm trên tia phân giác của một góc cách đều hai cạnh của góc đó. Ngược lại, mọi điểm nằm bên trong góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

*O*

*x*

*A*

*M*

z

*B*

*y*

# Đường phân giác của tam giác



* Trong tam giác *ABC* , tia phân giác của góc *A* cắt cạnh *BC* tại điểm *M* thì đoạn thẳng *AM*

gọi là đường phân giác xuất phát từ đỉnh *A* của

* Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

*ABC*

# Tính chất ba đường phân giác của tam giác:

**\* *Định lí*:** Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

*A*

*K*

*L*

*E*

*F*

*I*

*B H C*

# PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

**Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc**

1. **Phương pháp giải:**

Sử dụng các tính chất:

+ Giao điểm của hai đường phân giác của hai góc trong tam giác nằm trên đường phân giác của góc thứ ba.

+ Giao điểm của các đường phân giác của một tam giác cách đều ba cạnh của tam giác

+ Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180

1. **Bài toán.**

**Bài 1.** Tìm x trong mỗi hình vẽ sau biết *CI* và *BI* là hai phân giác của *ACB* và *ABC* , *EH* và

*FH* là hai phân giác của *DEF* và *DFE* .



# Lời giải

1. Ta có

*B* +*C*

 2*IBC* + 2*ICB*  2(*IBC*  *ICB*)  120

= *A*  180  (*B* + *C*)  180 120  60

Mà *BI* , *CI* lần lượt là tia phân giác của *B* và *C* nên *I* là giao điểm của ba đường phân giác

trong *ABC* .

 *AI* là tia phân giác của

*A*  *x*  *A*  30 .

2

1. Ta có

*DEF*

cân tại

*D*  *F*  *E*  2*HEF*  64 .

 *FH*

là tia phân giác của

*DFE*  *x*  DEF  32

2

**Bài 2.** Cho

# Lời giải

*ABC* có

*A*  120. Các đường phân giác

*AD*, *BE*. Tính số đo góc *BED* .

***C***

***x***

***A***

***E***

1

2

1

2

***B D***

Gọi *Ax* là tia đối của *AB*

Ta có:

*BAD*  *DAC*  1 *BAC*  60 (vì *AD* là tia phân giác *BAC* ) nên *CAx*  60

2

Xét

*ABD*

có *AE* là tia phân giác góc ngoài đỉnh *A* , *BE* là tia phân giác của góc *B* và chúng

cắt nhau tại *E* , nên *DE* là tia phân giác góc ngoài của góc *D* .

Mà *EDC* là góc ngoài tại đỉnh *D* của

*BED* , nên

*BED*  *B*2  *EDC* .

Do đó

*BED*  *D*  *B*

 *ADC*  *ABC*  *ABD*  *BAD*  *ABC*  *BAD*  30



2 2 2 2 2

**Bài 3.** Cho

*ABC*

. Gọi *I* là giao điểm của hai đường phân giác kẻ từ góc *B* và *C* . Tính số

đo góc *BIC* trong các trường hợp:

a) *BAC*  80 b) *BAC*  120

# Lời giải



1. *BAC*  80

Ta có *BI* là phân giác của *ABC* . Suy ra

Ta có *CI* là phân giác của *ACB* . Suy ra

*IBC*  1 *ABC*

2

*ICB*  1 *BCA*

2

Xét

*IBC*

có :

*BIC*  *IBC*  *BCI*  180

Suy ra Suy ra Suy ra Suy ra Suy ra Suy ra

Suy ra

*BIC*  1 *ABC*  1 *BCA*  180 2 2

*BIC*  1 *ABC*  *BCA*  180 *BIC*  180  1 *ABC*  *BCA* *BIC*  180 1 180 *BAC* 

2

2

2

*BIC*  90  1 *BAC*

2

*BIC*  90  1 .*a*

2

*BIC*  90  1 .80

2

Suy ra *BIC*  130

1. *BAC*  120

Ta có

Suy ra

*BIC*  90  1 .120

2

*BIC*  150 .

**Bài 4.** Cho *ABC* , các tia phân giác của góc *B* và góc *C* cắt nhau ở *I*

1. Biết
2. Biết

*A*  70 , tính số đo góc *BIC* .

*BIC*  140 , tính số đo góc *A* .

# Lời giải

***A***

***C***

***I***

***B***

1. Xét Do đó,

*ABC* , ta tính được

*IBC*  *ICB*  55 .

*B*  *C*  110 .

Vậy *BIC*  180  55  125 .

1. Xét

*BIC* , từ giả thiết suy ra

*IBC*  *ICB*  40 .

Do đó, ta có: *ABC*  *ACB*  80 .

Vậy *BAC*  100 .

**Bài 5.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Gọi *D* là trung điểm của *BC* ; *E* và *F* lần lượt là chân đường

vuông góc kẻ từ *D* đến

# Lời giải

*AB*, *AC* . Chứng minh rằng *DE*  *DF* .



Xét

*A*

*ABC*

cân tại *A* có *AD* là đường trung tuyến đồng thời cũng là đường phân giác của góc

Ta có

*DE*  *AB*; *DF*  *AC*  *gt* 

Mà *AD* là đường phân giác của góc *A* (chứng minh trên) Suy ra *DE* = *DF*.

**Bài 6.** Cho

*ABC* có

*A*  90 các tia phân giác của *B và C* cắt nhau tại

*I*. Gọi

*D*, *E* là chân

các đường vuông góc hạ từ *I* đến các cạnh

*AB và AC*.

1. Biết *ID*  2cm . Tính *IE* ?
2. Biết

*ID*  *x*  3 ,

*IE*  2*x*  3 . Tìm *x* ?

# Lời giải

***B***

***I***

D

***A E C***

1. Xét

*ABC*

có các tia phân giác của *B và C* cắt nhau tại

*I*. Nên *I* là giao điểm của ba đường

phân giác trong *ABC* , suy ra *AI* là đường phân giác của góc *A* và *I* cách đều ba cạnh của

*ABC* (tính chất ba đường phân giác của tam giác).

Vì *I* là giao điểm của ba đường phân giác trong phân giác của tam giác)

1. Ta có: *IE*  *ID* (chứng minh phần a)

 2*x*  3  *x*  3

 2*x*  *x*  3  3

 *x*  6

*ABC*

nên

*IE*  *ID*  2cm

(tính chất ba đường

**Bài 7.** Cho

*ABC*

gọi *I* là giao điểm của hai tia phân giác góc *A* và góc

*B*. Qua *I* kẻ đường

thẳng song song với *BC* , cắt *AB* tại

# Lời giải

*M* , cắt *AC* tại N. Chứng minh rằng *MN*  *BM*  *CN*

***A***

***B C***

M

***N***

1

***I***

2

2

1

2

**1**

Ba phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm nên *CI* là tia phân giác của góc *C*

Vì *MN* //*BC*

*nên C*1  *I*2

(so le trong)

Mà *C*1  *C*2

nên

*nên C*2  *I*2

Do đó

*NIC*

cân nên

*NC*  *NI*

(1)

Tương tự, ta có:

*MB*  *MI*

(2)

Từ 1 *và*

2 ta có: *MI*  *IN*  *BM*  *CN*

hay *MN*  *BM*  *CN* .