|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **VĨNH PHÚC**  **(ĐỀ ĐỀ XUẤT)** | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **NĂM HỌC: 2022- 2023**  Môn**: TOÁN – LỚP 10**  Thời gian*:* **180** phút (không kể thời gian giao đề)  Đề thi gồm 01 trang, 05 bài |

**Câu 1 (4,0 *điểm*).** Cho  là hai đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn 2023 và thoả mãn

, với mọi 

Tính tổng tất cả các hệ số của đa thức 

**Câu 2 (4,0 *điểm*).** Cho  là các số thực dương thoả mãn  Chứng minh rằng



**Câu 3 (4,0 *điểm*).** Cho *m*,*n* là hai số nguyên dương lẻ sao cho  chia hết cho . Chứng minh rằng  là số chính phương.

**Câu 4 (4,0 *điểm*).** Cho tam giác  nhọn nội tiếp đường tròn  với  Đường tròn nội tiếp  tiếp xúc với các cạnh  lần lượt tại  Gọi *M*  là trung điểm *BC*, đường thẳng *AM* cắt  tại điểm  khác *A*; đường thẳng  cắt  tại  khác *N*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *OMK* cắt  tại điểm thứ hai *T*.

a) Gọi *H* là điểm đối xứng với *D* qua *I* và *J* là giao điểm thứ hai của *KM* và . Chứng minh rằng  thẳng hàng và 

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF* cắt  tại *G*. Chứng minh rằng các đường thẳng đồng quy.

**Câu 5 (4,0 *điểm*).** Một số nguyên dương *m* được gọi là “tốt” nếu tồn tại các số nguyên dương  sao cho  và  Ngược lại thì ta nói số *m* là “xấu”.

a) Chứng minh rằng số nguyên dương *m* là tốt khi và chỉ khi tồn tại hai số nguyên dương  sao cho  và 

b) Tìm số tốt lớn nhất và số xấu nhỏ nhất.

**------Hết-----**

*Thí sinh* ***KHÔNG*** *được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*

*Giám thị* ***KHÔNG*** *giải thích gì thêm.*

|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN**  **VĨNH PHÚC**  **HƯỚNG DẪN CHẤM THI**  **(ĐỀ ĐỀ XUẤT)** | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**  **NĂM HỌC: 2022- 2023**  Môn**: TOÁN – LỚP 10**  Thời gian*:* **180** phút (không kể thời gian giao đề)  Đáp án gồm 05 trang |

**I. HƯỚNG DẪN CHUNG**

1. Giám khảo chấm đúng như đáp án, biểu điểm.

2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.

3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

**II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM**

**Câu 1 (4,0 *điểm*)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung trình bày** | **Điểm** |
| Ta có  (1)  Trong (1) thay *x* bởi *x*+1 ta được : .  Đặt , ta được  (2) | **1,0** |
| Trong (2) thay *x* bởi -*x* ta được :  Hay  (3)  Từ (2) và (3) suy ra  (4) | **1,0** |
| Dễ thấy hai đa thức  nguyên tố cùng nhau nên từ (4) suy ra    Mặt khác  nên ta được . | **1,0** |
| Đặc biệt ta được .  Trong (1) thay  ta được . Do đó , từ đó tìm được , suy ra  Vậy tổng tất cả các hệ số của  bằng | **1,0** |

**Câu 2 (4,0 *điểm*)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung trình bày** | **Điểm** |
| Đặt  thì . Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành :  Xét hiệu | **1,0** |
| Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và giả thiết  ta được: | **1,0** |
| Ta sẽ chứng minh  (2)  Áp dụng Bất đẳng thức Schur’s ta được :  , từ đó suy ra .  Do đó | **1,0** |
| Mặt khác  Vậy (2) được chứng minh. Từ (1) và (2) suy ra , bài toán được chứng minh. | **1,0** |

**Câu 3 (4,0 *điểm*)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung trình bày** | **Điểm** |
| Nếu *m=n* thì ta có ngay điều phải chứng minh  Nếu *m* khác *n*, đặt . Khi đó  Từ suy ra .  Do  (1), .  Ta có  (\*) | **1,0** |
| Coi (\*) là phương trình bậc hai ẩn *x*, có một nghiệm nguyên là *x* nên có một nghiệm nữa là . Ta có . | **0,5** |
| Nếu  thì  là cặp nghiệm thỏa mãn (\*) với , suy ra  Khi đó . Suy ra , mâu thuẫn. | **1,0** |
| Nếu  thì . Ta có    Suy ra , mâu thuẫn. | **1,0** |
| Vậy . Khi đó  và . Do đó  là số chính phương. | **0,5** |

**Câu 4 (4,0 *điểm*)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung trình bày** | **Điểm** |
| **a) (2,0 điểm).** |  |
| Do *H* đối xứng với *D* qua *I* nên *AH* đi qua tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc *A* với *BC* (kết quả cơ bản) | **0,5** |
| Gọi *S* là giao của *AJ* với *BC*. Áp dụng định lý con bướm với hay dây cung *KJ* và *AN* cùng đi qua trung điểm *M* của *BC*, ta suy ra *M* là trung điểm của *DS*, suy ra *S* đối xứng với *D* qua *M*. Vậy *S* là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc *A* với *BC*. Vậy  thẳng hàng. | **0,5** |
| Ta có  (*Mx* là tia đối của tia *MT*). Suy ra *MT* và *MJ* đối xứng nhau qua *OM*. | **0,5** |
| Mà  nên *T* và *J* đối xứng nhau qua *OM*. Khi đó *BCJT* là hình thang cân, suy ra  (đpcm). | **0,5** |
| **b) (2,0 điểm).** |  |
| Do ; . Suy ra  (g.g)  Do đó , suy ra *GD* là phân giác của góc *BGC*. Vậy *GD* đi qua điểm chính giữa *X* của cung nhỏ *BC*. | **0,5** |
| Gọi *Y*,*Z* là điểm chính giữa của cung nhỏ *AC* và *AB* của  Theo kết quả cơ bàn thì  nên *XY* là trung trực *IC*. Suy ra . Tương tự ta được  Như vậy hai tam giác *XYZ* và *DEF* có các cạnh tương ứng song song. Do đó tồn tại 1 phép vị tự tâm *Q* là , biến , do đó biến *I*  thành *O*. Suy ra ba điểm  thẳng hàng. Vậy *OI* và *GD* cắt nhau tại *Q*. | **1,0** |
| Giả sử tia *QA* cắt  tại A’ thì , khi đó *A’HEF* là hình thang cân với *AI* là trục đối xứng của nó, suy ra . Cùng với kết quả phần (a) ta suy ra  thẳng hàng, tức là *AT* đi qua *Q*. Vậy ba đường thẳng đồng quy tại *Q*. | **0,5** |

**Câu 5 (4,0 *điểm*)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung trình bày** | **Điểm** |
| **a) (1,0 điểm).** |  |
| Chiều đảo: Giả sử tồn tại hai số nguyên dương *x*,*y* sao cho  và  Không mất tính tổng quát, giả sử  Suy ra    Đặt  thì  và  Vậy *m* là tốt. | **0,5** |
| Chiều thuận: Giả sử *m* là tốt, khi đó tồn tại các số nguyên dương  sao cho  và  Từ , suy ra . Khi đó biểu diễn được , với  là các số nguyên dương. Từ , suy ra . Từ , suy ra Khi đó  và  Như vậy đã tồn tại cặp  thoả mãn. | **0,5** |
| **b) (3,0 điểm).** |  |
| Tìm số tốt lớn nhất: Giả sử *m* là số tốt, khi đó tồn *x*,*y* nguyên dương sao cho  và  (\*)  Khi đó ta có . Dấu bằng xảy ra khi  Vậy số tốt lớn nhất bằng 576. | **1,0** |
| Tìm số xấu nhỏ nhất:  \* Đầu tiên ta chỉ ra *m*=443 là xấu: Thật vậy, giả sử 443 là tốt, khi đó tồn tại *x*,*y* sao cho :  cho . Vậy . Thử trực tiếp các trường hợp đều cho mâu thuẫn với | **1,0** |
| \* Tiếp theo ta chứng minh mọi số *m*<443 đều là tốt :  Khi *m* thuộc các đoạn  thì đều chọn được (*x*,*y*) thoả mãn điều kiện (\*). Chẳng hạn (*x*,*y*) tương ứng với các đoạn trên là (13,20) ; (13,21)…  Xét . Gọi *t* là số nguyên dương sao cho  Nếu  thì ta chọn , khi đó  và . Do đó *m* tốt  Nếu  thì ta chọn , khi đó  và  Do đó *m* tốt. Vậy số xấu nhỏ nhất là 443.  ***Chú ý***: **Có thể thay cách hỏi khó hơn khi bỏ đi ý (a) của bài toán.** | **1,0** |

**-------Hết-------**