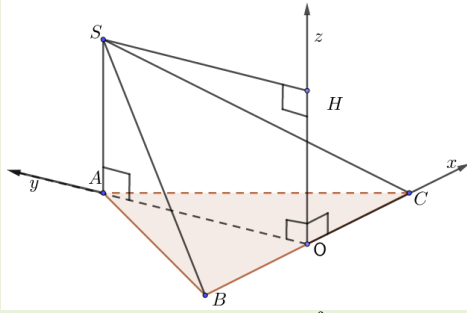


# BÀI TOÁN 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC OXYZ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

## 1. Gắn tọa độ đối với hình chóp

### 1.1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

**Đáy là tam giác đều**



☞ Gọi  $O$  là trung điểm  $BC$ .

Chọn hệ trục như hình vẽ,

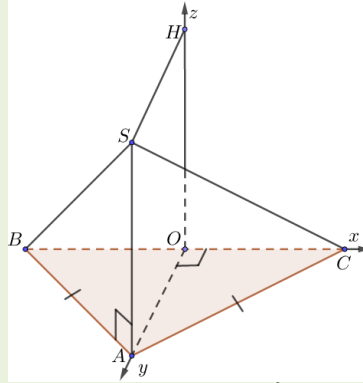
$$AB = a = 1.$$

☞ Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right),$$

$$C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

**Đáy là tam giác cân tại A**



☞ Gọi  $O$  là trung điểm  $BC$ .

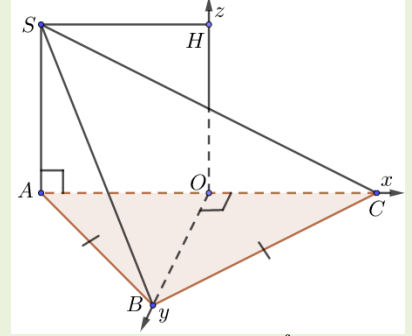
Chọn hệ trục như hình vẽ,  $a = 1$ .

☞ Tọa độ các điểm là:

$$O(0;0;0), A(0;OA;0), B(-OB;0;0),$$

$$C(OC;0;0), S\left(0;OA;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

**Đáy là tam giác cân tại B**



☞ Gọi  $O$  là trung điểm  $AC$ .

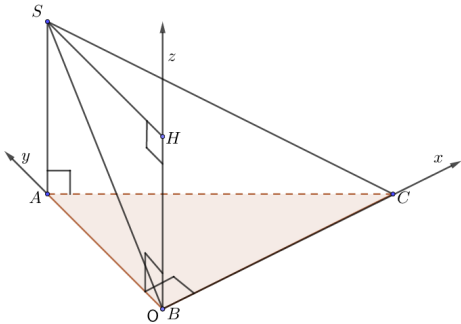
Chọn hệ trục như hình vẽ,  $a = 1$ .

☞ Tọa độ các điểm:  $O(0;0;0)$ ,

$$A(-OA;0;0), B(0;OB;0),$$

$$C(OC;0;0), S\left(-OA;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

**Đáy là tam giác vuông tại B**



☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

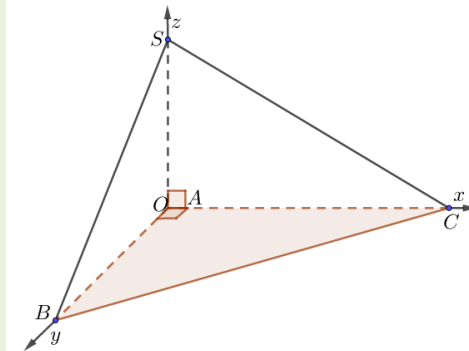
☞ Tọa độ các điểm:

$$B \equiv O(0;0;0),$$

$$A(0;AB;0), C(BC;0;0),$$

$$S\left(0;AB;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

**Đáy là tam giác vuông tại A**



☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

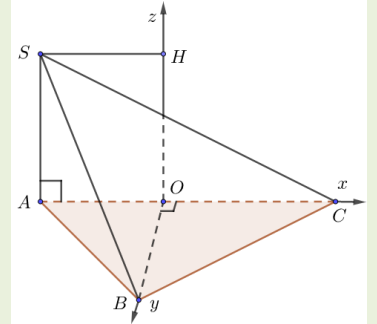
☞ Tọa độ các điểm:

$$A \equiv O(0;0;0)$$

$$B(0;OB;0), C(AC;0;0),$$

$$S(0;0;SA)$$

**Đáy là tam giác thường**



☞ Dựng đường cao  $BO$  của  $\triangle ABC$ . Chọn hệ trục như hình vẽ,

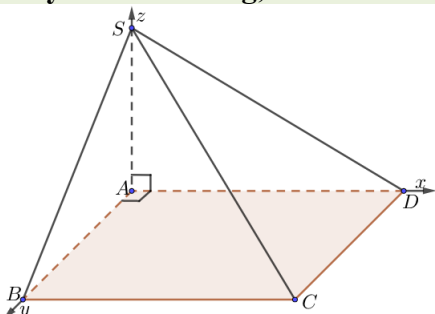
$$a = 1.$$

☞ Tọa độ các điểm:  $O(0;0;0)$ ,

$$A(-OA;0;0), B(0;OB;0),$$

$$C(OC;0;0), S\left(-OA;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

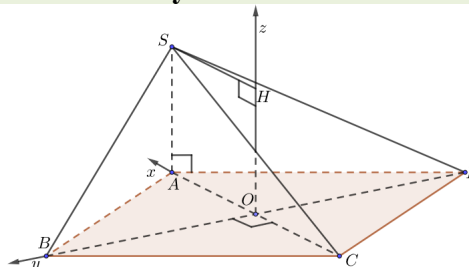
**Đáy là hình vuông, hình chữ nhật**



☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

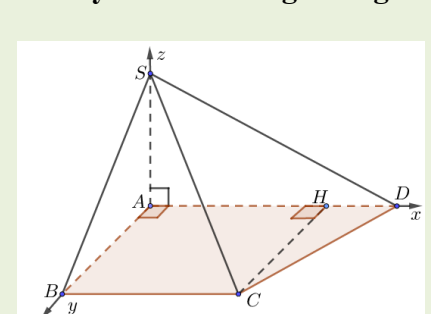
**Đáy là hình thoi**



☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

**Đáy là hình thang vuông**



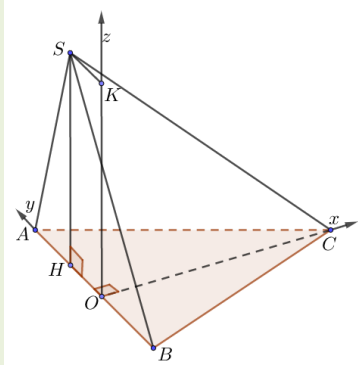
☞ Chọn hệ trục như hình vẽ,

$$a = 1.$$

|                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Tọa độ <math>A \equiv O(0;0;0)</math>,<br/> <math>B(0;AB;0)</math>,<br/> <math>C(AD;AB;0)</math>, <math>D(AD;0;0)</math>, <math>S(0;0;SA)</math></p> | <p>Tọa độ <math>O(0;0;0)</math>,<br/> <math>A(OA;0;0)</math>,<br/> <math>B(0;OB;0)</math>, <math>C(-OC;0;0)</math><br/> <math>D(0;-OD;0)</math>, <math>S\left(OA;0;\frac{OH}{SA}\right)</math></p> | <p>Tọa độ <math>A \equiv O(0;0;0)</math>,<br/> <math>B(0;AB;0)</math>, <math>C(AH;AB;0)</math>,<br/> <math>D(AD;0;0)</math>, <math>S(0;0;SA)</math>.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 1.2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

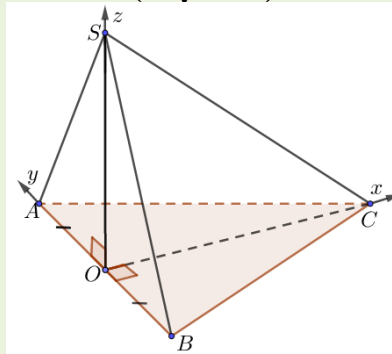
Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



Vẽ đường cao  $CO$  trong  $\triangle ABC$ . Chọn hệ trục như hình,  $a = 1$ .

Ta có:  $O(0;0;0)$ ,  $A(0;OA;0)$ ,  
 $B(0;-OB;0)$ ,  $C(OC;0;0)$ ,  $S\left(0;OH;\frac{OK}{SH}\right)$

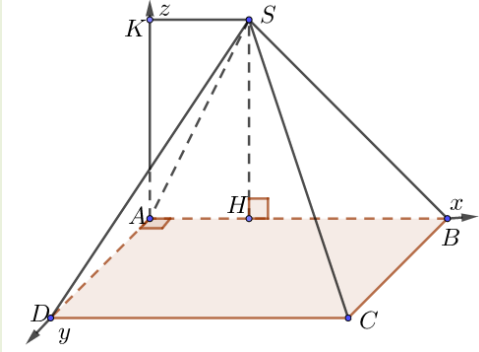
Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình,  $a = 1$ .

Ta có:  $O(0;0;0)$ ,  $A(0;OA;0)$ ,  
 $B(0;-OB;0)$ ,  $C(OC;0;0)$ ,  $S(0;0;SO)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật



Dựng hệ trục như hình, chọn  $a = 1$ .

Ta có:  $A \equiv O(0;0;0)$ ,  $B(AB;0;0)$   
 $C(AB;AD;0)$ ,  $D(0;AD;0)$ ,  $S\left(AH;0;\frac{AK}{SH}\right)$

## 1.3. Hình chóp đều

### Hình chóp tam giác đều

Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và  $a = 1$ . Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0;\frac{AB\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(-\frac{BC}{2};0;0\right),$$

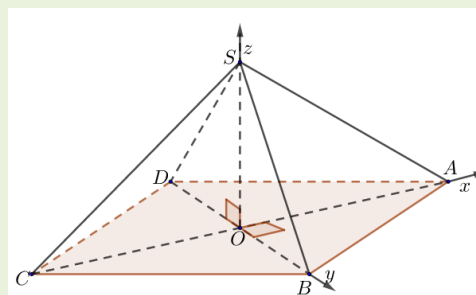
### Hình chóp tứ giác đều

Chọn hệ trục như hình với  $a = 1$ . Tọa độ điểm:  $O(0;0;0)$ ,

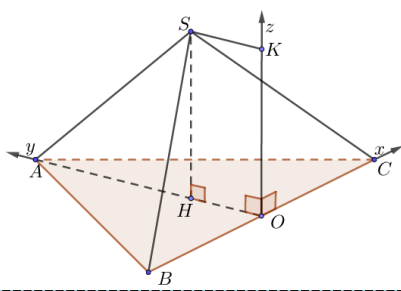
$$A\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right),$$

$$B\left(0;\frac{AB\sqrt{2}}{2};0\right),$$

$$C\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2};0;0\right),$$



$$D\left(0;-\frac{AB\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;SO)$$



$$C\left(\frac{BC}{2}; 0; 0\right),$$

$$S\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; \frac{SK}{2}\right)$$

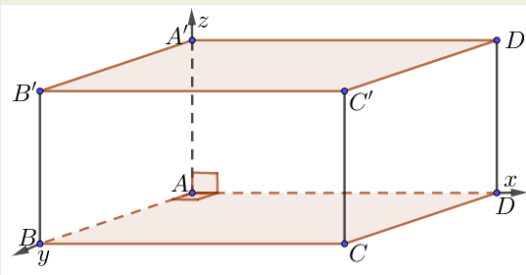
$\square \square \square$   
 $\Rightarrow OH$

## 2. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

### 2.1. Lăng trụ đứng

#### Hình lập phương, hình hộp chữ nhật

Dựng hệ trục như hình vẽ với  $a = 1$ . Tọa độ điểm:



$$A \equiv O(0; 0; 0),$$

$$B(0; AB; 0),$$

$$C(AD; AB; 0),$$

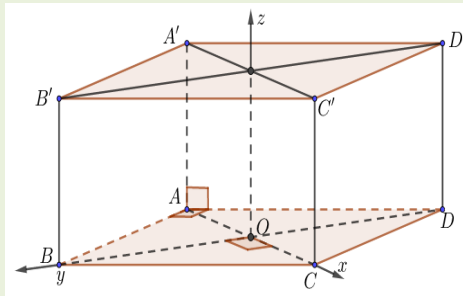
$$D(AD; 0; 0),$$

$$A'(0; 0; AA'),$$

$$B'(0; AB; AA'), C'(AD; AB; AA'), D'(AD; 0; AA').$$

#### Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình vẽ với



$$O(0; 0; 0),$$

$$A(-OA; 0; 0),$$

$$B(0; OB; 0),$$

$$C(OC; 0; 0),$$

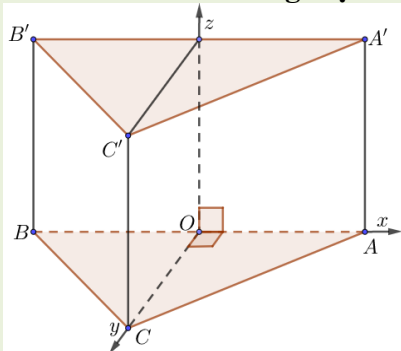
$$D(0; -OD; 0),$$

$$A'(-OA; 0; AA'), B'(0; OB; AA'), C'(OC; 0; CC'),$$

$$D'(0; -OD; DD').$$

#### Lăng trụ tam giác đều

Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với  $a = 1$ . Ta có:



$$O(0; 0; 0), A\left(\frac{AB}{2}; 0; 0\right),$$

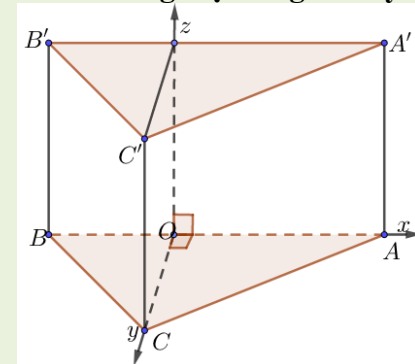
$$B\left(-\frac{AB}{2}; 0; 0\right), C(0; OC; 0),$$

$$A'(OA; 0; AA'),$$

$$B'\left(-\frac{AB}{2}; 0; BB'\right), C'(0; OC; CC').$$

#### Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với  $a = 1$ . Tọa độ điểm là:



$$O(0; 0; 0), A(OA; 0; 0),$$

$$B(-OB; 0; 0),$$

$$C(0; OC; 0),$$

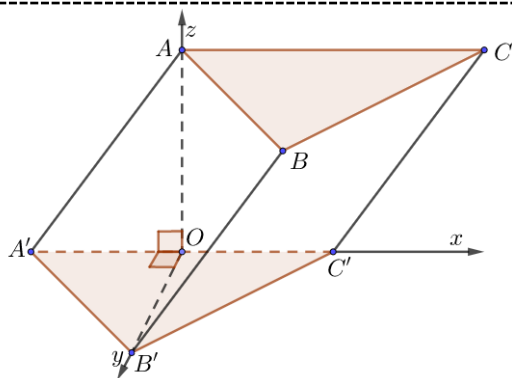
$$A'(OA; 0; AA'),$$

$$B'(-OB; 0; BB'), C'(0; OC; CC').$$

### 2.2. Lăng trụ nghiêng:

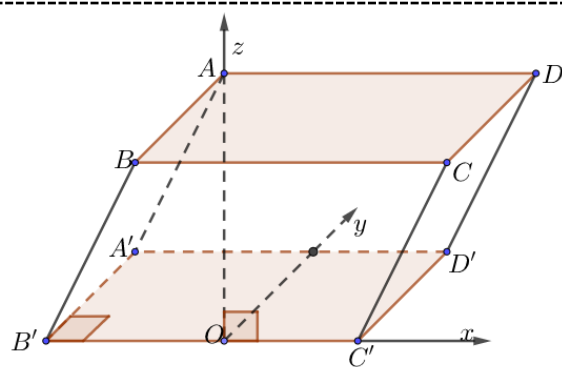
Lăng trụ nghiêng có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy

Lăng trụ nghiêng có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



Đựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm  $O, A', B', C', A$ .

Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau:  $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'}$ .

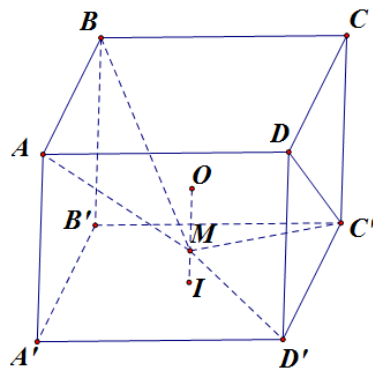


Đựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm  $O, A', B', C', D', A$ .

Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau:  $\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'} = \vec{DD'}$ .

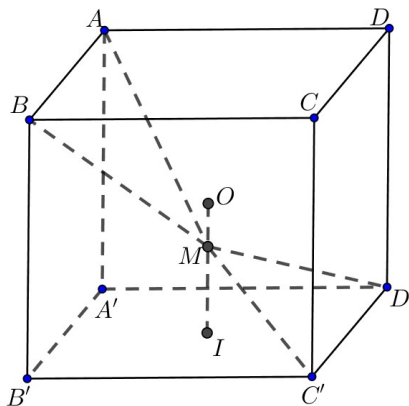
### Dạng 1. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm GÓC

**Câu 1.** (Mã 103 2018) Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là tâm của hình vuông  $A'B'C'D'$  và điểm  $M$  thuộc đoạn  $OI$  sao cho  $MO = 2MI$  (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(MC'D')$  và  $(MAB)$  bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Trả lời: .....

**Câu 2.** (Mã 102 2018) Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là tâm của hình vuông  $A'B'C'D'$  và  $M$  là điểm thuộc đoạn thẳng  $OI$  sao cho  $MO = \frac{1}{2}MI$  (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(MC'D')$  và  $(MAB)$  bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Trả lời: .....

**Câu 3.** (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ , có  $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ , góc giữa  $A'C$  và mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng  $30^\circ$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $A'B$  và  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $A'D$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(AHK)$  và  $(ABB'A')$ .  
Trả lời: .....

**Câu 4.** (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SAB$  là tam giác đều và  $(SAB)$  vuông góc với  $(ABCD)$ . Tính  $\cos \varphi$  với  $\varphi$  là góc tạo bởi  $(SAC)$  và  $(SCD)$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)  
Trả lời: .....

**Câu 5.** (Chuyên Sơn La 2019) Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $SA$  và  $BC$ , biết  $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$  bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)  
Trả lời: .....

**Câu 6.** (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019) Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $a$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(A'B'CD)$  và  $(ACC'A')$  bằng  
Trả lời: .....

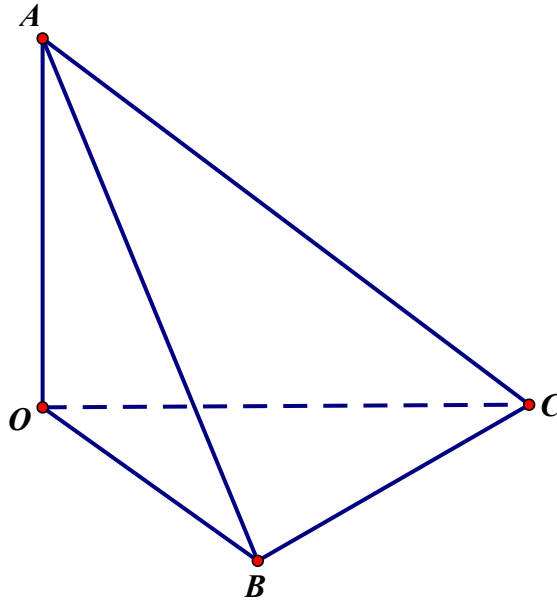
**Câu 7.** (Sở Bắc Ninh -2019) Cho hình chóp  $O.ABC$  có ba cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = OB = OC = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Góc tạo bởi hai vector  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{OM}$  bằng  
Trả lời: .....

**Câu 8.** (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông có độ dài đường chéo bằng  $a\sqrt{2}$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(ABCD)$ . Nếu  $\tan \alpha = \sqrt{2}$  thì góc giữa hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBC)$  bằng  
Trả lời: .....

**Câu 9.** (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $AB = a$ ,  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SCD$ . Góc giữa đường thẳng  $BG$  với đường thẳng  $SA$  bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)  
Trả lời: .....

**Câu 10.** (Chuyên Hà Tĩnh - 2018) Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $A'.ABC$  là tứ diện đều cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AA'$  và  $BB'$ . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(CMN)$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)  
Trả lời: .....

**Câu 11.** (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018) Xét tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc. Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là góc giữa các đường thẳng  $OA, OB, OC$  với mặt phẳng  $(ABC)$  (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$  là?

Trả lời: .....

**Câu 12.** (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ , cạnh bên  $SA = a$  và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SD$ . Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(AMC)$  và  $(SBC)$  bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Trả lời: .....

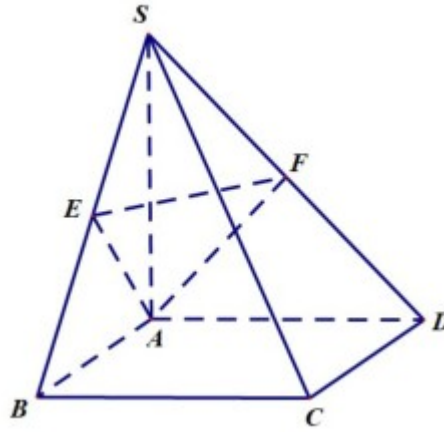
**Câu 13.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB = BC = a, AD = 2a$ . Biết  $SA \perp (ABCD)$ ,  $SA = a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SB$  và  $CD$ . Tính sin góc giữa đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SAC)$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Trả lời: .....

**Câu 14.** Cho khối tứ diện  $ABCD$  có  $BC = 3, CD = 4, \angle ABC = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$ . Góc giữa đường thẳng  $AD$  và  $BC$  bằng  $60^\circ$ . Côsin góc giữa hai phẳng  $(ABC)$  và  $(ACD)$  bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Trả lời: .....

**Câu 15.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SD$ . Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng  $(AEF)$  và  $(ABCD)$  là. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

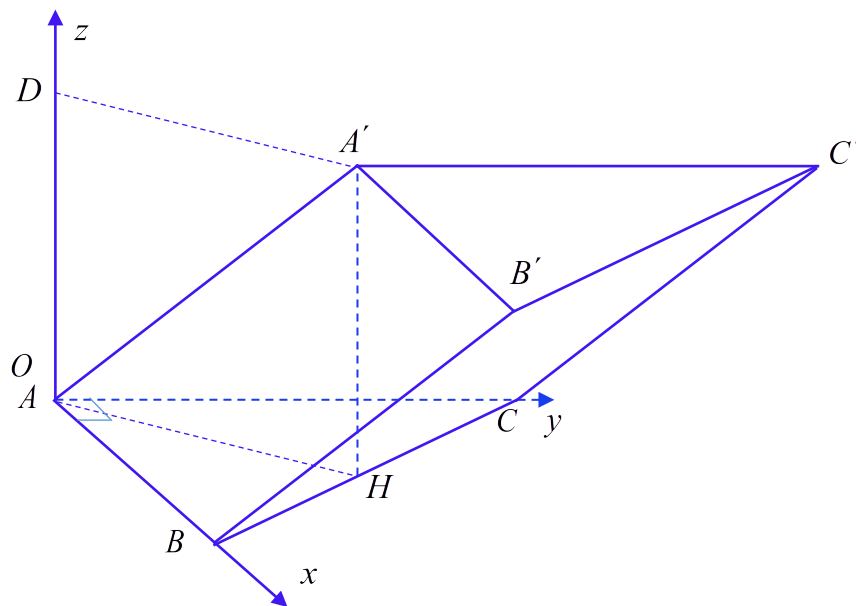


Trả lời: .....

**Câu 16.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ , gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $A'B$  và mặt phẳng  $(BB'D'D)$ . Tính  $\sin \alpha$ .

Trả lời: .....

**Câu 17.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ . Hình chiếu vuông góc của  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm  $H$  của  $BC$ ,  $A'H = a\sqrt{5}$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $B'C$ . Tính  $\cos \varphi$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Trả lời: .....

**Câu 18.** Cho hình hộp đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thoi, tam giác  $ABD$  đều. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $C'D'$ , biết rằng  $MN \perp B'D$ . Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi đường thẳng  $MN$  và mặt đáy  $(ABCD)$ , khi đó  $\cos \alpha$  bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Trả lời: .....

**Câu 19. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định- Lần 1- 2022 - 2023)** Trong không gian với hệ tọa độ

$Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{2}$  và  $\Delta': \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$ . Mặt phẳng

$(P): 2x + my + nz + p = 0$  ( $m; n; p \in \mathbb{R}$ ) chứa đường thẳng  $\Delta$  tạo với đường thẳng  $\Delta'$  một góc lớn nhất.

Khi đó tích của  $m; n; p$  bằng:

Trả lời: .....

## Dạng 2. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm KHOẢNG CÁCH

**Câu 1. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có các kích thước  $AB=4, AD=3, AA'=5$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC'$  và  $B'C$  bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

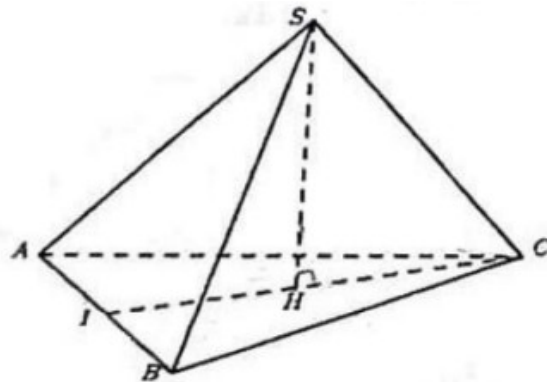
Trả lời: .....

**Câu 2. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Biết  $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ .

Tính khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(CDM)$ . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Trả lời: .....

**Câu 3. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ , hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của  $CI$ , góc giữa  $SA$  và mặt đáy bằng  $45^\circ$  (hình vẽ bên). Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $CG$  bằng bao nhiêu khi  $a=1$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

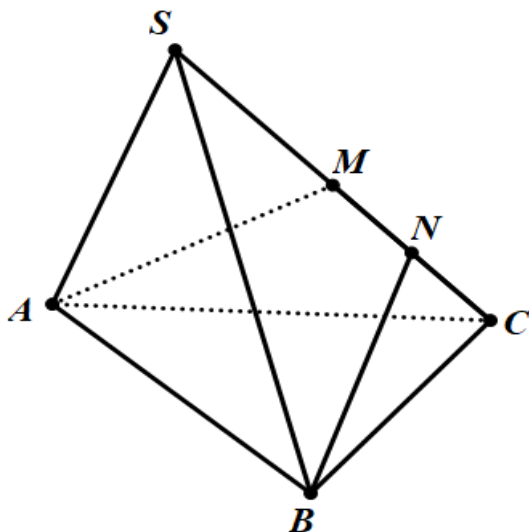


Trả lời: .....

**Câu 4. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng 2018)** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh bằng  $a$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $DD'$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $CK$  và  $A'D$  khi  $a=3$

Trả lời: .....

**Câu 5. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $2a\sqrt{3}$ , mặt bên  $SAB$  là tam giác cân với  $\angle ASB = 120^\circ$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$  và  $N$  là trung điểm của  $MC$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$ ,  $BN$  khi  $a=1$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

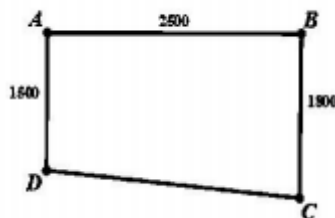


Trả lời: .....

**Câu 6.** (Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019) Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = 1\text{cm}$ ,  $AC = \sqrt{3}\text{cm}$ . Tam giác  $SAB$ ,  $SAC$  lần lượt vuông tại  $B$  và  $C$ . Khối cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  có thể tích bằng  $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$ . Tính khoảng cách từ  $C$  tới  $(SAB)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Trả lời: .....

**Câu 7.** (Chuyên Lam Sơn 2019) Một phần sân trường được định vị bởi các điểm  $A, B, C, D$  như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết  $ABCD$  là hình thang vuông ở  $A$  và  $B$  với độ dài  $AB = 25\text{m}$ ,  $AD = 15\text{m}$ ,  $BC = 18\text{m}$ . Do yêu cầu kỹ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở  $C$  nên người ta lấy độ cao ở các điểm  $B, C, D$  xuống thấp hơn so với độ cao ở  $A$  là  $10\text{cm}$ ,  $a\text{cm}$ ,  $6\text{cm}$  tương ứng. Giá trị của  $a$  bằng?

Trả lời: .....

**Câu 8.** (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho tứ diện  $OABC$ , có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OA = 5, OB = 2, OC = 4$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $OB$  và  $OC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Khoảng cách từ  $G$  đến mặt phẳng  $(AMN)$  là (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

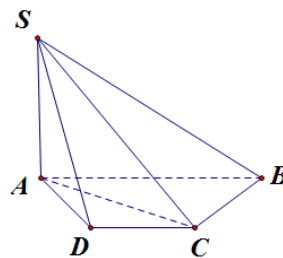
Trả lời: .....

**Câu 9.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $\Delta A'CM$  cân tại  $A'$  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối lăng trụ bằng  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CC'$  khi  $a=1$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)  
 Trả lời: .....

**Câu 10.** (Sở Nam Định 2019) Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ,  $SA \perp (ABCD)$ . Góc giữa  $SB$  và mặt phẳng đáy bằng  $45^\circ$ ,  $E$  là trung điểm của  $SD$ ,  $AB=2a$ ,  $AD=DC=a$ . Tính khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(ACE)$  khi  $a=3$   
 Trả lời: .....

**Câu 11.** (SGD Nghệ An - 2022 - 2023) Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB=AA'=2a$ ,  $AD=4a$ . Khoảng cách từ  $C$  đến mặt phẳng  $(AB'D')$  bằng bao nhiêu khi  $a=3$   
 Trả lời: .....

**Câu 12.** (THPT - Hồng Đức - TP HCM - 2022 - 2023) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang cạnh  $AB=2a$ ,  $AD=DC=CB=a$ ,  $SA=3a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $SB$  bằng bao nhiêu khi  $a=\sqrt{10}$



Trả lời: .....

**Câu 13.** (Chuyên Vinh - Lần 01 - Năm 2022 - 2023) Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(3; 4; 4)$ ,  $B(1; 2; 3)$ ,  $C(5; 0; -1)$ . Điểm  $M$  thay đổi trong không gian thoả mãn  $\angle ABM = \angle AMC = 90^\circ$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Khoảng cách từ  $N$  đến  $(ABC)$  có giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)  
 Trả lời: .....

### Dạng 3. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để giải quyết bài toán tìm THỂ TÍCH, BÁN KÍNH

**Câu 1.** (Mã 102 2018) Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1; 2; 1)$  và đi qua điểm  $A(1; 0; -1)$ . Xét các điểm  $B, C, D$  thuộc  $(S)$  sao cho  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện  $ABCD$  có giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)  
 Trả lời: .....

**Câu 2. (Mã 104 2018)** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1;0;2)$  và đi qua điểm  $A(0;1;1)$ . Xét các điểm  $B, C, D$  thuộc  $(S)$  sao cho  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện  $ABCD$  có giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)  
 Trả lời: .....

**Câu 3. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A$  trùng với gốc tọa độ  $O$ , các đỉnh  $B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b)$  với  $a, b > 0$  và  $a+b=2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $CC'$ . Thể tích của khối tứ diện  $BDA'M$  có giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)  
 Trả lời: .....

**Câu 4. (THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $A'B'$ . Mặt phẳng  $(MND')$  chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm  $C$  gọi là  $(H)$ . Tính thể tích khối  $(H)$  khi  $a=1$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)  
 Trả lời: .....

**Câu 5. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A$  trùng với gốc tọa độ  $O$  các đỉnh  $B(m;0;0), D(0;m;0), A'(0;0;n)$  với  $m, n > 0$  và  $m+n=4$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $CC'$ . Khi đó thể tích tứ diện  $BDA'M$  đạt giá trị lớn nhất bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)  
 Trả lời: .....

**Câu 6. (Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài cạnh bằng 1. Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, C'D', DD'$ . Gọi thể tích khối tứ diện  $MNPQ$  là phân số tối giản  $\frac{a}{b}$ , với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $a+b$ .  
 Trả lời: .....

**Câu 7.** Trong không gian  $Oxyz$ , tập hợp tất cả các điểm thỏa mãn  $|x|+|y|+|z| \leq 2$  và  $|x-2|+|y|+|z| \leq 2$  là một khối đa diện có thể tích bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)  
 Trả lời: .....

**Câu 8. (Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB=1; AD=2; AA'=3$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $C'$  và cắt các tia  $AB; AD; AA'$  lần lượt tại  $E; F; G$  (khác  $A$ ) sao cho thể tích khối tứ diện  $AEFG$  nhỏ nhất. Tổng của  $AE+AF+AG$  bằng.  
 Trả lời: .....

**Câu 9. (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $AB$ , gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $K$  lên  $AD, AC$ . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $K.CDMN$  khi  $a=\sqrt{2}$

Trả lời: .....

**Câu 10. (Chuyên Thái Bình -2019)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SAD$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.CMN$  bằng bao nhiêu khi  $a = \sqrt{93}$

Trả lời: .....

**Câu 11. (Chuyên KHTN - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(5;0;0)$  và  $B(3;4;0)$ . Với  $C$  là điểm nằm trên trục  $Oz$ , gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Khi  $C$  di động trên trục  $Oz$  thì  $H$  luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Trả lời: .....

**Câu 12. (Chuyên Vinh - 2018)** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A, B, C$  (không trùng  $O$ ) lần lượt thay đổi trên các trục  $Ox, Oy, Oz$  và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác  $ABC$  và thể tích khối tứ diện  $OABC$  bằng  $\frac{3}{2}$ . Biết rằng mặt phẳng  $(ABC)$  luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

Trả lời: .....

**Câu 13. (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho 3 đường thẳng  $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ ,  $(d_2): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$ ,  $(d_3): \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{1}$ . Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm  $I(a;b;c)$ , tiếp xúc với 3 đường thẳng  $(d_1), (d_2), (d_3)$ . Tính  $S = a + 2b + 3c$ .

Trả lời: .....

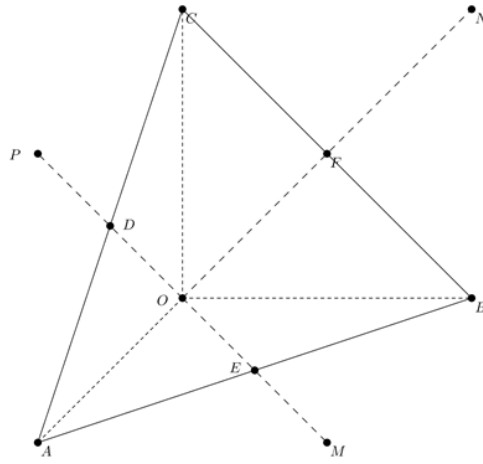
**Câu 14.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AD = 2AB = 2BC = 2a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = 2a$ . Gọi  $E$  là trung điểm cạnh  $AD$ . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.CDE$  khi  $a = \sqrt{11}$

Trả lời: .....

**Câu 15. (SGD Hòa Bình 2023)** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình chữ nhật  $ABCD$  cạnh  $AB = 2a, BC = a, SA$  vuông góc với mặt đáy và cạnh  $SC$  tạo với mặt phẳng  $(ABCD)$  một góc  $\alpha$  có  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là các điểm nằm trên cạnh  $SB, SD$  sao cho  $SB = 2SE, SD = 3SF$ . Thể tích  $V$  của khối tứ diện  $AEFC$  bằng bao nhiêu khi  $a = \sqrt[3]{6}$

Trả lời: .....

**Câu 16. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2023)** Cho tứ diện  $OABC$  vuông tại  $O$  có  $OA = 2a, OB = 3a, OC = 4a$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là điểm đối xứng với điểm  $O$  qua trung điểm ba cạnh  $AB, BC, CA$  của tam giác  $ABC$ .



Thể tích của tứ diện  $OMNP$  bằng bao nhiêu khi  $a = 1$

Trả lời: .....

**Câu 17. (THPT Yên Khánh A - Ninh Bình - 2023)** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ;  $AA' = 4a$ . Điểm  $D$  là trung điểm của  $BB'$ ,  $I$  di động trên cạnh  $AA'$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác  $IDC'$ . Tính giá trị biểu thức  $\sqrt{15m} + \sqrt{51M}$  bằng bao nhiêu khi  $a = \sqrt{2}$

Trả lời: .....

**Câu 18. (THPT Lê Khiết 2023)** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0; 0; \sqrt{3})$  và điểm  $B$  thay đổi thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho diện tích tam giác  $OAB$  bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Gọi  $C$  là điểm trên tia  $Oz$  thỏa mãn  $d[C, AB] = d[C, OB] = k$ . Thể tích của khối tròn xoay tạo bởi tập hợp tất cả các điểm  $M$  mà  $CM \leq k$  bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Trả lời: .....