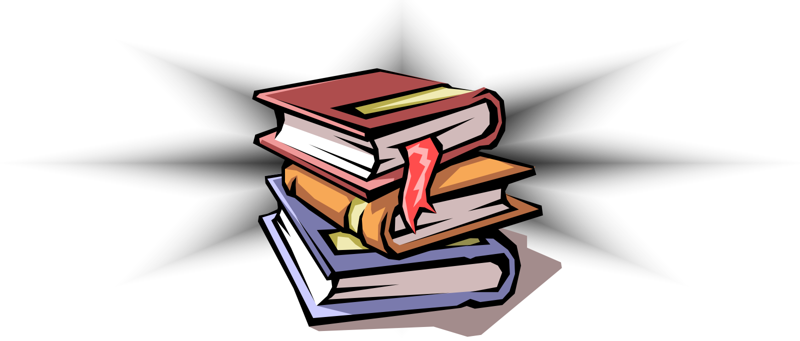
Tailieumontoan.com

Tài liệu sưu tầm



NGUYÊN LÝ DIRICHLET
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Tài liệu sưu tầm, ngày 25 tháng 7 năm 2020

KĨ THUẬT ÁP DỤNG NGUYÊN TẮC DIRICLET ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ ĐẠI SỐ

Nguyễn Minh Sang GV THCS Lâm Thao- Lâm Thao- Phú Thọ

Cơ sở của phương pháp dựa trên nguyên lí DIRICHLET nhà toán học Đức **P.G.Lejeune Dirichlet** (1805-1859) đã nêu ra một định lí mà về sau người ta gọi là ***Nguyên lí Dirichlet,*** nguyên lý được phát biểu như sau:

"Nếu nhốt n con thỏ vào m lồng (m,n $\in$ N ,n>m) thì ta sẽ tìm được một chiếc lồng mà trong đó không ít hơn $\left[\frac{n}{m}\right]+1$ *con thỏ"*

Từ nguyên lí Dirichlet có một mệnh đề có ý nghĩa ứng dụng hết sức quan trọng. Đó là:

Mệnh đề: Trong 3 số thực bất kì x, y, z thì phải có 2 số có tích không âm.

Đây là một mệnh đề rất quan trọng, bởi khi ta đã chọn được *"điểm rơi"* (tức là đẳng thức của bài toán) thì ta có thể áp dụng mệnh đề trên để chứng minh BĐT. Chẳng hạn đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=k$ thì ta có thể giả sử trong 3 số $a-k; b-k; c-k$ có ít nhất 2 số có tích không âm.

Giả sử 2 số $(a-k)$, $(b-k)$ có tích không âm khi đó thì $(a-k)(b-k)\ge 0$

A. Các ví dụ :

I. Áp dụng nguyên tắc DIRICHLET giải bài tập chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 1. *Cho các số thực dương* a, b, c.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$

Lời giải.

Nếu $a=b=c$ thì

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1=2(ab+bc+ca)\Rightarrow 3a^2+2a^3+1=6a^2 \Leftrightarrow 2a^3-3a^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3-2a^2-a^2+a-a+1=0 \Leftrightarrow (a-1)(2a^2-a-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1)=0 \Leftrightarrow a=1$$

Nên dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ có tích không âm.

. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0$ thì

$2c(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow 2abc\ge 2bc+2ca-2c$.

Ta có

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge a^2+b^2+c^2+1+2bc+2ac-2c$$
$$=(a^2+b^2)+(c^2+1)+2bc+2ac-2c$$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq\left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+1\right)+2bc+2ac-2c$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2ab+2c+2bc+2ac-2c=2(ab+bc+ca)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}(a-1)(b-1)=0\\ a=b\\ c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

<u>Ví dụ 2</u>. *Cho x,y, z dương thỏa mãn xyz=1*

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2+x+y+z\geq 2\left(xy+yz+zx\right)$

<u>Lời giải.</u>

Nếu $x=y=z$ thì $\begin{matrix}x^2+y^2+z^2+x+y+z=2\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow 3x^2+3x=6x^2\\ \Rightarrow 3x\left(1-x\right)=0\Leftrightarrow x=1;\left(vi\ x>0\right)\end{matrix}$

Dự đoán điểm rơi $x=y=z=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $\left(x-1\right),\left(y-1\right),\left(z-1\right)$ có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(x-1\right)\left(y-1\right)\geq 0$

Nên $\left(x-1\right)\left(y-1\right)\geq 0\Rightarrow xy-x-y+1\geq 0\Rightarrow xyz\geq xz+yz-z$

Theo BĐT Cauchy : $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$

BĐT (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$x^2+y^2+z^2+x+y+z\geq x^2+y^2+z^2+3\geq 2\left(xy+yz+zx\right)$

Ta có

$x^2+y^2+z^2+3=x^2+y^2+z^2+2xyz+1\geq x^2+y^2+z^2+2\left(xz+yz-z\right)+1$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)+(z^2+1)+2\left(xz+yz-z\right)\geq 2xy+2z+2\left(xz+yz\right)-2z=2\left(xy+yz+zx\right)$

Nên $x^2+y^2+z^2+x+y+z\geq 2\left(xy+yz+zx\right)$ Dấu "=' xảy ra

$\begin{cases}\left(x-1\right)\left(y-1\right)=0\\ x=y=z\\ z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

<u>Ví dụ 3.</u> *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\left(a^2+2\right)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$

<u>Lời giải</u>

$$\left(a^2+2\right)(b^2+2)(c^2+2)=9(ab+bc+ca)\Leftrightarrow\left(a^2+2\right)^3=27a^2$$

Nếu a=b=c $\Leftrightarrow a^6+6a^4+12a^2+8=27a^2$

$$a^6+6a^4-15a^2+8=0\Leftrightarrow\left(a^2-1\right)^2\left(a^2+8\right)=0\Rightarrow a=1;(vi\,a>0)$$

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $a^2-1;b^2-1;c^2-1$ có ít nhất 2 số có tích không âm.

sử 2 số $a^2-1;b^2-1$ nên

$(a^2-1)(b^2-1)\ge 0\Leftrightarrow a^2b^2-a^2-b^2+1\ge 0\Leftrightarrow a^2b^2+2a^2+2b^2+4\ge 3a^2+3b^2+3$

$\Leftrightarrow\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\ge 3\left(a^2+b^2+1\right)\Leftrightarrow\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3\left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)$

Áp dụng BĐT Bunhiacopsky cho 2 dãy

Dãy 1 a , b ,1 dãy 2 : 1 , 1 ,c ta có

$3\left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)\ge 3\left(a+b+c\right)^2\ge 9(ab+bc+ca)$ nên

$\left(a^2+2\right)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}(a^2-1)(b^2-1)=0\\ a=b=c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$ a=b=c=1

<u>Ví dụ 4.</u> *Cho a,b,c không âm . Chứng minh rằng*

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8\ge 5(a+b+c)$$

<u>Lời giải.</u>

Nếu $a=b=c$

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8=5(a+b+c)\Leftrightarrow 6\text{a}^2+a^3+8=15a\Leftrightarrow a^3+6\text{a}^2-15a+8=0$

$\Leftrightarrow\left(a-1\right)^2\left(a+8\right)=0\Rightarrow a=1\,;(vi\;a>0)$

Dự đoán điểm rơi a=b=c=1

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right),\left(b-1\right),\left(c-1\right)$ có tích không âm..

Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0$

$\Rightarrow\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow abc\ge bc+ac-c$.

Nên $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+bc+ac-c+8$ (*)

Ta cần chứng minh

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+bc+ac-c+8\geq 5(a+b+c)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+bc+ac+8\geq 5(a+b)+6c\,(**)$

Ta có

$4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2bc+2ac+16$

$=\left(b+c\right)^2+\left(a+c\right)^2+3\left(a^2+1\right)+3\left(b^2+1\right)+2\left(c^2+1\right)+8=P$

$\Rightarrow P=\left[\left(b+c\right)^2+4\right]+\left[\left(a+c\right)^2+4\right]+3\left(a^2+1\right)+3\left(b^2+1\right)+2\left(c^2+1\right)$

$\Rightarrow P\geq 4(\mathrm{b}+c)+4(\mathrm{a}+\mathrm{c})+6\mathrm{a}+6\mathrm{b}+4c=10a+10b+12c$

$\Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+bc+ac+8\geq 5(a+b)+6c$

Vậy BĐT (**) được chứng minh .Từ (*) & (*) ta có $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+abc+8\geq 5(a+b+c)$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases}(a-1)(b-1)=0\\ b+c=a+c=2\\ a=b=c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

<u>Ví dụ 5.</u> *Cho a, b, c dương abc=1 . Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2(a+b+c)$$

<u>Lời giải.</u>

Nếu $a=b=c$

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3=2(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{3}{a^2}+3=6a\Leftrightarrow 6a^3-3a^2-3=0\Leftrightarrow 2a^3-a^2-1=0$

$\Leftrightarrow (a-1)\left(2a^2+a+1\right)=0\Rightarrow a=1$

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\geq 0$

$\Rightarrow (a-1)(b-1)\geq 0\Rightarrow ab+1\geq b+a\Leftrightarrow 2ab+2c+2\geq 2(a+b+c)$.(1)

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2ab+2c+2$

Ta có

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}+3=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3=\left(a^2b^2+1\right)+c^2\left(a^2+b^2\right)+2\geq 2ab+2c^2ab+2=2ab+2c+2 \ (2)$$

Từ (1) & (2) ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2(a+b+c)$ dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}(a-1)(b-1)=0\\ ab=1\\ abc=1\\ a=b\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$$

<u>Ví dụ 6 .</u> *Cho a,b,c không âm thỏa mãn* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng*

$$9abc+1\geq 4(ab+bc+ca)$$

<u>Lời giải.</u>

Nếu $a=b=c$

$$9abc+1=4(ab+bc+ca)\Rightarrow 9a^3+1=12a^2 \Leftrightarrow 9a^3-12a^2+1=0$$

$$\Rightarrow (3a-1)\left(3a^2-3a-1\right)=0\Rightarrow a=\frac{1}{3};(do\quad a+b+c=1)$$

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(3a-1),(3b-1),(3c-1)$ có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$(3a-1)(3b-1)\geq 0\Leftrightarrow 9ab-3a-3b+1\geq 0\Leftrightarrow 9abc+1\geq 3(ac+bc)-c+1$

Ta phải chứng minh $3(ac+bc)-c+1\geq 4(ab+bc+ca)$ (1)

Vì $1=a+b+c\Rightarrow 1=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

Nên

$$3(ac+bc)-c+1=3(ac+bc)-c+a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\Leftrightarrow 3(ac+bc)-c+1=4(ab+bc+ca)+c(a+b+c)-c+(a-b)^2\geq 4(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 3(ac+bc)-c+1\geq 4(ab+bc+ca) \ (2)$$

Từ (1) & (2) ta có $9abc+1\geq 4(ab+bc+ca)$ Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}(3a-1)(3b-1)=0\\ a+b+c=1\\ a=b\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$$

II. Áp dụng nguyên tắc DIRICHLET giải bài toán tìm cực trị đại số

Ví dụ 1. *Cho các số thực x, y,z thỏa mãn điều kiện xy + yz + zx = 3. Tìm GTNN của biểu thức*

$$A=\left(x^4+2\right)\left(y^4+2\right)\left(z^4+2\right)$$

Lời giải

Nếu $x=y=z$ thì $xy+yz+zx=3\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Dự đoán điểm rơi $x^4=y^4=z^4=1$

Theo nguyên lý *Dirichlet* thì trong 3 số $\left(x^4-1\right)$; $\left(y^4-1\right)$ và $\left(z^4-1\right)$ luôn tồn tại 2 số có tích không âm.

. Không mất tính tổng quát giả sử đó là $\left(x^4-1\right)$ và $\left(y^4-1\right)$.

Suy ra:

$$\left(x^4-1\right)\left(y^4-1\right)\geq 0\Rightarrow x^4y^4\geq x^4+y^4-1\Rightarrow x^4y^4+2x^4+2y^4+4\geq 3x^4+3y^4+3$$

$$\Rightarrow\left(x^4+2\right)\left(y^4+2\right)\geq 3\left(x^4+y^4+1\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^4+2\right)\left(y^4+2\right)\left(z^4+2\right)\geq 3\left(x^4+y^4+1\right)\left(z^4+2\right)$$

Mặt khác theo BĐT Bunhiacopxki ta cũng có:

$$\left(x^4+y^4+1\right)\left(1+1+z^4\right)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\geq\left(xy+yz+zx\right)^2=9$$

Suy ra: $A=\left(x^4+2\right)\left(y^4+2\right)\left(z^4+2\right)\geq 27$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} xy+yz+zx=3 \\ x^4=y^4=1 \\ x^4=y^4=\dfrac{1}{z^4} \end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\pm 1$

Vậy MinA = 27 $\Leftrightarrow x=y=z=\pm 1$.

Ví dụ 2. *Cho ba số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$B=a^2+b^2+c^2+2abc+\frac{18}{ab+bc+ca}.$$

Lời giải

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Xét ba số $a-1,b-1,c-1$ Theo nguyên tắc *Dirichlet* có ít nhất 2 số có tích không âm.

Giả sử : $a-1;b-1$ nên

$(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow ab\ge a+b-1 \Rightarrow abc\ge (a+b-1)c \Rightarrow 2abc\ge 2ac+2bc-2c$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc\ge a^2+b^2+c^2+2ac+2bc-2c$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc\ge (a-b)^2+(c-1)^2+2(ab+bc+ca)-1$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc\ge 2(ab+bc+ca)-1$

Do đó: $B\ge 2(ab+bc+ca)+\dfrac{18}{ab+bc+ca}-1=2\left(ab+bc+ca+\dfrac{9}{ab+bc+ca}\right)-1.$

Với $x,y>0$ ta luôn có $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ nên:

$$ab+bc+ca+\frac{9}{ab+bc+ca}\ge 2\sqrt{(ab+bc+ca)\frac{9}{ab+bc+ca}}=6.$$

Do đó $B\ge 2.6-1=11$. Vậy $Min(B)=11$. Khi

$$\begin{cases}(a-1)(b-1)=0\\ a=b;c=1\\ ab+bc+ca=\dfrac{9}{ab+bc+ca}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$$

Ví dụ 3. *Cho các số thực dương a, b,c thỏa mãn* $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$C=a^2+b^2+c^2+abc$$

Lời giải

Nếu $a=b=c$ *thì* $a+b+c=3\Rightarrow 3a=3\Rightarrow a=1$

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Xét ba số $a-1,b-1,c-1$ Theo nguyên tắc *Dirichlet* có ít nhất 2 số có tích không âm.

Giả sử 2 số là

$a-1,b-1\Rightarrow (a-1)(b-1)\ge 0\Leftrightarrow ab-a-b+1\ge 0\Leftrightarrow abc\ge ac+bc-c$

Nên

$C=a^2+b^2+c^2+abc\ge a^2+b^2+c^2+ac+bc-c$

$2C\ge 2a^2+2b^2+2c^2+2ac+2bc-c=(a+c)^2+(b+c)^2+a^2+b^2-2c$

$2C\ge\left[(a+c)^2+2^2\right]+\left[(b+c)^2+2^2\right]+(a^2+1)+(b^2+1)-2c-10=Q$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2\ge 2xy$ dấu "=" xảy ra khi x=y

$$2C \geq Q \geq 4(a+c)+4(b+c)+2a+2b-2c-10=6(a+b+c)-10=8$$

$$Min(\mathrm{C})=4 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=b-1 \\ a+c=2 \\ b+c=2 \\ a+b+c=3 \\ a=b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$$

<u>Ví dụ 4.</u> *Cho các số không âm* x,y,z *thỏa mãn* $x+y+z=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$D=x^2+y^2+z^2+\frac{9}{2}xyz$$

<u>Lời giải</u>

Nếu $x=y=z \ thi \ x+y+z=1 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Theo nguyên tắc *Dirichlet* trong 3 số $1-3x;1-3y;1-3z$ có ít nhất hai số có tích không âm giả sử $1-3x;1-3y$ nên

$$(1-3x)(1-3y) \geq 0 \Leftrightarrow 9xy-3x-3y+1 \geq 0 \Leftrightarrow 9xyz \geq 3xz+3yz-z$$

Nên

$$D=x^2+y^2+z^2+\frac{9}{2}xyz \geq x^2+y^2+z^2+\frac{3xz}{2}+\frac{3yz}{2}-\frac{z}{2}$$

$$\geq \frac{(x+y)^2}{2}+\frac{3z}{2}(x+y)-\frac{z}{2}+z^2=D'$$

Mà $x+y=1-z$

$$\Rightarrow D \geq D'=\frac{(1-z)^2}{2}+\frac{3z}{2}(1-z)+z^2-\frac{z}{2}=\frac{1-2z+z^2}{2}+\frac{3z}{2}-\frac{3z^2}{2}+z^2-\frac{z}{2}=\frac{1}{2}$$

$$Min(\mathrm{D})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x=0 \\ 1-3y=0 \\ x=y \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$$

<u>Ví dụ 5.</u> Cho a,b,c không âm thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$E=3(ab+bc+ca)-abc$$

<u>Lời giải</u>

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=2$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-2),(b-2),(c-2)$ có tích không âm.Không mất tính tổng quát, giả sử

$$(a-2)(b-2)\ge 0 \Leftrightarrow ab-2a-2b+4\ge 0 \Leftrightarrow abc\ge 2ac+2bc-4c$$

$$\Leftrightarrow E=3(ab+bc+ca)-abc\le 3(ab+bc+ca)-2ac-2bc+4c=3ab+ac+bc-4c$$

$$\Leftrightarrow E=3(ab+bc+ca)-abc\le \frac{3(a+b)^2}{4}+c(a+b)+4c$$

$$\Leftrightarrow E=ab+bc+ca-2abc\le \frac{3(6-c)^2}{4}+c(6-c)+4c=28-\left(\frac{c}{2}-1\right)^2\le 28$$

Max(E)=28 khi $\begin{cases}(a-2)(b-2)=0\\ a=b\\ c=2\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2$

<u>Ví dụ 6.</u> *Cho a,b,c là các số không âm và a + b +c =1*

Tìm giá trị lớn nhất của : $F=ab+bc+ca-3abc$

<u>Lời giải</u>

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Theo nguyên tắc *Dirichlet* trong ba số $2a-1;2b-1;2c-1$ có ít nhất 2 số có tích không âm.

Giả sử $0\le c\le b\le a$ vì a+b+c=1,nên $c<\frac{1}{2}$

Giả sử 2a-1; 2b-1 cùng dấu ta có

$$(2a-1)(2b-1)\ge 0 \Leftrightarrow 4ab-2a-2b+1\ge 0 \Leftrightarrow 4abc\ge 2ac+2bc-c$$

$$\Leftrightarrow abc\ge \frac{ac+bc}{2}-\frac{c}{4}$$

$$F\le ab+bc+ca-3\left(\frac{ac+bc}{2}-\frac{c}{4}\right)=ab-\frac{1}{2}c\left(a+b-\frac{1}{2}\right)\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{1}{2}c\left(a+b-\frac{1}{2}\right)=P$$

$$F\le P=\left(\frac{1-c}{2}\right)^2-\frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}-c\right)$$

Do $\frac{1}{2}>c\ge 0$; nên $\left(\frac{1-c}{2}\right)^2\le 1$; $\frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}-c\right)\ge 0$ Suy ra $P=\left(\frac{1-c}{2}\right)^2-\frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}-c\right)\le\frac{1}{4}$

$$Max(\text{F})=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2a-1=0\\2a-1=0\end{array}\right.\\c=0\\a+b+c=1\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\dfrac{1}{2}\\c=0\end{cases}$$

Do vai trò a,b,c như nhau nên $Max(\text{F})=\frac{1}{4}$ khi có 2 số bằng $\frac{1}{2}$ một số bằng 0

B. Bài tập áp dụng

I. Áp dụng nguyên tắc DIRICHLET giải bài toán chứng minh bất đẳng thức

Bài tập 1. *Cho các số thực dương* a, b, c.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+abc+4\geq 2(ab+bc+ca)$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=2$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-2),(b-2),(c-2)$ có tích không âm.

. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-2)(b-2)\geq 0$ thì

$c(a-2)(b-2)\geq 0\Leftrightarrow abc\geq 2bc+2ca-4c$.

Ta có

$a^2+b^2+c^2+abc+4\geq a^2+b^2+c^2+4+2bc+2ac-4c$

$=(a^2+b^2)+(c^2+4)+2bc+2ac-4c$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq(a^2+b^2)+(c^2+4)+2bc+2ac-4c$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2ab+4c+2bc+2ac-4c=2(ab+bc+ca)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2.$

Bài tập 2. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)\geq 36(ab+bc+ca)$$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=\sqrt{2}$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $a^2-2;b^2-2;c^2-2$ có ít nhất 2 số có tích không âm.

sử 2 số $a^2-2;b^2-2$ nên

$(a^2-2)(b^2-2)\geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2-4a^2-4b^2+16\geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2+4a^2+4b^2+4\geq 6a^2+6b^2+12$

$\Leftrightarrow \left(a^2+4\right)\left(b^2+4\right)\geq 6\left(a^2+b^2+2\right) \Leftrightarrow \left(a^2+4\right)\left(b^2+4\right)\left(c^2+4\right)\geq 6\left(a^2+b^2+2\right)\left(2+2+c^2\right)$

Áp dụng BĐT Bunhiacopsky cho 2 dãy

Dãy 1 a , b , $\sqrt{2}$ dãy 2 : $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$,c ta có

$6\left(a^2+b^2+2\right)\left(2+2+c^2\right)\geq 12\left(a+b+c\right)^2\geq 36(ab+bc+ca)$ nên

$\left(a^2+4\right)(b^2+4)(c^2+4)\geq 36(ab+bc+ca)$

Dấu "=" xảy ra khi a=b=c= $\sqrt{2}$

Bài tập 3 . *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq(a+1)(b+1)(c+1)$$

Hướng dẫn

$a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq(a+1)(b+1)(c+1)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq\left(ab+a+b+1\right)\left(c+1\right)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc+4\geq 2\left(ab+bc+ca\right)+2\left(a+b+c\right)$ (*)

Dự đoán điểm rơi a=b=c=1

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right),\left(b-1\right),\left(c-1\right)$ có tích không âm..

Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\geq 0$

$\Rightarrow\left(a-1\right)\left(b-1\right)\geq 0\Rightarrow abc\geq bc+ac-c$.

Nên $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc+4\geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(bc+ca-c\right)+4$ (1)

Ta chứng minh $2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(bc+ca-c\right)+4\geq 2\left(ab+bc+ca\right)+2\left(a+b+c\right)$

Ta có

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(bc+ca-c\right)+4$

$=\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+1\right)+\left(b^2+1\right)+2\left(c^2+1\right)+2\left(bc+ca-c\right)$

$\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+1\right)+\left(b^2+1\right)+2\left(c^2+1\right)+2\left(bc+ca-c\right)$

$\geq 2ab+2a+2b+4c+2bc+2ac-2c$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(bc+ca-c\right)+4\geq 2\left(ab+bc+ca\right)+2\left(a+b+c\right)$ (2)

Từ (1) &(2) suy ra BĐT (*) được chứng minh hay

$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge(a+1)(b+1)(c+1)$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài tập 4. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

1. $\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\ge3$

Hướng dẫn

Đặt $x=a+\frac{1}{b},y=b+\frac{1}{c},z=c+\frac{1}{a}$ thì BĐT được viết lại thành

$$(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)\ge3$$
$$\Leftrightarrow xy-x-y+1+yz-y-z+1+xz-x-z+1\ge3$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge2(x+y+z)$$

Dự đoán điểm rơi $x=y=z=2$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(x-2),(y-2),(z-2)$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(x-2)(y-2)\ge0$

$\Rightarrow xy+4\ge2x+2y\Rightarrow2(x+y+z)\le2z+xy+4\Leftrightarrow2z+xy+4\ge2(x+y+z)$ (1)

Ta phải chứng minh $xy+yz+zx\ge2z+xy+4$

$xyz=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=abc+\frac{1}{abc}+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$\Leftrightarrow xyz=abc+\frac{1}{abc}+x+y+z\ge2+x+y+z\ge2+2\sqrt{xy}+z$

$\Leftrightarrow z(xy-1)\ge2\left(\sqrt{xy}-1\right)\Rightarrow z\left(\sqrt{xy}-1\right)\ge2\Leftrightarrow z\sqrt{xy}\ge2+z$

$xy+yz+zx=xy+z(x+y)\ge xy+2z\sqrt{xy}=xy+2(z+2)=2z+xy+4$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge2z+xy+4$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$xy+yz+zx\ge2(x+y+z)$ hay $(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)\ge3$

suy ra

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\ge3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$, hay a = b = c = 1.

Bài tập 5 . *Cho các số thực không âm bất kì a, b, c. Chứng minh rằng:*

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]\ge a+b+c$$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ có tích không âm.

. Không mất tính tổng quát, giả sử

$(a-1)(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow ab\ge a+b-1 \Leftrightarrow abc\ge ac+bc-c$.

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]$$

$$\ge ac+bc-c+2+\frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]$$

$$\ge a+b+c \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]\ge(a+b-2)(1-c)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge\frac{(a+b-2)^2}{2}+(c-1)^2\ge\sqrt{2}\left|(a+b-2)(1-c)\right|$$

$$\ge\sqrt{2}(a+b-2)(1-c)$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài tập 6. *Cho 3 số thực a,b,c . Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge 2(ab+bc+ca)$$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a^2=b^2=c^2=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $a^2-1;b^2-1;c^2-1$ có ít nhất 2 số có tích không âm.

giả sử 2 số $a^2-1;b^2-1$ nên $c^2\left(a^2-1\right)(b^2-1)\ge 0\Rightarrow a^2b^2c^2+c^2\ge b^2c^2+c^2a^2$

Thay vào ta có

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge a^2+b^2+2+b^2c^2+c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge\left(a^2+b^2\right)+\left(1+b^2c^2\right)+\left(1+a^2c^2\right)\ge 2(ab+bc+ca)$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\pm 1$

Bài tập 7. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn a+b+c=3. Chứng minh rằng*

$$\left(a+b+ab\right)\left(b+c+cb\right)\left(a+c+ca\right)\ge 27abc$$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(bc-a),(ac-b),(ab-c)$ có tích không âm.

. Không mất tính tổng quát, giả sử $(ac-b)(cb-a)\ge 0 \Leftrightarrow ab-a^2c-bc^2+abc^2$

$(b+c+cb)(a+c+ca)=(3-a+cb)(3-b+ca)$

$=9-3b-3ca-3a+ab-a^2c+3bc-b^2c+abc^2=P$

$P=3(3-b-a+ac+cb)+(\text{ab}-a^2c-b^2c+abc^2)$

$P\ge 3(3-b-a+ab+ac)=3(c+cb+ac)$

Ta chứng minh

Áp dụng Bunhicopsky ta có $(c+ac+bc)(ab+b+a)\ge\left(\sqrt{abc}+\sqrt{abc}+\sqrt{abc}\right)^2=9abc$ nên

$(a+b+ab)(b+c+cb)(a+c+ca)\ge 27abc$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ ab=bc=ca=a=b=c \end{cases} \Rightarrow a=b=c=1$

Bài tập 8. *Cho các số thực dương a,b,c .Chứng minh rằng*

$$16\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge 5(a+b+c+1)^2$$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a^2-\dfrac{1}{4}\right);\left(b^2-\dfrac{1}{4}\right);\left(c^2-\dfrac{1}{4}\right)$ có tích không âm.

Giả sử

$\left(a^2-\dfrac{1}{4}\right);\left(b^2-\dfrac{1}{4}\right)\ge 0\Leftrightarrow a^2b^2-\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{4}b^2+\dfrac{1}{16}\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2+a^2+b^2+1\ge\dfrac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)+\dfrac{15}{16}$

$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\ge\dfrac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)+\dfrac{15}{16}\Leftrightarrow\dfrac{16}{5}\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)$

$\ge\left(4a^2+4b^2+3\right)\left(c^2+1\right)$

Ta chứng minh $\left(4a^2+4b^2+3\right)\left(c^2+1\right)\ge(a+b+c+1)^2$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopsky ta có

$\left(4a^2+4b^2+3\right)\left(c^2+1\right)=\left(4a^2+4b^2+1+2\right)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+c^2+\dfrac{1}{2}\right)\ge(a+b+c+1)^2$

Vậy $16\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge 5\left(a+b+c+1\right)^2$ Dấu"=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

II. Áp dụng nguyên tắc DIRICHLET giải bài toán tìm cực trị đại số.

Bài tập 1. *Cho các số thực dương a, b,c thỏa mãn* $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $G=2(ab+bc+ca)-abc$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Xét ba số $a-1,b-1,c-1$ Theo nguyên tắc *Dirichlet* có ít nhất 2 số có tích không âm.

Giả sử 2 số là

$a-1,b-1\Rightarrow\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Leftrightarrow ab-a-b+1\ge 0\Leftrightarrow -abc\le c-c(a+b)$

Nên

$G=2(ab+bc+ca)-abc\le 2ab+2bc+2ca+c-c(a+b)=2ab+c(b+a)+c=Q$

$$G\le Q\le\frac{(a+b)^2}{2}+c(a+b)+c=\frac{(3-c)^2}{2}+c(3-c)+c=\frac{-c^2+2c+9}{2}=\frac{10-(c-1)^2}{2}\le 5$$

$$\text{Max(G)}=5\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=b-1\\ a=b\\ c=1\\ a+b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$$

Bài tập 2. *Cho các số* $a,b,c\ge 0$ *sao cho* $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=ab+bc+ca-abc$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $\left(a-1\right),\left(b-1\right),\left(c-1\right)$ có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0$

$\Rightarrow c\left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow abc\ge bc+ca-2c$.

Nên $ab+bc+ca-abc\le ab+c$

Mà

$4=a^2+b^2+c^2+abc\ge 2ab+c^2+abc\Rightarrow 4-c^2\ge ab\left(c+2\right)$

$\Rightarrow 2-c\ge ab\Rightarrow ab+c\le 2$

Từ hai BĐT trên ta suy ra Max(H)=2 khi $a=b=c=1$.

Bài tập 3. *Cho các số thực dương* a,b,c *sao cho* $abc=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\dfrac{a+3}{(a+1)^2}+\dfrac{b+3}{(b+1)^2}+\dfrac{c+3}{(c+1)^2}$

Hướng dẫn

Trước tiên ta chứng minh 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1. $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\ge\dfrac{2}{1+a+b+c}+1$

Bổ đề 2. $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}+\dfrac{1}{a+b+c+1}\ge 1$

Chứng minh Bổ đề 1. BĐT tương đương với

$$\frac{3+ab+bc+ca+2(a+b+c)}{2+ab+bc+ca+a+b+c}\ge\frac{3+a+b+c}{1+a+b+c}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 1$$

Mà theo BĐT $AM-GM$ thì $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$

Vậy Bổ đề 1 được chứng minh.

Chứng minh Bổ đề 2. Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ có tích không âm , không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow\dfrac{c+1}{c}=ab+1\ge a+b$.

Ta có $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\ge\dfrac{1}{1+ab}\Leftrightarrow(ab-1)^2+(a-b)^2\ge 0$ (đúng)

Nên $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(b+1)^2}\ge\dfrac{1}{1+ab}=\dfrac{c}{c+1}$

Do đó

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=1$$

Vậy Bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Mà theo bổ đề trên ta có $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{2}{(a+1)^2}+\dfrac{2}{(b+1)^2}+\dfrac{2}{(b+1)^2}$

$$\ge\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{a+b+c+1}+1\ge 2=1=3$$

Vậy Min (K)=3 khi $a=b=c=1$

<u>**Bài tập 4 .**</u>*Cho các số thực dương* a,b,c *thỏa mãn* $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{a^2}{a^2-2a+4}+\dfrac{b^2}{b^2-2b+4}+\dfrac{c^2}{c^2-2c+4}$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1)\geq 0$

Nên $b^2+c^2\leq b^2+c^2+(b-1)(c-1)=1+(b+c-1)^2=1-(2-a)^2$

Ta có

$$\frac{b^2}{b^2-2b+4}+\frac{c^2}{c^2-2c+4}\geq\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2-2(b+c)+8}$$

$$\geq\frac{(3-a)^2}{1+(2-a)^2-2(3-\text{a})+8}=\frac{(3-a)^2}{a^2-2a+7}$$

Ta chứng minh

$$M\geq\frac{(3-a)^2}{a^2-2a+7}+\frac{a^2}{a^2-2a+4}\geq 1\Leftrightarrow(a-1)^2\left(a^2-4a+8\right)\geq 0$$ đúng với mọi a

Vậy Min(M)=1 khi $a=b=c=1$

Bài tập 5. *Cho các số thực dương* a,b,c *thỏa mãn* $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N=a^3+b^3+c^3+8(ab+bc+ca)$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\geq 0\Leftrightarrow ab\geq 2-c$

$$N=a^3+b^3+c^3+8(ab+bc+ca)=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)+8(ab+bc+ca)$$

$$N=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]+c^3+8\left[c(a+b)+ab\right]$$

$$N\leq(a+b)\left[(a+b)^2-3(2-c)\right]+c^3+8\left[c(a+b)+\frac{(a+b)^2}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow N\leq(3-c)\left[(3-c)^2-3(2-c)\right]+c^3+8\left[c(3-c)+\frac{(3-c)^2}{4}\right]=27$$

$$Max(N)=27 \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)(b-1)=0\\ a+b+c=3\\ a=b\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$$

Bài tập 6 . *Cho a,b,c không âm thỏa mãn* $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=ab+bc+ca-2abc$

Hướng dẫn

Dự đoán điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(3a-1),(3b-1),(3c-1)$ có tích không âm.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$(3a-1)(3b-1)\ge 0 \Leftrightarrow 9ab-3a-3b+1\ge 0 \Leftrightarrow 9abc \ge 3ac+3bc-c$$

$$\Leftrightarrow 2abc \ge \frac{2ac}{3}+\frac{2bc}{3}-\frac{2c}{9} \Rightarrow ab+bc+ca-2abc \le ab+bc+ca-\frac{2ac}{3}-\frac{2bc}{3}+\frac{2c}{9}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc \le ab+\frac{1}{3}c(a+b)+\frac{2c}{9} \le \frac{(a+b)^2}{4}+\frac{1}{3}c(a+b)+\frac{2c}{9}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc \le \frac{(1-c)^2}{4}+\frac{1}{3}c(1-c)+\frac{2c}{9}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc \le -\frac{1}{12}c^2+\frac{1}{18}c+\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}\left(c^2-2c\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)+\frac{7}{27}$$

$$=\frac{7}{27}-\frac{1}{12}\left(c-\frac{1}{3}\right)^2 \le \frac{7}{27}$$

$$\text{Max}(Q)=\frac{7}{27} \quad \text{khi } a=b=c=\frac{1}{3}$$

Bài tập 7. *Cho a,b,c dương ,* $abc=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}$$

Hướng dẫn

$$P=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2} \ge \frac{1}{(1+a)^2}+\frac{2}{(1+b)(1+c)}=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{2}{bc+b+c+1}$$

Theo nguyên tắc Dirihlet trong ba số $a-1;b-1;c-1$ có ít nhất 2 số có tích không âm . Giả sử

$$(b-1)(c-1)\ge 0 \Leftrightarrow bc-b-c+1\ge 0 \Leftrightarrow b+c \le bc+1$$

$$P \ge \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{2}{bc+b+c+1} \ge \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{2}{2(bc+1)} = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{abc}{bc+abc}$$

$$= \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{a}{1+a} = \frac{a^2+a+1}{(a+1)^2}$$

Ta có $\frac{a^2+a+1}{(a+1)^2} = \frac{a^2+2a+1-(a+1)+1}{(a+1)^2} = 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2}$

Đặt $\frac{1}{a+1} = x \Rightarrow 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$

dấu "=" khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

Nên $Min(\text{P}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{b+1} = \frac{1}{c+1} \\ (b-1)(c-1) = 0 \\ abc = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$