

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $2^a + 4^b + 8^c = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c$. Giá trị của biểu thức $4^M + \log_M m$ bằng

- A. $\frac{2809}{500}$. *B. $\frac{4096}{729}$. C. $\frac{281}{50}$. D. $\frac{14}{25}$.

Lời giải

Đặt $a = \log_2 x, 2b = \log_2 y, 3c = \log_2 z$.

Ta có $S = a + 2b + 3c = \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = \log_2 (xyz)$.

Mà $2^a + 4^b + 8^c = 4 \Leftrightarrow x + y + z = 4$.

Suy ra $4 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow S = \log_2 (xyz) \leq \log_2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 3 \log_2 \left(\frac{4}{3}\right)$.

Do đó $M = \max S = 3 \log_2 \left(\frac{4}{3}\right)$ khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

Mặt khác, ta có $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy \geq x + y + 1 = 3 - z \Rightarrow xyz \geq z(3-z) \geq 2$ (vì $z \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$).

Suy ra $S \geq 1$, do đó $m = \min S = 1$ khi $x = z = 1, y = 2$.

Vậy $4^M + \log_M m = 4^{3 \log_2 \left(\frac{4}{3}\right)} + \log_{3 \log_2 \left(\frac{4}{3}\right)} 1 = \left(2^{\log_2 \left(\frac{4}{3}\right)}\right)^6 = \left(\frac{4}{3}\right)^6 = \frac{4096}{729}$.

Câu 2. Biết rằng x, y là các số thực dương sao cho 3 số $u_1 = 8^{x+\log_2 y}, u_2 = 2^{x-\log_2 y}, u_3 = 5y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và một cấp số nhân. Khi đó, tích $2^x \cdot y^2$ có giá trị bằng:

- A. 10. B. 5. C. $\sqrt{5}$. *D. 1.

Lời giải

• Điều kiện: $y > 0$;

Theo đề bài, ta có:
$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{(x-\log_2 y)} = 8^{x+\log_2 y} + 5y & (1) \\ 2^{2(x-\log_2 y)} = 8^{x+\log_2 y} \cdot 5y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(8^{x+\log_2 y} + 5y)^2}{4} = 8^{x+\log_2 y} \cdot 5y \Leftrightarrow (8^{x+\log_2 y} - 5y)^2 = 0 \Leftrightarrow 8^{x+\log_2 y} = 5y \quad (2)$$

$$\Rightarrow \log_2 (8^{x+\log_2 y}) = \log_2 5y$$

$$\Leftrightarrow (x + \log_2 y) \cdot \log_2 8 = \log_2 5 + \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 \log_2 y = \log_2 5 + \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 \log_2 y = \log_2 5$$

$$\Leftrightarrow 3x = \log_2 \frac{5}{y^2} \quad (3)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$2.2^{(x - \log_2 y)} = 5y + 5y \Leftrightarrow 2^{(x - \log_2 y)} = 5y \Leftrightarrow x - \log_2 y = \log_2 5y \Leftrightarrow x = \log_2 5y^2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \log_2 \frac{5}{y^2} = 3 \cdot \log_2 5y^2 \Rightarrow \frac{5}{y^2} = (5y^2)^3 \Leftrightarrow y^8 = \frac{1}{25} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

$$\Rightarrow x = \log_2 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \right)^2 = \log_2 \sqrt{5} \Rightarrow 2^x \cdot y^2 = 2^{\log_2 \sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \right)^2 = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			1		-4		0

Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m > -\frac{4}{1011}$

B. $m \geq -\frac{2}{1011}$

*C. $m \geq \frac{f(e)}{3e + 2019}$

D. $m > \frac{f(e)}{3e + 2019}$

Lời giải

• Đầu tiên, ta nhận thấy hàm số $y = e^x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ cho nên hàm số $f(x)$ và hàm số $f(e^x)$ có tính chất giống nhau nên từ bảng biến thiên đã cho ta có thể suy ra tính chất của hàm số $f(e^x)$.

Xét bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ (*). Đặt $t = e^x > 0$, với $x \in (0; 1) \Rightarrow t \in (1; e)$.

$$f(t) < m(3t + 2019) \Leftrightarrow m > \frac{f(t)}{(3t + 2019)} \quad (1)$$

Ta được bất phương trình mới

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{f(t)}{(3t + 2019)} \text{ trên } t \in (1; e), \text{ ta có } g'(t) = \frac{f'(t)(3t + 2019) - 3f(t)}{(3t + 2019)^2}$$

Do hàm số $f(x)$ và hàm số $f(e^x)$ có tính chất giống nhau nên trên khoảng đang được xét thì $f(t) < 0$ và $f'(t) > 0$ với mọi $t \in (1; e) \Rightarrow g'(t) > 0$ với mọi $t \in (1; e)$.

Như vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t) = \frac{f(t)}{(3t + 2019)}$ với $t \in (1; e)$ như sau:

t	1	e
$g'(t)$		+
$g(t)$	$-\frac{2}{1011}$	$g(e)$

Suy ra, Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

$$(1) \text{ đúng với mọi } t \in (1; e) \Leftrightarrow m \geq \max_{t \in [1; e]} g(t) \Leftrightarrow m \geq g(e) \Rightarrow m \geq \frac{f(e)}{3e + 2019}$$

Câu 4. Cho a, b là hai số thực thay đổi thỏa mãn $1 < a < b \leq 2$, biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2 \cdot \log_a(b^2 + 4b - 4) + \log_b^2 a$ là $m + 3\sqrt[3]{n}$ với m, n là số nguyên dương. Tính $S = m + n$.

A. $S = 9$. B. $S = 18$. C. $S = 54$. *D. $S = 15$.

Lời giải

Ta có $b^2 + 4b - 4 \geq b^3 \Leftrightarrow (b-1)(b^2-4) \leq 0$ (điều này đúng vì $1 < b \leq 2$).

Nên $P \geq 2 \cdot \log_a b^3 + \left(\frac{1}{\log_a b - 1} \right)^2 = 6 \log_a b + \left(\frac{1}{\log_a b - 1} \right)^2$.

Đặt $t = \log_a b$. Với $1 < a < b \leq 2$ thì $t > 1$.

Đặt $f(t) = 6t + \left(\frac{1}{t-1} \right)^2$ với $t > 1$ thì $P \geq f(t), t > 1$.

Ta có $f'(t) = 6 + 2 \left(\frac{1}{t-1} \right) \left(- \frac{1}{(t-1)^2} \right) = 6 - \frac{2}{(t-1)^3} = 2 \cdot \frac{3(t-1)^3 - 1}{(t-1)^3}$.

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

t	1	$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$+\infty$
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$+\infty$	$f\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$	$+\infty$

$$f\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = 6 + \frac{6}{\sqrt[3]{3}} + \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)} \right)^2 = 6 + 3\sqrt[3]{9}$$

Ta có

Vậy $m = 6, n = 9 \Rightarrow m + n = 15$.

Câu 5. Có bao nhiêu số nguyên $y \in (-20; 20)$ thỏa mãn $2 + \log_{\sqrt{3}}(3x^2 + 1) \leq \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 9. B. 11. *C. 10. D. 8.

Lời giải

Ta có: $2 + \log_{\sqrt{3}}(3x^2 + 1) \leq \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y) \quad (1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

ĐKXD: $yx^2 - 6x + 2y > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \Delta' = 9 - 2y^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y > \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(3(3x^2+1)) \leq \log_{\sqrt{3}}(yx^2 - 6x + 2y)$$

$$\Leftrightarrow 3(3x^2+1) \leq yx^2 - 6x + 2y \Leftrightarrow (y-9)x^2 - 6x + 2y - 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ bx+c \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9 \\ -6x+15 \geq 0 \quad \forall x \in (\text{Loai}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 9 \\ -2y^2 + 21y - 18 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \geq \frac{21+3\sqrt{33}}{4}$$

$$\text{Do } \begin{cases} y \in (-20; 20) \\ y \in \mathbb{Z} \\ y > \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y \geq \frac{21+3\sqrt{33}}{4} \end{cases} \Rightarrow y \in \{10; 11; \dots; 18; 19\}$$

Vậy có 10 số nguyên y thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ có các đỉnh A, B, C tương ứng nằm trên các đồ thị của các hàm số $y = \log_a x, y = 2\log_a x, y = 3\log_a x$. Biết rằng diện tích hình vuông bằng 36, cạnh AB song song với trục hoành. Khi đó a bằng

A. $\sqrt{6}$.

*B. $\sqrt[6]{3}$.

C. $\sqrt[3]{6}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

• Từ giả thiết đã cho, ta có các đỉnh A, B, C của hình vuông $ABCD$ lần lượt nằm trên các đồ thị $y = \log_a x, y = 2\log_a x, y = 3\log_a x$.

• Do $AB \parallel Ox, AB \perp BC$ nên suy ra $CB \parallel Oy$

Giả sử $A(a^{x_1}; x_1), B(a^{x_2}; 2x_2), C(a^{x_3}; 3x_3)$ ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a^{x_2} - a^{x_1}; 2x_2 - x_1) \\ \overrightarrow{BC} = (a^{x_3} - a^{x_2}; 3x_3 - 2x_2) \end{cases}$$

Do $\begin{cases} CB \parallel Oy \\ AB \parallel Ox \end{cases}$ nên $\begin{cases} 2x_2 - x_1 = 0 \\ a^{x_3} - a^{x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_2 = x_1 = 2x_3 = 2k > 0$

$$A(a^{2k}; 2k), B(a^k; 2k), C(a^k; 3k) \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = (a^k - a^{2k})^2 \\ BC^2 = k^2 \end{cases}$$

Khi đó

• Mà diện tích của hình vuông $ABCD$ bằng 36 nên

$$S_{ABCD} = AB^2 = BC^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = (a^k - a^{2k})^2 = 36 \\ BC^2 = k^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^k - a^{2k} = -6 \\ a^k - a^{2k} = 6 \\ k = \pm 6, k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^k - a^{2k} = -6 \\ a^k - a^{2k} = 6 \\ k = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^6 - a^{12} = -6 \\ a^6 - a^{12} = 6 \\ k = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^6 = 3 \\ a^6 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \sqrt[6]{3}$$

$$2^{a+b+2ab-3} = \frac{1-ab}{a+b}$$

Câu 7. Cho a, b là số thực dương thỏa mãn $2^{a+b+2ab-3} = \frac{1-ab}{a+b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a^2 + b^2$ là:

A. $(\sqrt{5} - 1)^2$.

B. 2.

C. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

*D. $3 - \sqrt{5}$.

Lời giải

• $2^{a+b+2ab-3} = \frac{1-ab}{a+b} \quad (1)$ Điều kiện $ab < 1$

$\Leftrightarrow \log_2 (2^{a+b+2ab-3}) = \log_2 \left(\frac{1-ab}{a+b} \right)$

$\Leftrightarrow a+b+2ab-3 = \log_2 (1-ab) - \log_2 (a+b)$

$\Leftrightarrow (a+b) + \log_2 (a+b) = 1 + \log_2 (1-ab) + (2-2ab)$

$\Leftrightarrow (a+b) + \log_2 (a+b) = (2-2ab) + \log_2 (2-2ab) \quad (2)$

• Xét hàm số đặt trung $f(t) = t + \log_2 t$ với $t > 0$, ta có:

$f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2}, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$(2) \Leftrightarrow f(a+b) = f(2-2ab) \Leftrightarrow a+b = 2-2ab$

• Để có a, b thỏa yêu cầu bài toán thì:

$\begin{cases} (a+b)^2 - 4ab \geq 0 \\ 0 < ab < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2ab)^2 - 4ab \geq 0 \\ 0 < ab < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2 - 3ab + 1 \geq 0 \\ 0 < ab < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < ab \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

• Ta có: $P = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (2-2ab)^2 - 2ab = 4a^2b^2 - 10ab + 4$

• Bảng biến thiên

ab	$-\infty$	0	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
P	$+\infty$		$3-\sqrt{5}$		$+\infty$

• Từ bảng biến thiên ta có $\min P = 3 - \sqrt{5}$

Câu 8. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $e^2 \cdot x - e^y = -\ln x + y - 2, (x > 0)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{y}{x}$ bằng:

*A. e .

B. $\frac{1}{e}$.

C. $2 + \frac{1}{e}$.

D. $2 - \frac{1}{e}$.

Lời giải

• $e^2 \cdot x - e^y = -\ln x + y - 2 \Leftrightarrow e^2 \cdot x - e^y = -\ln(e^2 \cdot x) + y \Leftrightarrow e^2 \cdot x + \ln(e^2 \cdot x) = e^y + \ln(e^y)$

Xét hàm số: $f(t) = t + \ln(t)$ với $t > 0$; $f'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0$ với $\forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến với $\forall t > 0 \Rightarrow e^2 \cdot x + \ln(e^2 \cdot x) = e^y + \ln(e^y) \Leftrightarrow e^2 \cdot x = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^2}$

$$P = \frac{y}{x} = \frac{y}{\frac{e^y}{e^2}} = \frac{e^2 \cdot y}{e^y}$$

Khảo sát hàm số: $P = \frac{e^2 \cdot y}{e^y}$; $P' = \frac{e^2 \cdot e^y - e^2 \cdot y \cdot e^y}{(e^y)^2} = \frac{e^2(1-y)}{e^y}$; $P' = 0 \Leftrightarrow y = 1$.

BBT:

y	$-\infty$	1	$+\infty$
P'	+	0	-
P	$-\infty$	e	0

Vậy: $\max P = e$; khi: $\begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{e} \end{cases}$.

Câu 9. Gọi S là tập hợp các cặp số thực (x, y) thỏa mãn đẳng thức sau đây $2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1}$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu $P = y^2 + 2021x - 3$ với $(x, y) \in S$ đạt được tại (x_0, y_0) . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x_0 \in (-300; -200)$

B. $x_0 \in (-200; -100)$

C. $x_0 \in (-100; 0)$

*D. $x_0 \in (0; 100)$

Lời giải

Đặt $a = 2x - y$. Khi đó

$$2^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{2x-y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{2x-y+1} + 5^{-2x+y+1}$$

$$\Leftrightarrow 2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) = 5(5^a + 5^{-a})$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right) + 3\left(2^a + \frac{1}{3^a}\right) = 5\left(5^a + \frac{1}{5^a}\right) \quad (1)$$

Đặt $\sin \alpha = \frac{2^a + 2^{-a}}{5^a + 5^{-a}}$; $\cos \alpha = \frac{3^a + 3^{-a}}{5^a + 5^{-a}}$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 5 \\ \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2^a + 2^{-a} + 3^a + 3^{-a}}{5^a + 5^{-a}} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\frac{2^a + 3^a}{2} + \frac{2^{-a} + 3^{-a}}{2}}{5^a + 5^{-a}} \leq 2 \cdot \frac{\left(\frac{2+3}{2}\right)^a + \left(\frac{2+3}{2}\right)^{-a}}{5^a + 5^{-a}} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^a + \left(\frac{5}{2}\right)^{-a}}{5^a + 5^{-a}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^a + \left(\frac{5}{2}\right)^{-a}}{2^a \left(\frac{5}{2}\right)^a + 2^{-a} \left(\frac{5}{2}\right)^{-a}} \leq 4 \cdot \frac{\left[\left(\frac{5}{2}\right)^a + \left(\frac{5}{2}\right)^{-a}\right]}{\left[\left(\frac{5}{2}\right)^a + \left(\frac{5}{2}\right)^{-a}\right]} \cdot \frac{1}{2^a + 2^{-a}} = \frac{4}{2^a + 2^{-a}} \leq \frac{4}{2\sqrt{2^a \cdot 2^{-a}}} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 5 \\ \sin \alpha + \cos \alpha \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow y = 2x$$

Câu 10. Cho phương trình $\left(\log_2^2 x - \log_2 \frac{x^3}{4}\right) \sqrt{e^x - m} = 0$. Gọi S là tập hợp giá trị m nguyên với $m \in [-10; 10]$ để phương trình có đúng hai nghiệm. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

*A. -28. B. -3. C. -27. D. -12.

Lời giải

• Ta có: $\left(\log_2^2 x - \log_2 \frac{x^3}{4}\right) \sqrt{e^x - m} = 0$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ m < e^x \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - \log_2 \frac{x^3}{4} = 0 \\ \sqrt{e^x - m} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \\ e^x = m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \\ e^x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \\ e^x = m \end{cases}$

• Ta có:

+ Trường hợp 1: $m \leq 0$.

Khi đó phương trình $e^x = m$ vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $m > 0$.

$\left(\log_2^2 x - \log_2 \frac{x^3}{4}\right) \sqrt{e^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \\ x = \ln m \\ x \geq \ln m \end{cases}$

Để phương trình chỉ có hai nghiệm phân biệt thì: $\begin{cases} 2 \leq \ln(m) < 4 \\ \ln m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^2 \leq m < e^4$

Ngoài ra khi $m = 1$ thì $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (l).

Nên $m = 1, 8, 9, 10$.

Vậy $m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 1; 8; 9; 10\} \Rightarrow \sum m = -28$.

Chọn A.

Câu 11. Số giá trị m nguyên, $m \in [-20; 20]$, sao cho $\min_{x \in [0,3;1]} \left| \frac{\log_{0,3} x^m + 16}{\log_{0,3} x + m} \right| = 16$ là

A. 5. *B. 1. C. 20. D. 40.

Lời giải

• Đặt $t = \log_{0,3} x$.

• Đặt
$$f(x) = \frac{m \log_{0,3} x + 16}{\log_{0,3} x + m} \quad (x > 0)$$

• Khi đó: Xét
$$f(t) = \frac{mt + 16}{t + m} \quad \text{trên đoạn } [0; 1]$$

Từ đó
$$f'(t) = \frac{m^2 - 16}{(t + m)^2}$$

$$f(0) = \frac{16}{m}, \quad f(1) = \frac{m + 16}{m + 1} \quad (\text{Điều kiện } m \neq 0, -1)$$

• Trường hợp 1: $m \in [-20; -4] \Rightarrow f'(t) = \frac{m^2 - 16}{(t + m)^2} > 0, \forall t \in [0; 1]$

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$

Suy ra, $f(0) \leq f(t) \leq f(1) < 0$ nên $|f(0)| \geq |f(t)| \geq |f(1)| > 0, \forall t \in [0; 1]$

Nên
$$\max_{t \in [0; 1]} f(t) = f(1) = \frac{m + 16}{m + 1} < 0 \Rightarrow \min_{t \in [0; 1]} |f(t)| = |f(1)| = \left| \frac{m + 16}{m + 1} \right| (m \neq -1)$$

Mà
$$\left| \frac{m + 16}{m + 1} \right| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \quad (l) \\ m = -\frac{32}{17} \quad (l) \end{cases}$$

• Trường hợp 2: $m \in [-4; 0] \Rightarrow f'(t) = \frac{m^2 - 16}{(t + m)^2} < 0, \forall t \in [0; 1]$

Nên hàm số nghịch biến trên đoạn $[0; 1]$

Suy ra, $0 > f(0) \geq f(t) \geq f(1)$ nên $|f(1)| \geq |f(t)| \geq |f(0)| > 0, \forall t \in [0; 1]$

Nên
$$\max_{x \in [0; 1]} f(x) = f(0) \Rightarrow \min_{x \in [0; 1]} |f(x)| = |f(0)| = \left| \frac{16}{m} \right| (m \neq 0)$$

Mà
$$\left| \frac{16}{m} \right| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \quad (l) \\ m = -1 \quad (l) \end{cases}$$

• Trường hợp 3: $m \in [0; 4] \Rightarrow f'(t) = \frac{m^2 - 16}{(t + m)^2} < 0, \forall t \in [0; 1]$

Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$

Suy ra, $f(0) \geq f(t) \geq f(1) > 0$ nên $|f(1)| \geq |f(t)| \geq |f(0)| > 0, \forall t \in [0; 1]$

Nên
$$\min_{t \in [0; 1]} f(t) = f(1) \Rightarrow \min_{t \in [0; 1]} |f(t)| = |f(1)| = \left| \frac{m + 16}{m + 1} \right| (m \neq -1)$$

Mà
$$\left| \frac{m + 16}{m + 1} \right| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \quad (n) \\ m = -\frac{32}{17} \quad (l) \end{cases}$$

• Trường hợp 4: $m \in [4; 20] \Rightarrow f'(t) = \frac{m^2 - 16}{(t + m)^2} > 0, \forall t \in [0; 1]$

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Suy ra, $0 < f(0) \leq f(t) \leq f(1)$ nên $0 < |f(0)| \leq |f(t)| \leq |f(1)|, \forall t \in [0;1]$.

Nên $\min_{x \in [0;1]} f(t) = f(0) \Rightarrow \min_{x \in [0;1]} |f(t)| = |f(0)| = \left| \frac{16}{m} \right| (m \neq 0)$.

Mà $\left| \frac{16}{m} \right| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(l) \\ m = -1(l) \end{cases}$.

Vậy tổng hợp các trường hợp: $m = 1$ thì thỏa ycbt. Chọn B.

Câu 12. Cho phương trình $\ln(x+m) - e^x + m = 0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 2022.

B. 4042.

C. 2019.

*D. 2021.

Lời giải

Điều kiện: $x + m > 0$.

Đặt $t = \ln(x+m) \Leftrightarrow x+m = e^t$, ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+m = e^t \\ t+m = e^x \end{cases}$.

Suy ra $x - t = e^t - e^x \Leftrightarrow e^x + x = e^t + t$ (*)

Xét hàm số $f(x) = e^x + x$, có $f'(x) = e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Ta thấy (*) có dạng $f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$.

Khi đó ta có phương trình $x+m = e^x \Leftrightarrow m = e^x - x$

Xét hàm số $g(x) = e^x - x$, có $g'(x) = e^x - 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \geq 1$.

Mà $\begin{cases} m \in [-2021; 2021] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên ta có $m \in \{1; 2; \dots; 2020; 2021\}$. Tức là có 2021 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 13. Cho các số thực x, y thỏa mãn $5 + 16.4^{x^2-2y} = (5 + 16^{x^2-2y}).7^{2y-x^2+2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị

lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tính $T = M + m$.

A. $T = 15$.

*B. $T = \frac{19}{2}$.

C. $T = \frac{21}{2}$.

D. $T = 10$.

Lời giải

$$5 + 16.4^{x^2 - 2y} = (5 + 16^{x^2 - 2y}).7^{2y - x^2 + 2} \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 - 2y$, khi đó phương trình (1) trở thành:

$$5 + 16.4^t = (5 + 16^t).7^{2-t}$$

$$\Leftrightarrow 5.7^t + 16.28^t = 49(5 + 16^t)$$

$$\Leftrightarrow 5(7^t - 49) + 16.28^t - 49.16^t = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(7^t - 7^2) + 4^{2t+2} \left[\left(\frac{7}{4} \right)^t - \left(\frac{7}{4} \right)^2 \right] = 0 \Rightarrow t = 2$$

Khi đó: $x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow 2y = x^2 - 2$, thế vào biểu thức P ta được:

$$P = \frac{10x + 3(x^2 - 2) + 26}{2x + x^2 - 2 + 5} = \frac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3} = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 22x - 10}{(x^2 + 2x + 3)^2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 22x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3		$\frac{5}{2}$		7		3

Dựa vào BBT ta có: $M = 7; m = \frac{5}{2}$

$$T = M + m = 7 + \frac{5}{2} = \frac{19}{2}$$

Câu 14. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$(4xy + 7y)(2x - 1)(e^{2xy} - e^{4x+y+7}) = [2x(2 - y) + y + 7] e^y$$

A. 8.

B. 5.

*C. 6.

D. 7.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (4xy + 7y)(2x - 1)(e^{2xy} - e^{4x+y+7}) = [2x(2 - y) + y + 7] e^y$$

$$\Leftrightarrow (4x + 7)(2xy - y)(e^{2xy-y} - e^{4x+7}) = 2x(2 - y) + y + 7 \quad (\text{vì } e^y > 0 \forall y)$$

$$\Leftrightarrow (4x + 7)(2xy - y).(e^{2xy-y} - e^{4x+7}) = (4x + 7) - (2xy - y)$$

$$\Leftrightarrow (4x + 7).[(2xy - y)e^{2xy-y} - 1] = (2xy - y)[(4x + 7)e^{4x+7} - 1]$$

$$\Rightarrow \frac{(2xy - y)e^{2xy-y} - 1}{2xy - y} = \frac{(4x + 7)e^{4x+7} - 1}{4x + 7} \quad \text{với } x \neq -\frac{7}{4}; x \neq -\frac{1}{2}; y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2xy-y} - \frac{1}{2xy-y} = e^{4x+7} - \frac{1}{4x+7}$$

$$\text{Xét } f(t) = e^t - \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$$

$$\Rightarrow f'(t) = e^t + \frac{1}{t^2} > 0 \quad \forall t \neq 0$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên các khoảng xác định

$$\Rightarrow f(2xy - y) = f(4x + 7)$$

$$\text{TH1: } (2xy - y) \cdot (4x + 7) < 0$$

Giả sử $2xy - y < 0$ và $4x + 7 > 0$. Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2xy - y \leq -1$ và $4x + 7 \geq 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2xy - y) \leq f(-1) = 1 - \frac{1}{e} < 1 \\ f(4x + 7) \geq f(1) = e - 1 > 1 \end{cases} \quad \text{Do đó, } f(2xy - y) \neq f(4x + 7)$$

$$\text{TH2: } (2xy - y) \cdot (4x + 7) > 0$$

$$f(2xy - y) = f(4x + 7)$$

$$\Leftrightarrow 2xy - y = 4x + 7$$

$$\Rightarrow y = \frac{4x + 7}{2x - 1} = 2 + \frac{9}{2x - 1}$$

Theo bài, $y \in \mathbb{Z}$ nên $2x - 1 \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\} \Rightarrow x \in \{-4; -1; 0; 1; 2; 5\}$.

Câu 15. Cho a, b, c là ba số thực dương đôi một phân biệt. Có bao nhiêu bộ $(a; b; c)$ thỏa mãn: $a^{b+2} \leq b^{a+2}$; $b^{c+2} \leq c^{b+2}$; $c^{a+2} \leq a^{c+2}$

A. 1.

B. 3.

C. 6.

*D. 0.

Lời giải

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{\ln x}{x+2},$$

$$\text{Ta có: } a^{b+2} \leq b^{a+2} \Leftrightarrow (b+2)\ln a \leq (a+2)\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a+2} \leq \frac{\ln b}{b+2} \Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \quad (1)$$

$$b^{c+2} \leq c^{b+2} \Leftrightarrow (c+2)\ln b \leq (b+2)\ln c \Leftrightarrow \frac{\ln b}{b+2} \leq \frac{\ln c}{c+2} \Leftrightarrow f(b) \leq f(c) \quad (2)$$

$$c^{a+2} \leq a^{c+2} \Leftrightarrow (a+2)\ln c \leq (c+2)\ln a \Leftrightarrow \frac{\ln c}{c+2} \leq \frac{\ln a}{a+2} \Leftrightarrow f(c) \leq f(a) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $f(a) = f(b) = f(c)$

Mà a, b, c dương phân biệt nên để tồn tại bộ ba số $(a; b; c)$ thì phải tồn tại số thực m sao cho đường thẳng

$y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$ tại ba điểm phân biệt hay phương trình $\frac{\ln x}{x+2} = m \quad (*)$ có ba nghiệm dương phân biệt.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1 + \frac{2}{x} - \ln x}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} \left(1 + \frac{2}{x} - \ln x \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = \ln x \quad (**)$$

Mặt khác trên $(0; +\infty)$ hàm số $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ là hàm nghịch biến, $h(x) = \ln x$ đồng biến nên phương trình $(**)$ có không quá một nghiệm, suy ra hàm số $f(x)$ có không quá một cực trị suy ra với mọi giá trị của m , đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ không quá hai điểm suy ra phương trình $(*)$ có không quá hai nghiệm, hay không tồn tại bộ ba số $(a; b; c)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 16. Xét các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_3(1+ab) = \frac{1}{2} + \log_3(b-a)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)}$$

bằng

A. 1.

*B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Cách 1

Điều kiện $b > a$.

Ta có: $\log_3(1+ab) = \frac{1}{2} + \log_3(b-a) \Leftrightarrow \log_3(1+ab) = \log_3 \sqrt{3}(b-a) \Leftrightarrow 1+ab = \sqrt{3}(b-a)$

$$\Leftrightarrow 3(b-a)^2 = 1+a^2b^2+2ab \geq 4ab \Leftrightarrow 3\left(\frac{b}{a}-1\right)^2 \geq 4\frac{b}{a} \Leftrightarrow 3\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 10\frac{b}{a} + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} \geq 3 \\ \frac{b}{a} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} \geq 3 \end{cases} \quad b > a \Rightarrow \frac{b}{a} > 1 \quad (\text{vì}).$$

$$P = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)} = \frac{1+a^2b^2+(a+b)^2-2ab}{a(a+b)} = \frac{4(a+b)^2-16ab}{a(a+b)}$$

$$= \frac{4(a+b)}{a} - \frac{16b}{(a+b)} = 4\left(1+\frac{b}{a}\right) - \frac{16}{\left(\frac{a}{b}+1\right)}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{b}{a}, t \geq 3. \text{ Ta có: } P = 4(1+t) - \frac{16}{\frac{1}{t}+1} = 4+4t - \frac{16t}{t+1}$$

Xét hàm số $f(t) = 4+4t - \frac{16t}{t+1}$ trên $[3; +\infty)$, ta có:

$$f'(t) = \frac{16}{(t+1)^2} - \frac{4}{t^2} = \frac{4[4t^2 - (t+1)^2]}{(t+1)^2} = \frac{4(t-1)(3t+1)}{(t+1)^2} > 0 \quad \forall t \geq 3$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[3; +\infty)$.

$$\text{Vậy: } P_{\min} = \min_{[3; +\infty)} f(t) = f(3) = 4$$

$$\begin{cases} \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)} = 4 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1+a^2)(1+9a^2)}{4a^2} = 4 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi

Cách 2

Đặt $a = \tan \alpha$, $b = \tan \beta$ $\left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$.

Ta có: $\log_3(1+ab) = \frac{1}{2} + \log_3(b-a) \Leftrightarrow \log_3(1+ab) = \log_3 \sqrt{3}(b-a)$

$$\Leftrightarrow 1+ab = \sqrt{3}(b-a) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b-a}{1+ab}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \tan(\beta - \alpha) \Leftrightarrow \beta - \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Khi đó:
$$P = \frac{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta)}{\tan \alpha (\tan \alpha + \tan \beta)} = \frac{1}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \tan \alpha (\tan \alpha + \tan \beta)}$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha \cos \beta (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)} = \frac{2}{[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \sin(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{2}{\left[\sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \right] \sin(\alpha + \beta)} = \frac{4}{2 \sin^2(\alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta)}$$

Đặt $t = \sin(\alpha + \beta)$.

Vi $\begin{cases} \beta = \alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{3} \\ \alpha + \beta = 2\alpha + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha + \beta < \frac{5\pi}{6}$, suy ra $t \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right]$

Suy ra $P = f(t) = \frac{4}{2t^2 - t}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{2t^2 - t}$ trên $\left(\frac{1}{2}; 1 \right]$, ta có: $f'(t) = \frac{4(1-4t)}{(2t^2 - t)^2} < 0 \quad \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right]$

Suy ra: $f(t)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; 1 \right]$.

Vậy $P_{\min} = \min_{\left(\frac{1}{2}; 1 \right]} f(t) = f(1) = 4$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \\ \beta - \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \sin(\alpha + \beta) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \\ \beta - \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \beta = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$

Cách 3

Điều kiện: $b > a > 0$.

$$\log_3(1+ab) = \frac{1}{2} + \log_3(b-a) \Leftrightarrow 1+ab = \sqrt{3}(b-a) \Leftrightarrow 1+a^2b^2+2ab = 3(b-a)^2$$

Mà $1+a^2b^2 \geq 2ab$ nên $3(b-a)^2 = 1+a^2b^2+2ab \geq 4ab \Rightarrow 3\left(\frac{b}{a}-1\right)^2 \geq 4\frac{b}{a}$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 10\frac{b}{a} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} \leq \frac{1}{3} \\ \frac{b}{a} \geq 3 \end{cases}. \text{ Vì } b > a \text{ nên } \frac{b}{a} > 1, \text{ do đó loại trường hợp } \frac{b}{a} \leq \frac{1}{3}.$$

$$P = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)} = \frac{1+a^2b^2+a^2+b^2}{a(a+b)} \geq \frac{2ab+a^2+b^2}{a(a+b)} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} \geq 4$$

Ta có

$$\text{Vậy min } P = 4 \text{ khi } \begin{cases} ab = 1 \\ \frac{b}{a} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Câu 17. Xét tất cả các số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{x+y}{10} + \log\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right) = 1 + 2xy$. Khi biểu thức $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất, tích xy bằng

- A. $\frac{9}{200}$. *B. $\frac{1}{64}$. C. $\frac{9}{100}$. D. $\frac{1}{32}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x+y}{10} + \log\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right) = 1 + 2xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{10} + \log\left(\frac{x+y}{2xy}\right) = 1 + 2xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{10} + \log(x+y) - 1 = 2xy + \log(2xy)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{10} + \log\left(\frac{x+y}{10}\right) = 2xy + \log(2xy) \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log t \quad (t > 0)$

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 10} > 0, \forall t > 0 \quad \text{nên hàm số } f \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Vậy } (1): f\left(\frac{x+y}{10}\right) = f(2xy) \Leftrightarrow \frac{x+y}{10} = 2xy \Leftrightarrow y = \frac{x}{20x-1}$$

$$\text{Ta có: } \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{(20x-1)^2}{x^2} = \frac{400x^2 - 40x + 5}{x^2} = 400 - \frac{40}{x} + \frac{5}{x^2} = 5\left(\frac{1}{x} - 4\right)^2 + 320 \geq 320$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{16} \Rightarrow xy = \frac{1}{64}$$

Đẳng thức xảy ra

Câu 18. Cho phương trình $\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x) + (m^2-2)\log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}-x) - 1 = 0$ với m là tham số thực.

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{\sqrt{x_1^2+1}-x_1}{\sqrt{x_2^2+1}+x_2} = 7+4\sqrt{3}$$

. Tích các phần tử của S bằng

- A. -4 . *B. 4 . C. 0 . D. 2 .

Lời giải

Ta có: $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ và $\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

$$\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x)+(m^2-2)\log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}-x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x)-(m^2-2)\log_{2+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x)+(m^2-2)\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x)-1=0 \quad (*)$$

Đặt $t=\log_{2+\sqrt{3}}(\sqrt{x^2+1}+x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=(2+\sqrt{3})^t$, ta có

$$t'=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)\ln(2+\sqrt{3})}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)=\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})\sqrt{x^2+1}}>0; \forall x$$

Khi đó phương trình $(*)$ đã cho trở thành: $t^2+(m^2-2)t-1=0$

Yêu cầu bài toán tương đương: Phương trình $t^2+(m^2-2)t-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn

$$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{t_1}(2+\sqrt{3})^{t_2}}=7+4\sqrt{3} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{-(t_1+t_2)}=(2+\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow t_1+t_2=-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2-m^2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-2)^2+4 > 0 \\ m=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=\pm 2$$

Vậy $S=[-2; 2]$. Tích các phần tử của S là: -4 .

Câu 19. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \cdot 4^x - b \cdot 2^x + 50 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b \cdot 3^x + 50a = 0$ (2) có hai nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn điều kiện $x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 4b$.

*A. 109.

B. 51.

C. 49.

D. 87.

Lời giải

Đặt $u = 2^x > 0$ thì phương trình (1) trở thành $a \cdot u^2 - b \cdot u + 50 = 0$ (3). Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 tương đương phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt dương u_1, u_2 , nghĩa là

$$\begin{cases} b^2 - 200a > 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \\ \frac{50}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 > 200a$$

(vì a, b là số nguyên dương).

Đặt $v = 3^x > 0$ thì phương trình (2) trở thành $v^2 - b \cdot v + 50a = 0$ (4). Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 tương đương với phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt dương v_3, v_4 , nghĩa là

$$\begin{cases} b^2 - 200a > 0 \\ b > 0 \\ 50a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 > 200a$$

(vì a, b là số nguyên dương).

Ta có $x_3 + x_4 > x_1 + x_2 \Leftrightarrow \log_3 v_3 + \log_3 v_4 > \log_2 u_1 + \log_2 u_2 \Leftrightarrow \log_3 (v_3 v_4) > \log_2 (u_1 u_2)$

$$\Leftrightarrow \log_3(50a) > \log_2\left(\frac{50}{a}\right) \Leftrightarrow \log_3 a + \log_2 a > \log_2 50 - \log_3 50 \approx 2,08$$

Mặt khác hàm số $f(a) = \log_3 a + \log_2 a$ ($a > 0$) là hàm số tăng, $f(2) \approx 1,63$ và $f(3) \approx 2,58$ nên $a \geq 3$. Từ đó ta có $b^2 > 200a \geq 600 \Rightarrow b \geq 25$. Vậy $\min S = 3.3 + 4.25 = 109$.

Câu 20. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là

A. $P_{\min} = \frac{11}{2}$.

B. $P_{\min} = \frac{25}{7}$.

C. $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$.

*D. $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Với $x, y > 0$ ta có:

$$\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1) \Leftrightarrow (y+1)\log_3[(x+1)(y+1)] = 9 - (x-1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + \log_3(y+1) = \frac{9}{y+1} - x + 1 \Leftrightarrow \log_3(x+1) + (x+1) = 2 - \log_3(y+1) + \frac{9}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + (x+1) = \log_3 \frac{9}{y+1} + \frac{9}{y+1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f\left(\frac{9}{y+1}\right) \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{y+1}$$

Khi đó:

$$P = x + 2y = x + 1 + 2y - 1 = \frac{9}{y+1} + 2(y+1) - 3 \geq 2\sqrt{\frac{9}{y+1} \cdot 2(y+1)} - 3 = -3 + 6\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{9}{y+1} = 2(y+1) \Leftrightarrow (y+1)^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \Rightarrow x = \frac{-25 + 27\sqrt{2}}{7}$ (thỏa mãn điều kiện $x, y > 0$).

Vậy $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$ khi $x = \frac{-25 + 27\sqrt{2}}{7}; y = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

Câu 21. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $\frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{x} > \frac{\ln x}{x-1} + \frac{m}{x}, \forall x > 0, x \neq 1$?

A. 2.

B. 1.

*C. Vô số.

D. 0.

Lời giải

Với $x > 0, x \neq 1$ ta có:

$$\frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{x} > \frac{\ln x}{x-1} + \frac{m}{x} \Leftrightarrow \frac{m}{x} < \ln x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{x} \Leftrightarrow m < -2 \frac{x \ln x}{x^2 - 1} + 1 = f(x)$$

* Xét hàm số: $f(x) = -2 \frac{x \ln x}{x^2 - 1} + 1$ với $x > 0, x \neq 1$.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{x^2 \ln x + \ln x + 1 - x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2 \ln x + \ln x + 1 - x^2 = 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 \ln x + \ln x + 1 - x^2$ với $x > 0$

Đạo hàm $g'(x) = 2x \ln x + \frac{1}{x} - 2x$

$$g''(x) = 2 \ln x + 1 - \frac{1}{x^2}$$

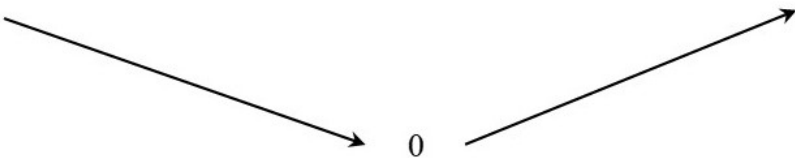
$$g'''(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} > 0, \quad \forall x > 0 \Rightarrow \text{Hàm số } g''(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty)$$

Từ đó suy ra phương trình $g'(x) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Lại có $g''(1) = 0$. Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g'(x)$:

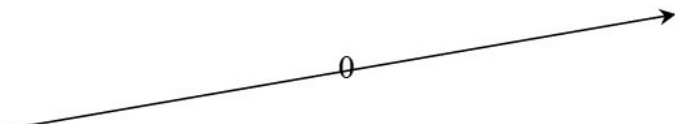
x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$		0	
	-	+	
$g'(x)$		0	



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
	+	-	+
$g(x)$		0	



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - 2 \cdot \frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} \right) = 1 - 1 = 0$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		0	0

Bất phương trình $m < f(x)$ nghiệm đúng $\forall x > 0, x \neq 1 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Vậy có vô số các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\frac{1}{3} < b < a < 1$ và biểu thức $P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a$ có giá trị nhỏ nhất. Tỷ số $\frac{b}{a}$ bằng:

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

*B. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

C. $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

D. 2.

Lời giải

Ta có: $4b^3 - 3b + 1 = (2b-1)^2(b+1) \geq 0 \forall b \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \Rightarrow \frac{3b-1}{4} \leq b^3$

$\Rightarrow \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) \geq \log_a b^3 = 3 \log_a b$ (Do $a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$)

Từ gt $\Rightarrow \log_a b > 1$

$$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) - \log_a a^3 + \frac{12}{\log_a^2 \left(\frac{b}{a} \right)} =$$

Khi đó

$$\geq 3 \log_a b - 3 + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} = \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2}$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}(\log_a b - 1) \cdot \frac{3}{2}(\log_a b - 1) \cdot \frac{12}{(\log_a b - 1)^2}} = 9$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(\log_a b - 1) = \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = 3 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^3 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 23. Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x+y$ bằng:

*A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. 9.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Trường hợp 1: $x^2 + 2y^2 > 1$, bất phương trình trở thành

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{9}{8}$$

$$T = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(y\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{9}{4} \leq \sqrt{\left(4 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left[(x-1)^2 + \left(y\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right]} + \frac{9}{4}$$

Khi đó

$$\Leftrightarrow T \leq \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8}} + \frac{9}{4} \Leftrightarrow T \leq \frac{9}{2}$$

$$\text{Vậy } T_{\max} = \frac{9}{2} \text{ khi } x=2; y=\frac{1}{2}.$$

Trường hợp 2: $x^2 + 2y^2 < 1$, bất phương trình trở thành

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \leq x^2+2y^2 < 1 \Rightarrow T < 1 \Rightarrow$$

trường hợp này không xảy ra.

Câu 24. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $1 > a > b > \frac{1}{4}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$$

thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$ *B. $\left(4; \frac{11}{2}\right)$ C. $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$ D. $\left(1; \frac{5}{2}\right)$

Lời giải

$$\log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} = \frac{1}{\log_{\sqrt{b}} \frac{a}{b}} = \frac{1}{\log_{\sqrt{b}} a - \log_{\sqrt{b}} b} = \frac{1}{2(\log_b a - 1)} = \frac{1}{\frac{2}{\log_a b} - 2}$$

Ta có

$$t = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow b - \frac{1}{4} = a^t \Leftrightarrow b = \frac{1}{4} + a^t$$

Đặt

$$\frac{1}{4} + a^t \geq 2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot a^t} = a^{\frac{t}{2}}$$

Áp dụng BĐT Cô si ta có $\frac{1}{4} + a^t \geq 2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot a^t} = a^{\frac{t}{2}}$, dấu bằng xảy ra khi chỉ khi $a^t = \frac{1}{4}$, do vậy ta được

$$b \geq a^{\frac{t}{2}} \text{ lấy logarit cơ số } a < 1 \text{ hai vế này ta có } \log_a b \leq \log_a a^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \log_a b \leq \frac{t}{2}$$

Do $\frac{1}{4} < b < a < 1$ nên $\frac{t}{2} \geq \log_a b$ suy ra $t > 2$.

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} \geq t + \frac{1}{2 - \frac{4}{t}} = t + \frac{t}{2t - 4} = g(t)$$

Từ đây ta được

với $t > 2$.

Xét hàm số $g(t) = t + \frac{t}{2t - 4}$ có $g'(t) = 1 - \frac{4}{(2t - 4)^2}$,

$$\text{suy ra } g'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(2t - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(t) = t + \frac{t}{2t-4}$

t	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$g'(t)$			- 0 +	
$g(t)$		$+\infty$	$\searrow \frac{9}{2} \nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = (e^{2x} - 4e^x - m)^2$ xét trên đoạn $[0; \ln 4]$ thỏa mãn $\max f(x) \geq 3 \min f(x)$?

- A. 14. *B. 15. C. 5. D. 10.

Lời giải

Đặt $t = e^{2x} - 4e^x, x \in [0; \ln 4]$

Ta có $t' = 2e^{2x} - 4e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

x	0	$\ln 2$	$\ln 4$
t'		- 0 +	
t	-3	$\searrow -4 \nearrow$	0

Do đó, $t \in [-4; 0]$

Khi đó $f(t) = (t - m)^2$

t	$-\infty$	m	$+\infty$
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$-\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

+/- Nếu $m \geq 0$:

$$\min_{[0; \ln 4]} f(x) = \min_{[-4; 0]} f(t) = f(0) = m^2$$

$$\max_{[0; \ln 4]} f(x) = \max_{[-4; 0]} f(t) = f(-4) = (m+4)^2$$

$$\text{Khi đó: } \max f(x) \geq 3 \min f(x) \Leftrightarrow (m+4)^2 \geq 3m^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m - 16 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{3} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{3}$$

Kết hợp điều kiện suy ra $0 \leq m \leq 2 + 2\sqrt{3}$. Nên có 6 giá trị m nguyên.

+/- Nếu $-4 < m < 0$:

$$\min_{[0; \ln 4]} f(x) = \min_{[-4; 0]} f(t) = f(m) = 0$$

$$\max_{[0; \ln 4]} f(x) = \max_{[-4; 0]} f(t) = \max \{ f(-4), f(0) \} = \max \{ (m+4)^2, m^2 \} = (m+4)^2$$

Khi đó: $\max f(x) \geq 3 \min f(x) \Leftrightarrow (m+4)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Kết hợp điều kiện suy ra $-4 < m < 0$. Nên có 3 giá trị m nguyên.

+/- Nếu $m \leq -4$:

$$\min_{[0; \ln 4]} f(x) = \min_{[-4; 0]} f(t) = f(-4) = (m+4)^2$$

$$\max_{[0; \ln 4]} f(x) = \max_{[-4; 0]} f(t) = f(0) = m^2$$

Khi đó: $\max f(x) \geq 3 \min f(x) \Leftrightarrow m^2 \geq 3(m+4)^2 \Leftrightarrow 2m^2 + 24m + 48 \leq 0 \Leftrightarrow -6 - 2\sqrt{3} \leq m \leq -6 + 2\sqrt{3}$

Kết hợp điều kiện suy ra $-6 - 2\sqrt{3} \leq m \leq -4$. Nên có 6 giá trị m nguyên.

Vậy có 15 giá trị nguyên của m cần tìm.

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên y nằm trong khoảng $(-2021; +\infty)$ sao cho với mỗi giá trị của y tồn tại nhiều hơn hai số thực x thỏa mãn $x^2 + y + (x^2 - x).2020^{x+y} = (2x^2 - x + y).2020^{x-x^2}$?

*A. 2020.

B. 2019.

C. 2021.

D. 2022.

Lời giải

Ta có: $x^2 + y + (x^2 - x).2020^{x+y} = (2x^2 - x + y).2020^{x-x^2}$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y).2020^{x^2-x} + (x^2 - x).2020^{x^2+y} = 2x^2 - x + y$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y).(2020^{x^2-x} - 1) + (x^2 - x).(2020^{x^2+y} - 1) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Nếu } (x^2 + y)(x^2 - x) \neq 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \frac{2020^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} + \frac{2020^{x^2+y} - 1}{x^2 + y} = 0 \quad (2)$$

Để thấy vế trái của (2) luôn dương nên suy ra (1) không xảy ra.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 = -y \end{cases}$$

Với $y = -1$ thì có ba giá trị x thỏa mãn đề bài.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -y > 0 \Leftrightarrow y < 0$

Do y nguyên nằm trong khoảng $(-2021; +\infty)$ nên $y \in \{-2020; -2019; \dots; -1\}$.

Vậy có 2020 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27. Cho phương trình $2 \log_3 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}-1} + 2(\sqrt{2x+1} - |y|) - 3^{2|y|} + 2x = 0$. Với các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn phương trình trên, giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \frac{7}{3} - 2.3^{2|y|}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-4; -2)$

*B. $(-11; -9,5)$

C. $(-6; -4)$

D. $(-9,5; -8)$

Lời giải

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Ta có } 2 \log_3 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}-1} + 2(\sqrt{2x+1} - |y|) - 3^{2|y|} + 2x = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2\log_3(3(\sqrt{2x+1}+1)) + 2\sqrt{2x+1} - 2|y| - 3^{2|y|} + 2x = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 + 2\log_3(\sqrt{2x+1}+1) + 2\sqrt{2x+1} - 2|y| - 3^{2|y|} + 2x = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\log_3(\sqrt{2x+1}+1)^2 + 2x + 2 + 2\sqrt{2x+1} = 2|y| + 3^{2|y|} \\
&\Leftrightarrow 2\log_3(\sqrt{2x+1}+1)^2 + (\sqrt{2x+1}+1)^2 = \log_3 3^{2|y|} + 3^{2|y|} \quad (1)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $y = f(t) = \log_3 t + t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$(1) \Leftrightarrow f((\sqrt{2x+1}+1)^2) = f(3^{2|y|}) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}+1)^2 = 3^{2|y|}$$

Từ

$$\text{Do đó } T = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \frac{7}{3} - 2 \cdot 3^{2|y|} = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(2x+4) + 2x + \frac{7}{3} - 2(\sqrt{2x+1}+1)^2$$

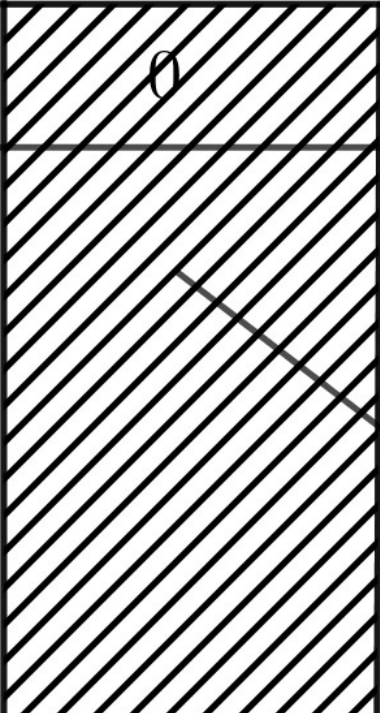
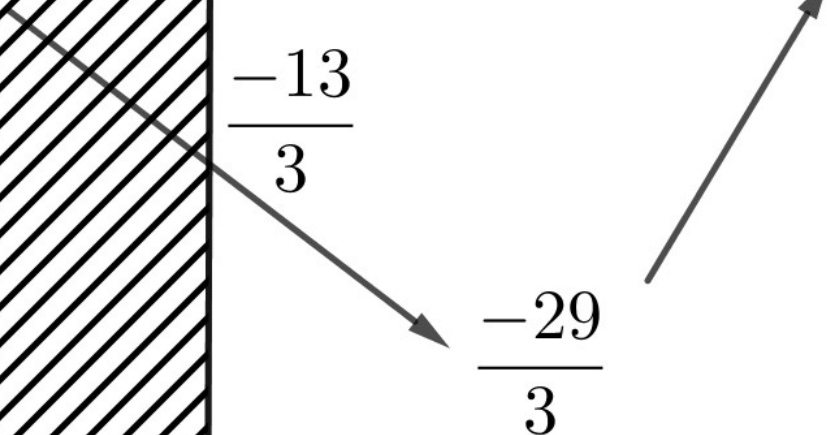
$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x+1} > 1 \Rightarrow 2x = t^2 - 1$$

$$\text{Suy ra } T = \frac{1}{3}t(t^2 - 1 + 4) + t^2 - 1 + \frac{7}{3} - 2(t+1)^2 = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t - \frac{2}{3}$$

$$T' = t^2 - 2t - 3 \Rightarrow T' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

Có

Bảng biến thiên

t	-1	1	3	$+\infty$	
T'	0		$-$	0	$+$
T			$-\frac{13}{3}$		
			$-\frac{29}{3}$		

Từ bảng biến thiên suy ra $\min T = -\frac{29}{3} \approx -9,67 \in (-11; -9,5)$

Câu 28. Cho số thực dương x bất kỳ và số thực dương $y \neq 1$ thỏa mãn $x^{\ln y - 1} \cdot y^{\sqrt{4 - \ln^2 x}} = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\log_y x$. Giá trị $M \cdot m$ bằng

- A. $4\sqrt{2}$. *B. $-4\sqrt{2}$. C. 4. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$4 - \ln^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^2} \leq x \leq e^2$$

Điều kiện

Từ giả thiết ta có

$$x^{\ln y - 1} \cdot y^{\sqrt{4 - \ln^2 x}} = 1 \Leftrightarrow \log_y (x^{\ln y - 1} \cdot y^{\sqrt{4 - \ln^2 x}}) = 0 \Leftrightarrow (\ln y - 1) \log_y x + \sqrt{4 - \ln^2 x} = 0 \quad (*)$$

Xét $x = 1$ ta có $\begin{cases} VT = 2 \\ VP = 0 \end{cases}$ không thỏa mãn.

$$\text{Xét } \begin{cases} e^{-2} \leq x \leq e^2 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (*) \Leftrightarrow \log_y x \cdot \left(\frac{\ln x}{\log_y x} - 1 \right) + \sqrt{4 - \ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x - \log_y x + \sqrt{4 - \ln^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_y x = \ln x + \sqrt{4 - \ln^2 x}$$

Xét hàm số $g(x) = \ln x + \sqrt{4 - \ln^2 x}$ trên $D = [e^{-2}; e^2] \setminus \{1\}$.

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}, \quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = e^{\sqrt{2}} \Rightarrow g(e^{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$$

Ta có BBT

x	e^{-2}	1	$e^{\sqrt{2}}$		e^2
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-2	2	$2\sqrt{2}$		2

Do đó $M = 2\sqrt{2}, m = -2$. Vậy $M \cdot m = -4\sqrt{2}$.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $e^{e^{2x} - a} - 2x - a = 0$ có nhiều nghiệm nhất?

- A. $a \geq 0$. *B. $a > 1$. C. $a < e$. D. $a \geq -1$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với: $e^{e^{2x} - a} - 2x - a = 0$

$$\text{Đặt } t = e^{2x} - a, \text{ ta có hệ: } \begin{cases} e^t - 2x - a = 0 \\ e^{2x} - t - a = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $e^t + t = e^{2x} + 2x \quad (*)$

Xét hàm số $f(u) = e^u + u$, ta có: $f'(u) = e^u + 1 > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow f(t) = f(2x) \Leftrightarrow t = 2x$

Với $t = 2x$, suy ra: $a = e^{2x} - 2x$.

Xét hàm số $g(x) = e^{2x} - 2x, \quad g'(x) = 2e^{2x} - 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nhiều nghiệm nhất bằng 2 khi $a > 1$.

Câu 30. Cho hàm số bậc 4 có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và

$m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $\log \frac{f(x)}{mx^2} + x[f(x) - mx] = mx^3 - f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?

$x, y \in \mathbb{R}$

A. 2022.

B. 2020.

C. 2019.

*D. 2021.

Lời giải

Điều kiện: $\frac{f(x)}{mx^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \notin [-1; 0; 1]$

Xét: $\log \frac{f(x)}{mx^2} + x[f(x) - mx] = mx^3 - f(x)$

$$\Leftrightarrow \log f(x) + \log(x+1) + xf(x) + f(x) = \log mx^2 + \log(x+1) + mx^3 + mx^2$$

$$\Leftrightarrow \log[(x+1)f(x)] + (x+1)f(x) = \log[mx^2(x+1)] + mx^2(x+1)$$

Điều kiện bổ sung: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Xét hàm số $g(t) = \log t + t$ trên $(0; +\infty)$, khi đó: $g'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

Suy ra: g là hàm tăng trên $(0; +\infty)$

Khi đó: $(x+1)f(x) = mx^2(x+1) \Leftrightarrow f(x) = mx^2$

Dựa vào đồ thị, để hàm số $y = f(x)$ và $y = mx^2$ cắt nhau có 2 điểm có hoành độ dương thì $m > 0$.

Kết hợp với đề bài: $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2021; 2021]$, ta được 2021 giá trị của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 31. Biết điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình

$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x+2} - 8m + 4 = 0$ có nghiệm thuộc $\left[-\frac{3}{2}; 6\right]$ là $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính giá

trị biểu thức $T = a + b$.

A. $T = -\frac{8}{3}$.

B. $T = -\frac{22}{3}$.

C. $T = \frac{8}{3}$.

*D. $T = \frac{22}{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x+2} - 8m + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\log_{\frac{1}{2}}^2(x+2) - 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x+2) - 8m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}^2(x+2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x+2) - 2m + 1 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; 6\right] \Rightarrow t \in [-3; 1]$

Phương trình (1) trở thành $t^2 - (m-5)t - 2m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - mt + 5t - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m(t+2) = t^2 + 5t + 1$$

Nhận thấy $t = -2$ không là nghiệm nên $\frac{t^2 + 5t + 1}{t + 2} = m \quad (2)$

Xét hàm số $y(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t + 2}$ trên $[-3; 1]$.

$$y'(t) = \frac{t^2 + 4t + 9}{(t+2)^2} > 0, \forall t \in [-3; 1] \setminus \{-2\}$$

Ta có

Bảng biến thiên :

t	-3	-2	1
$y'(t)$	+		+
$y(t)$	5	$+\infty$	$\frac{7}{3}$

Để phương trình ban đầu có nghiệm thuộc $\left[-\frac{3}{2}; 6\right] \Rightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $[-3; 1]$.

Suy ra $m \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right] \cup [5; +\infty)$

Câu 32. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3)$ được viết dưới dạng $x - y\log_2 z$, với $x, y, z > 2$ là các số nguyên, z là số lẻ.

Tổng $x + y + z$ bằng

*A. 11.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Do a, b là các số thực dương và $\frac{1}{2}\log_2 a = \log_2 \frac{2}{b} \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{a} = \log_2 \frac{2}{b} \Leftrightarrow ab^2 = 4$

Đặt $t = 4a^3 + b^3 = 4a^3 + \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} \geq 3\sqrt[3]{a^3 b^6} = 3ab^2 = 12$

Khi đó $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3) = t - 4\log_2 t = f(t)$

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{4}{t \ln 2} > 0, \forall t \geq 12$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ là $f(12) = 12 - 4\log_2 12 = 12 - 4(2 + \log_2 3) = 4 - 4\log_2 3$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a^3 + b^3 - 4\log_2(4a^3 + b^3)$ là $4 - 4\log_2 3$.

Từ đó ta có $x = y = 4, x = 3$. Tổng $x + y + z$ bằng 11.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_3 \frac{x^2 - 4x + m}{x^2 + x + 2} \leq 2x^2 + 7x + 7 - m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 5]$?

- *A. 11. B. 10. C. 9. D. 12.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 4x + m > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 > 4 - m$ (1)

Với mọi $x \in [1; 5]$, suy ra: $1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq x - 2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (x - 2)^2 \leq 9$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$ (*)

Ta có $\log_3 \frac{x^2 - 4x + m}{x^2 + x + 2} \leq 2x^2 + 7x + 7 - m$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 - 4x + m) - \log_3 (x^2 + x + 2) \leq 2x^2 + 7x + 7 - m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x^2 - 4x + m) + x^2 - 4x + m \leq \log_3 (x^2 + x + 2) + 3(x^2 + x + 2) \quad (**)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có:

$f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln t} > 0 \quad \forall t \in (0; +\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $(**) \Leftrightarrow f(x^2 - 4x + m) \leq f(3x^2 + 3x + 6)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + m \leq 3x^2 + 3x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 6 \geq m \quad (3)$$

Ta tìm điều kiện để bất phương trình (3) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 5]$.

Xét hàm số $g(x) = 2x^2 + 7x + 6$ là hàm số bậc hai đồng biến trên $\left(-\frac{7}{4}; +\infty\right)$ nên đồng biến trên đoạn $x \in [1; 5]$, suy ra: $g(x) \geq g(1) = 15$.

Suy ra (3) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 5] \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 5]} g(x) = g(1) = 15$.

Kết hợp điều kiện (*), suy ra $m \in [5; 6; \dots; 14; 15]$. Có 11 giá trị nguyên của m .

Câu 34. Cho ; là các số thực dương thỏa mãn . Giá

trị nhỏ nhất của biểu thức bằng:

- A. B. *C. D.

Lời giải

Ta có:

Xét hàm số trên

Do đó

Khi đó:

Xét hàm số trên

Ta có: ;

Câu 35. Xét các số thực x, y thỏa mãn $5^{(x+y)^2} + 25^{xy}(x^2 + y^2 - 1 - xy) - 5^{3xy+1} = 0$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$. Khi đó $3m + 2M$ bằng

- A. $3m + 2M = 1$ B. $3m + 2M = \frac{7}{3}$ *C. $3m + 2M = \frac{10}{3}$ D. $3m + 2M = -1$

Lời giải

Ta có: $5^{(x+y)^2} + 25^{xy}(x^2 + y^2 - 1 - xy) - 5^{3xy+1} = 0 \Leftrightarrow 5^{(x+y)^2 - 2xy} - 5^{xy+1} = -(x^2 + y^2) + (xy + 1)$
 $\Leftrightarrow 5^{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 = 5^{xy+1} + (xy + 1)$ (1)

Xét hàm số $y = 5^t + t$ trên $[0; +\infty)$ có $y' = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = xy + 1 \Rightarrow 2xy \leq xy + 1 = (x + y)^2 - 2xy \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$

Ta có: $P = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = (xy + 1)^2 - 3x^2y^2 = -2(xy)^2 + 2xy + 1$

Xét hàm số $y = -2t^2 + 2t + 1$ trên $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$ có $y' = -4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Ta có: $y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}, y(1) = 1$ suy ra $m = \frac{1}{9}$ và $M = \frac{3}{2}$

Vậy $3m + 2M = 3 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$

Câu 36. Cho các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x-1} = b^y = \sqrt[3]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 4y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- *A. $(7; 9]$ B. $(11; 13)$ C. $(1; 2)$ D. $[5; 7)$

Lời giải

$$a^{x-1} = b^y = \sqrt[3]{ab} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = y \cdot \log_a b \\ y = \frac{1}{3} \cdot (1 + \log_b a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_a b = \frac{x-1}{y} \\ \log_a b = \frac{1}{3y-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{y} = \frac{1}{3y-1} \Leftrightarrow x = \frac{4y-1}{3y-1}$$

Vì $a > 1, b > 1$ nên $\log_a b > 0$. Suy ra $y > \frac{1}{3}$.

$$P = 3x + 4y = 3 \cdot \frac{4y-1}{3y-1} + 4y = \frac{12y^2 + 8y - 3}{3y-1}$$

Xét hàm số $f(y) = \frac{12y^2 + 8y - 3}{3y-1}; y > \frac{1}{3}$

$$f'(y) = \frac{36y^2 - 24y + 1}{(3y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{6}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	/	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$f\left(\frac{2+\sqrt{3}}{6}\right)$	$+\infty$

$$P_{\min} = f\left(\frac{2+\sqrt{3}}{6}\right) \approx 7,64$$

Từ bảng biến thiên, suy ra

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2; 3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2 + 1) > \log_5(x^2 + 4x + m) - 1$

- *A. $m \in [-12; 13]$ B. $m \in [-13; 12]$ C. $m \in [-13; -12]$ D. $m \in [12; 13]$

Lời giải

$$\log_5(x^2 + 1) > \log_5(x^2 + 4x + m) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x^2 + 1) + 1 > \log_5(x^2 + 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5x^2 + 5) > \log_5(x^2 + 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5 > x^2 + 4x + m \\ x^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 5 - m > 0 \\ x^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4x^2 - 4x + 5 \\ m > -x^2 - 4x \end{cases} (*)$$

Vì khoảng $(2; 3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình nên $(*)$ trở thành

$$\begin{cases} m < 4x^2 - 4x + 5, & \forall x \in (2; 3) & (1) \\ m > -x^2 - 4x, & \forall x \in (2; 3) & (2) \end{cases}$$

Đặt $f(x) = 4x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = 8x - 4, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

x	2	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	13	29

Dựa vào bảng biến thiên ta có $(1) \Leftrightarrow m \geq 13$

Đặt $g(x) = -x^2 - 4x \Rightarrow g'(x) = -2x - 4, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

x	2	3
$g'(x)$	-	
$g(x)$	-12	-21

Dựa vào bảng biến thiên ta có $(2) \Leftrightarrow m \geq -12$

Câu 38. Có bao nhiêu số nguyên $x \in [-2021; 2021]$ để ứng với mỗi x có tối thiểu 64 số nguyên y thỏa mãn $\log_3 \sqrt{x^4 + y} \geq \log_2 (x + y)$?

*A. 3990.

B. 3992.

C. 3988.

D. 3989.

Lời giải

• Xét bất phương trình $\log_3 \sqrt{x^4 + y} \geq \log_2 (x + y)$ (1)

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^4 + y > 0 \\ x + y > 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \geq 1 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Đặt $t = x + y$ ta được $t \geq 1$. Bất phương trình (1) trở thành $\log_3 \sqrt{x^4 + t - x} \geq \log_2 t$ (2)

Với mỗi $(x \in \mathbb{Z})$ có tối thiểu 64 $(y \in \mathbb{Z})$ thỏa (1) nên có tối thiểu 64 số nguyên t ($t \geq 1$) thỏa (2).

• Xét hàm số $y = f(t) = \log_3 \sqrt{x^4 + t - x} - \log_2 t = \frac{1}{2} \log_3 (x^4 + t - x) - \log_2 t$,

vì $f'(t) = \frac{1}{2(x^4 + t - x) \ln 3} - \frac{1}{t \ln 2} < 0, \forall x, \forall t \geq 1$ nên $f(t)$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$.

• Ta nhận thấy $x^4 - x + 1 = x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 1 \geq 1$, do đó $\log_3 (x^4 - x + 1) \geq \log_3 1 = 0$.

Do đó phương trình (2) luôn nhận nghiệm $t = 1, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Suy ra để mỗi $(x \in \mathbb{Z})$ có tối thiểu 64 $(y \in \mathbb{Z})$ thì

$f(64) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3 (x^4 - x + 64) - \log_2 64 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^4 - x + 64 \geq 3^{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 27 \\ x \leq -27 \end{cases} \text{ (do } x \in \mathbb{Z}).$

Kết hợp $x \in [-2021; 2021]$ ta được $x \in [-2021; -27] \cup [27; 2021]$.

Vậy có 3990 số nguyên $x \in [-2021; 2022]$ thỏa mãn.

$$3^{\frac{2-\sqrt{x^2-2x+m}}{2}} + 3^{\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+m-2}}} > \frac{10}{3}$$

Câu 39. Cho bất phương trình với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 2]$.

*A. 15.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

$$3^{\frac{2-\sqrt{x^2-2x+m}}{2}} + 3^{\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+m-2}}} > \frac{10}{3}$$

Xét phương trình

Đặt $t = \frac{2-\sqrt{x^2-2x+m}}{2} \Rightarrow \forall t \in (-\infty; 1] \setminus \{0\}$, bất phương trình trở thành $3^t + 3^{-\frac{1}{t}} > \frac{10}{3}$.

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 3^{-\frac{1}{x}}, \forall x \in (-\infty; 1] \setminus \{0\}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	+	0	+
			0
$f(x)$		$+\infty$	$\frac{10}{3}$
	1		1

Từ bảng biến thiên suy ra $3^t + 3^{-\frac{1}{t}} > \frac{10}{3} \Leftrightarrow -1 < t < 0 \Leftrightarrow -1 < \frac{2-\sqrt{x^2-2x+m}}{2} < 0$
 $\Leftrightarrow 4-x^2+2x < m < 16-x^2+2x \Leftrightarrow \max_{x \in [0; 2]} (4-x^2+2x) < m < \min_{x \in [0; 2]} (16-x^2+2x) \Leftrightarrow 5 < m < 16$

Câu 40. Cho các số thực $a, b, c > 1$ và các số thực dương thay đổi x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Tìm

giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$.

A. 24.

B. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

*C. 20.

D. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải

$$a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc} \Rightarrow x \log a = y \log b = z \log c = \frac{1}{2} \log(abc)$$

Ta có

$$\begin{cases} \frac{16}{x} = \frac{32 \log a}{\log(abc)} \\ \frac{16}{y} = \frac{32 \log b}{\log(abc)} \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = \frac{32 \log a + 32 \log b}{\log(abc)} = \frac{32 \log(abc) - 32 \log c}{\log(abc)} = 32 - \frac{16}{z}$$

Khi đó: $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2 = 32 - \left(\frac{16}{z} + z^2 \right)$.

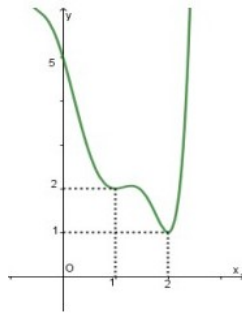
$$z^2 + \frac{16}{z} = z^2 + \frac{8}{z} + \frac{8}{z} \geq 3\sqrt{z^2 \cdot \frac{8}{z} \cdot \frac{8}{z}} = 12 \Rightarrow p \leq 32 - 12 = 20$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có:

$$z^2 = \frac{8}{z} \Leftrightarrow z = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $3 \cdot 12^{f(x)} + (f^2(x) - 1) \cdot 16^{f(x)} \geq (m^2 + 3m) \cdot 3^{2f(x)}$ có nghiệm với mọi x .

*A. 6.

B. Vô số.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

$$3 \cdot 12^{f(x)} + (f^2(x) - 1) \cdot 16^{f(x)} \geq (m^2 + 3m) \cdot 3^{2f(x)}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)} + (f^2(x) - 1) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2f(x)} \geq m^2 + 3m$$

Đặt $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)} + (f^2(x) - 1) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2f(x)}$

Vì $f(x) \geq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên
$$\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)} \geq 1 \\ (f^2(x) - 1) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2f(x)} \geq 0 \end{cases}$$

Suy ra $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{f(x)} + (f^2(x) - 1) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2f(x)} \geq 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.

Để bất phương trình có nghiệm với mọi x thì $m^2 + 3m \leq \min g(x) \leq g(2) = 4 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$

$$\log_1^2(2x) - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$$

Câu 42. Xét bất phương trình $\log_1^2(2x) - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tất cả các giá trị của tham số m để

bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$ là $m \in \left(\frac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số tự

nhien và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Khi đó $P = a + 2b$ bằng

*A. $P = 11$.

B. $P = 5$.

C. $P = 7$.

D. $P = 13$.

Lời giải

$$\log_1^2(2x) - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$$

$$\hat{U} \log_2^2 x - 2m \log_2 x - 1 < 0$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x$$

$$x \in (\sqrt{2}; +\infty) \Rightarrow t = \log_2 x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\text{Bất phương trình trở thành: } t^2 - 2mt - 1 < 0 \text{ với } t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\hat{U} \frac{t^2 - 1}{2t} < m \text{ với mọi } t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\hat{U} \frac{1}{2}t - \frac{1}{2t} < m$$

$$\text{với mọi } t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2t} \text{ với } t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2} > 0 \text{ với } t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\Rightarrow f(t)$$

$$\text{đồng biến trên khoảng } \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\text{Do đó để } f(t) < m \text{ có nghiệm } t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \hat{U} f\left(\frac{1}{2}\right) < m \hat{U} m > -\frac{3}{4}$$

$$\hat{U} m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right) \Rightarrow a = 3, b = 4$$

$$\text{Do đó } a + 2b = 11.$$

Câu 43. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+2y^2)$

A. 3.

*B. 2.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+y > 0 \\ x^2+2y^2 > 0 \end{cases}$$

$$\log_3(x+y) = \log_4(x^2+2y^2) = t \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3^t \\ x^2+2y^2 = 4^t \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (x+y)^2 \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)(x^2+2y^2) \Leftrightarrow (3^t)^2 \leq \frac{3}{2} \cdot 4^t \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác } x^2 \leq 4^t \leq 4^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Lại có } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1+3^t \\ y^2 = 4^t - 1 \Rightarrow 4^t - 1 = (1+3^t)^2 \Leftrightarrow 9^t + 2 \cdot 3^t + 2 - 4^t = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = 9^t + 2 \cdot 3^t + 2 - 4^t$. Khi đó $\begin{cases} t < 0 \Rightarrow 2 - 4^t > 0 \\ t \geq 0 \Rightarrow 9^t - 4^t > 0 \end{cases} \Rightarrow f(t) > 0, \forall t \Rightarrow f(t) = 0$ vô nghiệm.

Với $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t = 4^t \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow y = 1$ (thỏa mãn).

Với $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow 4^t - 1 = (3^t - 1)^2 \Leftrightarrow 9^t - 2 \cdot 3^t + 2 - 4^t = 0$

Phương trình có nghiệm $t = 0 \Rightarrow y = 0$ (thỏa mãn)

Vậy có 2 giá trị nguyên của x thỏa đề là $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 44. Cho các số thực a, b, c thuộc khoảng $(1; +\infty)$ và $\log^2 \sqrt{a} b + \log_b c \cdot \log_b \left(\frac{c^2}{b} \right) + 9 \log_a c = 4 \log_a b$. Giá trị của biểu thức $\log_a b + \log_b c^2$ bằng

- *A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. 3.

Lời giải

Đặt $\log_a b = x, \log_b c = y \Rightarrow \log_a c = xy$. Điều kiện: $x, y > 0$.

Bài toán trở thành:

Cho $4x^2 + y(2y - 1) + 9xy - 4x = 0$. Tính $P = x + 2y$.

Rút $x = P - 2y$ thay vào giả thiết, ta có:

$$4(P - 2y)^2 + y(2y - 1) + 9(P - 2y)y - 4(P - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4P^2 - 7Py - 4P + 7y = 0.$$

$$\Leftrightarrow (P - 1)(4P - 7y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 1 \\ 4P - 7y = 0 \end{cases}$$

Xét TH: $4P - 7y = 0 \Leftrightarrow 4x + y = 0$, loại vì $x, y > 0$.

Vậy $P = 1$.

Câu 45. Gọi S là các cặp số thực (x, y) sao cho $\ln(x - y)^x - 2020x = \ln(x - y)^y - 2020y + e^{2021}$ và $x \in [-1; 1]$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2021x}(y + 1) - 2021x^2$ với $(x, y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- *A. $x_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$. B. $x_0 \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$. C. $x_0 \in [-1; 0)$. D. $x_0 \in \left[0; \frac{1}{4} \right]$.

Lời giải

Điều kiện $x - y > 0$

Ta có: $\ln(x - y)^x - 2020x = \ln(x - y)^y - 2020y + e^{2021}$

$$\Leftrightarrow (x - y) \ln(x - y) - 2020(x - y) = e^{2021} \Leftrightarrow \ln(x - y) - 2020 - \frac{e^{2021}}{x - y} = 0(*)$$

Xét hàm $f(t) = \ln t - 2020 - \frac{e^{2021}}{t}$, có $f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{2021}}{t^2} > 0, \forall t > 0$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow f(x - y) = 0 = f(e^{2021}) \Leftrightarrow x - y = e^{2021} \Leftrightarrow y = x - e^{2021}$

Khi đó $P = e^{2021x} (1 + x - e^{2021}) - 2021x^2 = g(x)$

$g'(x) = e^{2021x} (2022 + 2021x - 2021e^{2021}) - 4042x$

$g''(x) = e^{2021x} (2021 \cdot 2022 + 2021^2 x - 2021^2 e^{2021}) - 4042$

$\leq e^{2021x} (2021 \cdot 2022 + 2021^2 x - 2021^2 e^{2021}) - 4042 < 0, \forall x \in [-1; 1]$

Nên $g'(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$

Mà $g'(-1) = e^{-2021} + 2021 > 0, g'(0) = 2022 - 2021e^{2021} < 0$ nên tồn tại $x_0 \in (-1; 0)$ sao cho $g(x_0) = 0$ và khi

đó $\max_{[-1; 1]} g(x) = g(x_0)$. Vậy P lớn nhất tại $x_0 \in (-1; 0)$.

Lời giải

Câu 46. Có bao nhiêu cặp số x, y là các số nguyên không âm thỏa mãn:

$$2(1 + \sqrt{x+2y})^2 + \log_2(x+2y) = 2\log_2(x^2 + y^2 + 2xy + x) + 2(x+y)^2 + 4x + 4y$$

A. 2.

*B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Ta có $2(1 + \sqrt{x+2y})^2 + \log_2(x+2y) = 2\log_2(x^2 + y^2 + 2xy + x) + 2(x+y)^2 + 4x + 4y$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{x+2y} + x + 2y + \frac{1}{2}\log_2(x+2y) = \log_2[(x+y)^2 + x] + (x+y)^2 + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2\sqrt{x+2y} + 2\sqrt{x+2y} = \log_2[(x+y)^2 + x] + (x+y)^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2\sqrt{x+2y} + 2\sqrt{x+2y} = \log_2[(x+y)^2 + x] + [(x+y)^2 + x] \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$, có $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $y = g(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow g(2\sqrt{x+2y}) = g((x+y)^2 + x) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2y} = (x+y)^2 + x$$

Từ

$$\Leftrightarrow x + 2y + 2\sqrt{x+2y} = (x+y)^2 + 2(x+y) \quad (2)$$

Xét hàm số $h(u) = u^2 + u$ với $u > 0$, có $h'(u) = 2u + 1 > 0, \forall u > 0$.

Suy ra hàm số $y = h(u) = u^2 + u$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$(2) \Leftrightarrow h(\sqrt{x+2y}) = h(x+y) \Leftrightarrow \sqrt{x+2y} = x+y \Leftrightarrow x+2y = (x+y)^2$$

Từ

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x + 2y \Leftrightarrow y^2 + 2(x-1)y + x^2 - x = 0 \quad (3)$$

Ta coi phương trình (3) là phương trình bậc hai ẩn y , khi đó: Phương trình (3) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_y' \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (x^2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow -x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Do x là số nguyên không âm nên $x=0$ hoặc $x=1$.

+) Với $x=0$, suy ra $(3) \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

+) Với $x=1$, suy ra $(3) \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y=0$ (thỏa mãn).

Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(0; 0), (0; 2), (1; 0)$.

Câu 47. Cho dãy số (u_n) có $u_{n+1} = 2u_n \forall n \geq 1, u_1 > 1$ và $\log_2(u_6) = u_1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 2020^{10}$
A. 107. **B.** 106. **C.** 105. ***D.** 108.

Lời giải

+ Dãy số (u_n) có $u_{n+1} = 2u_n \forall n \geq 1, u_1 > 1$

$\Rightarrow (u_n)$ là CSN với $u_1 > 1, q = 2$.

$\Rightarrow u_6 = q^5 u_1 = 2^5 u_1$

+ $\log_2(u_6) = u_1$

$\Leftrightarrow \log_2(2^5 u_1) = u_1$

$\Leftrightarrow \log_2(2^5) + \log_2 u_1 = u_1$

$\Leftrightarrow 5 + \log_2 u_1 = u_1$

$\Leftrightarrow 5 + \log_2 u_1 - u_1 = 0$

+ Xét hàm số $y = 5 + \log_2 x - x (x > 1)$

$y' = \frac{1}{x \ln 2} - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x \ln 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2} > 1$

x	1	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
y'	+	0	-
y	4	$\approx 4,086$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $5 + \log_2 x - x = 0 (x > 1)$ có nghiệm duy nhất.

Để nhận thấy $x=8$ là nghiệm của phương trình.

Suy ra: $u_1 = 8$.

$u_n > 2020^{10} \Leftrightarrow q^{n-1} u_1 > 2020^{10}$

$\Leftrightarrow 2^{n-1} \cdot 2^3 > 2020^{10} \Leftrightarrow 2^{n+2} > 2020^{10}$

$\Leftrightarrow n+2 > \log_2 2020^{10} \approx 109,8$

$\Leftrightarrow n > 107,8$

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = 3^x - 3^{-x}$. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất n thỏa mãn $f(n) + f(e^n - 2021) > 0$.

A. 10. *B. 8. C. 7. D. 9.

- TXD: $D = i$.

• Do $f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(e^n - 2021) = -f(2021 - e^n)$

$$f(n) + f(e^n - 2021) > 0 \Leftrightarrow f(n) - f(2021 - e^n) > 0 \Leftrightarrow f(n) > f(2021 - e^n)$$

$$\Leftrightarrow n > 2021 - e^n \Leftrightarrow n + e^n > 2021 \Leftrightarrow n + e^n - 2021 > 0$$

• Xét $g(n) = n + e^n - 2021$, với $n \in \mathbb{N}$.

• Có $g'(n) = 1 + e^n > 0$. Suy ra hàm số đơn điệu tăng trên tập xác định.

♦ Bảng biến thiên

n	1	$+\infty$
$g'(n)$		+
$g(n)$	$e - 2020$	$+\infty$

$$\bullet \text{C6 } g(n) = n + e^n - 2021 = 0 \hat{U} \quad n \gg 7,60576$$

• Vậy $n = 8$ là giá trị cần tìm.

Câu 49. Cho hai số thực $x, y \in (0; 3]$ thỏa mãn $\log \frac{x+y}{7-xy} + (x+1)(y+1) \geq 8$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y$ bằng

A. 10. B. 3. *C. 4. D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\log \frac{x+y}{7-xy} + (x+1)(y+1) \geq 8 \Leftrightarrow \log(x+y) + (x+y) \geq \log(7-xy) + (7-xy)$ (1)

Xét hàm số: $y = \log t + t, \forall t > 0$

$$y' = \frac{1}{t \ln 10} + 1 > 0, \quad \forall t > 0$$

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(1) \Rightarrow x+y \geq 7-xy \Leftrightarrow (x+1)(y+1) \geq 8 \Leftrightarrow y+1 \geq \frac{8}{x+1}$$

Suy ra:

Khi đó:

$$P = x^2 + y = x^2 - 1 + (y+1) \geq x^2 - 1 + \frac{8}{x+1} = (x-1)^2 + \left[2(x+1) + \frac{8}{x+1} \right] - 4 \geq 2\sqrt{2 \cdot 8} - 4 = 4$$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} x-1=0 \\ 2(x+1)=\frac{8}{x+1} \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$.

Suy ra: $y+1 \geq \frac{8}{1+1} = 4 \Rightarrow y=3$.

Câu 50. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m+5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là:

- A. 4. B. 8. *C. 2. D. 1.

Lời giải

Đặt $4^x = t \ (t > 0)$. Phương trình trở thành: $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \quad (1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \Delta' = -2m^2 - 23m + 4 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 2m^2 + 23m - 4 < 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} > 0 \\ \frac{2(2m-3)}{m+1} > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 2m^2 + 23m - 4 < 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} > 0 \\ \frac{2(2m-3)}{m+1} > 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} - \frac{2(2m-3)}{m+1} + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + 23m - 4 < 0 \\ (6m+5)(m+1) > 0 \\ (2m-3)(m+1) > 0 \\ (3m+12)(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-23 - \sqrt{561}}{4} < m < \frac{-23 + \sqrt{561}}{4} \\ m < -1 \\ m > -\frac{5}{6} \\ m < -1 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 51. Cho các số thực x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2} (2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x+3y$ gần nhất với số nào trong các số sau?

- *A. 2. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

ĐK: $2x+3y > 0; 4x^2+9y^2 > 0$

Th1: Nếu $0 < 4x^2+9y^2 < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}; y < \frac{1}{3} \Rightarrow P = x+3y < \frac{3}{2}$.

Th2: Nếu $4x^2+9y^2 > 1$

$$\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+3y \geq 4x^2+9y^2 \Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$P = x+3y = \frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right) + \left(3y-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \leq \sqrt{\frac{5}{4}\left[\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y-\frac{1}{2}\right)^2\right]} + \frac{3}{4} \leq \frac{\sqrt{10}+3}{4}$$

Ta có

$$\begin{cases} 4x-1=3y-\frac{1}{2} \\ x+3y=\frac{\sqrt{10}+3}{4} \\ \left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5+\sqrt{10}}{20} \\ y=\frac{5+2\sqrt{10}}{30} \end{cases}$$

$$MaxP = \frac{3+\sqrt{10}}{4} \approx 1,54$$

Vậy

Câu 52. Có bao nhiêu số nguyên $m \leq 2021$ để có nhiều hơn một cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m) \geq 1$ và $4x-3y+1=0$?

*A. 2017.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2022.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m) \geq 1 \\ 4x-3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y+m \geq x^2+y^2+4 \\ 4x-3y+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq m+1 & (1) \\ 4x-3y+1=0 & (2) \end{cases} \quad (*)$$

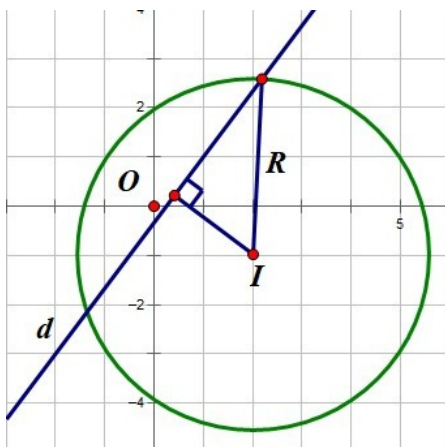
Xét (1): $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq m+1$

Khi $m+1 < 0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm nên $m < -1$ loại.

$$m = -1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (y+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Khi $m = -1$ loại.

Khi $m > -1$ thì nghiệm của bất phương trình (1) là miền trong của đường tròn (C) có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{m+1}$.



Xét $d: 4x - 3y + 1 = 0$.

$$d(I, d) = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{5}$$

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d là:

Hệ (*) có nhiều hơn một cặp số $(x, y) \Leftrightarrow d$ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt

$$d(I, d) < R \Leftrightarrow \frac{12}{5} < \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m > \frac{119}{25}$$

Mà m nguyên và $m \leq 2021 \Rightarrow m \in \{5; 6; \dots; 2021\}$.

Vậy có 2017 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 53. Có bao nhiêu số nguyên dương a nhỏ hơn 2021 sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $2^a(2^{x+3} - 1) + a^2 = a(2^a + 2^{x+3} - 1)$?

A. 12.

B. 15.

*C. 10.

D. 14.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2^a(2^{x+3} - 1) + a^2 = a(2^a + 2^{x+3} - 1) \Leftrightarrow (2^a - a)(2^{x+3} - 1 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^a - a = 0 \\ 2^{x+3} - 1 - a = 0 \end{cases}$$

+) Xét hàm số $f(a) = 2^a - a$

$$f'(a) = 2^a \ln 2 - 1; f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right) = a_0$$

Ta có

Bảng biến thiên

a	0	a_0	$+\infty$	
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$	1		$f(a_0)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $f(a) \geq f(a_0) \approx 0,91 > 0$

Nên phương trình $2^a - a = 0$ vô nghiệm.

$$\text{+) } 2^{x+3} - 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2^{x+3} - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+3} - 1 > 0 \\ 2^{x+3} - 1 < 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < \log_2 \frac{1011}{4} \approx 7,9 \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

Ta có ứng với mỗi $x \in \mathbb{Z}$ thì có một giá trị $a \in \mathbb{Z}$ nên có 10 số nguyên a thỏa mãn yêu cầu.

Câu 54. Có bao nhiêu số nguyên y sao cho với mỗi y không có quá 50 số nguyên x thỏa mãn bất phương trình sau: $2^{y-3x} \geq \log_3(x+y^2)$?

*A. 15

B. 11.

C. 19.

D. 13.

Lời giải

Điều kiện: $x + y^2 > 0$

Xét hàm số: $f(x) = 2^{y-3x} - \log_3(x + y^2)$ với $x \in (-y^2; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = -3 \cdot 2^{y-3x} \ln 2 - \frac{1}{(x + y^2) \ln 3} < 0, \forall x \in (-y^2; +\infty)$

Bảng biến thiên

x	$-y^2$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	

$f(x)$ $+\infty$

0
 $-\infty$

Từ đó suy ra bất phương trình có nghiệm $x \in (-y^2; x_0]$

Để tập nghiệm của bất phương trình không chứa quá 50 số nguyên thì $f(-y^2 + 51) < 0$

$$\Leftrightarrow 2^{y-3(-y^2+51)} < \log_3 51$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + y - 153 < \log_2(\log_3 51)$$

$$\Leftrightarrow -7,35 < y < 7,02$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-7; -6; \dots; 6; 7\}$

Câu 55. Có bao nhiêu số nguyên $m (m \geq 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $(m^{\ln x} + 4)^{\ln m} + 4 = x$?

A. 8.

B. 9.

*C. 1.

D. Vô số

Lời giải

ĐK: $x > 0$

Đặt $y = m^{\ln x} + 4 > 0$ thế vào phương trình ta có $y^{\ln m} + 4 = x \Leftrightarrow x = 4 + m^{\ln y}$ vì $m^{\ln y} = y^{\ln m}$

$$\begin{cases} y = m^{\ln x} + 4 & (1) \\ x = m^{\ln y} + 4 & (2) \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ phương trình:

Xét hàm số $f(t) = m^t + 4 \Rightarrow f'(t) = \ln m \cdot m^t > 0$ (Do $m \geq 2$). Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $x = y$

$$\text{Từ (2): } x = m^{\ln x} + 4 \Leftrightarrow x^{\ln m} = x - 4 \Leftrightarrow \ln(x^{\ln m}) = \ln(x - 4) \Leftrightarrow \ln m \cdot \ln x = \ln(x - 4) \Leftrightarrow \ln m = \frac{\ln(x - 4)}{\ln x}$$

$$\text{Do } x > 0 \text{ nên } x - 4 < x \Rightarrow \ln(x - 4) < \ln x \Rightarrow \frac{\ln(x - 4)}{\ln x} < 1$$

$$\text{Nên } \ln m < 1 \Leftrightarrow m < e \text{ hay } m \in \{2\}$$

Câu 56. Có bao nhiêu số tự nhiên y sao cho ứng với mỗi y có không quá 148 số nguyên x thỏa mãn

$$\frac{3^{x+2} - \frac{1}{3}}{y - \ln x} \geq 0$$

A. 4

B. 5

*C. 6

D. 7

Lời giải

Điều kiện:

+ Trường hợp 1:

+ Trường hợp 2:

Để có không quá 148 số nguyên x thì $1 \leq e^y \leq 149 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \ln 149 \approx 5,004$

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m với $m > 1$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

A. 4.

C. 5.

D. 8.

A. 30

***B. 31**

C. 32

D. 33

Chọn B

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y - 2^{\sqrt{x}} \neq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1:
$$\begin{cases} 2^{x+1} - \frac{1}{4} \leq 0 \\ y - 2^{\sqrt{x}} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x > (\log_2 y)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

+ Trường hợp 2:
$$\begin{cases} 2^{x+1} - \frac{1}{4} \geq 0 \\ y - 2^{\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < (\log_2 y)^2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện: $x \geq 0; \log_2 y \geq \log_2 1 = 0$. Ta có: $0 \leq x < (\log_2 y)^2$

Để có không quá 25 số nguyên x thì $1 \leq (\log_2 y)^2 \leq 25 \Rightarrow 1 \leq \log_2 y \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 32$
 $\Rightarrow y \in \{2; 3; \dots; 32\}$. Có 31 số nguyên y .

Câu 59. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z$. Có bao giá trị nguyên của z để có đúng hai cặp (x, y) thỏa mãn đẳng thức trên.

A. 2.

*B. 211.

C. 99.

D. 4.

Lời giải

$$\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z = t \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3^t & (1) \\ x^3 + 2y^3 = 7^t & (2) \\ z = 10^t & (3) \end{cases}$$

Ta có

+ Nếu $y = 0$ (2) $\Rightarrow x = 7^{\frac{t}{3}}$ thay vào (1) ta được $2 \cdot 7^{\frac{2t}{3}} = 3^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}} 2$ do đó $z = 10^{\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}} 2}$.
 + Nếu $y \neq 0$

$$\begin{cases} (2x^2 + y^2)^3 = 27^t \\ (x^3 + 2y^3)^2 = 49^t \end{cases} \Rightarrow \frac{(x^3 + 2y^3)^2}{(2x^2 + y^2)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t \Leftrightarrow \frac{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\right)^2}{\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t, (*)$$

Từ (1)&(2) suy ra

Đặt $\frac{x}{y} = u, u \neq -\sqrt[3]{2}$. Xét
$$f(u) = \frac{(u^3 + 2)^2}{(2u^2 + 1)^3} \Rightarrow f'(u) = \frac{6u(u^3 + 2)(u - 4)}{(2u^2 + 1)^4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -\sqrt[3]{2} \\ u = 4 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

u	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	0	4	$+\infty$			
$f'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(u)$	$\frac{1}{8}$		0	4		$\frac{4}{33}$		$\frac{1}{8}$

Nhận xét với mỗi giá trị u tương ứng với duy nhất 1 cặp (x, y) thỏa mãn bài toán do đó

$$\begin{cases} \frac{1}{8} \leq \left(\frac{49}{27}\right)^t < 4 \\ 0 < \left(\frac{49}{27}\right)^t < \frac{4}{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^{\frac{\log_{49}(\frac{1}{8})}{27}} \leq z < 10^{\frac{\log_{49} 4}{27}} \\ 0 < z < 10^{\frac{\log_{49}(\frac{4}{33})}{27}} \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương

Vì z là số nguyên nên có 211 giá trị thỏa mãn.

Câu 60. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 2186 số nguyên x thỏa mãn $(\log_3 x - y)\sqrt{3^x - 9} \leq 0$?

*A. 7.

B. 8.

C. 2186.

D. 6.

Lời giải

$$(\log_3 x - y)\sqrt{3^x - 9} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3^x \geq 9 \\ \log_3 x \leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 3^y \end{cases}$$

Ta có

Nếu $3^y < 2$ thì bất phương trình vô nghiệm (không thỏa mãn).

Nếu $3^y = 2 \Leftrightarrow y = \log_3 2 \approx 0,631$ thì bất phương trình có tập nghiệm $T = \{2\}$ (không thỏa mãn vì y nguyên dương).

Nếu $3^y > 2 \Leftrightarrow y > \log_3 2 \approx 0,631$, khi đó bất phương trình có tập nghiệm $T = [2; 3^y]$

Để mỗi giá trị y , bất phương trình có không quá 2021 nghiệm nguyên x thì $3^y \leq 2187 \Leftrightarrow y \leq \log_3 2187 = 7$.

Kết hợp điều kiện y nguyên dương, $0,631 < y \leq 7$ suy ra có 7 số y thỏa mãn bài toán.

Câu 61. Tổng các nghiệm của phương trình sau $7^{x-1} = 6\log_7(6x-5)+1$ bằng

A. 2.

*B. 3.

C. 1.

D. 10.

Lời giải

Điều kiện: $x > \frac{5}{6}$.

Đặt $y-1 = \log_7(6x-5)$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7^{y-1} = 6(y-1)+1 \\ y-1 = \log_7(6x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{y-1} = 6y-5 \\ 7^{y-1} = 6x-5 \end{cases} \Rightarrow 7^{y-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 7^{t-1} + 6t$ với $t > \frac{5}{6}$ thì $f'(t) = 7^{t-1} \ln 7 + 6 > 0, \forall t > \frac{5}{6} \Rightarrow f(t)$ đồng biến nên

$(2) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ khi đó ta có phương trình $7^{x-1} - 6x + 5 = 0$. (3)

Xét hàm số $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$ với $x > \frac{5}{6}$ thì $g'(x) = 7^{x-1} \ln 7 - 6 \Rightarrow g''(x) = 7^{x-1} (\ln 7)^2 > 0 \quad \forall x > \frac{5}{6}$

nên suy ra phương trình $g(x) = 0$ có không quá hai nghiệm.

Mặt khác $g(1) = g(2) = 0$ nên $x = 1$ và $x = 2$ là 2 nghiệm của phương trình (3).

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Suy ra tổng các nghiệm của phương trình là $1 + 2 = 3$.

Câu 62. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y luôn có ít hơn 2021 số nguyên x thỏa mãn $\log_2(x+3) - 1 < (\log_2 x - y) < 0$

A. 20.

B. 9.

*C. 10.

D. 11.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

$$\begin{aligned} \hat{U} \begin{cases} \log_2(x+3) - 1 < 0 \\ \log_2 x - y > 0 \\ \log_2(x+3) - 1 > 0 \\ \log_2 x - y < 0 \end{cases} & \hat{U} \begin{cases} \log_2(x+3) < 1 \\ \log_2 x > y \\ \log_2(x+3) > 1 \\ \log_2 x < y \end{cases} \end{aligned}$$

Với điều kiện trên: $\log_2(x+3) - 1 < (\log_2 x - y) < 0$

$$\hat{U} \begin{cases} x+3 < 2 \\ x > 2^y \\ x+3 > 2 \\ x < 2^y \end{cases} \hat{U} \begin{cases} x < -1 \\ x > 2^y \\ x > -1 \\ x < 2^y \end{cases} \hat{U} \begin{cases} y < x < -1 \text{ (sai)} \\ 1 < x < 2^y \end{cases} \hat{U} -1 < x < 2^y$$

So điều kiện ta được: $0 < x < 2^y$

Ứng với mỗi y luôn có ít hơn 2021 số nguyên $x \hat{U} 2^y \notin 2021 \hat{U} y \notin \log_2 2021$

Vì y là số nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Câu 63. Có bao nhiêu số tự nhiên a sao cho tồn tại số thực x thỏa $2021^{x^3 - a^{3\log(x+1)}} (x^3 + 2020) = a^{3\log(x+1)} + 2020$

*A. 9.

B. 8.

C. 5.

D. 12

Lời giải

Xét phương trình: $2021^{x^3 - a^{3\log(x+1)}} = \frac{a^{3\log(x+1)} + 2020}{x^3 + 2020}$, điều kiện: $x > -1$,

$$\Leftrightarrow x^3 - a^{3\log(x+1)} = \log_{2021}(a^{3\log(x+1)} + 2020) - \log_{2021}(x^3 + 2020)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \log_{2021}(x^3 + 2020) = a^{3\log(x+1)} + \log_{2021}(a^{3\log(x+1)} + 2020) (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + \log_{2021}(t^3 + 2020)$, trên $(0; +\infty)$

$$f'(t) = 3t^2 + \frac{3t^2}{(t^3 + 2020)\ln 2021} > 0, \forall t > 0$$

nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó (*) trở thành: $x = a^{\log(x+1)} \Leftrightarrow x = (x+1)^{\log a} \Leftrightarrow \log x = \log a \cdot \log(x+1)$

$$\Leftrightarrow \log a = \frac{\log x}{\log(x+1)} < 1, \forall x > -1$$

nên $a < 10 \Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Câu 64. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $(3^{x+1} - \sqrt{3})(3^x - y) < 0$?

A. 59149.

B. 59050.

*C. 59049.

D. 59048.

Lời giải

Đặt $t = 3^x > 0$ thì ta có bất phương trình $(3t - \sqrt{3})(t - y) < 0$ hay $(t - \frac{\sqrt{3}}{3})(t - y) < 0$ (*).

Vì $y \in \mathbb{Q}^+$ nên $y > \frac{\sqrt{3}}{3}$, do đó $(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < t < y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < 3^x < y$. Do $y \notin \mathbb{Z}^*$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \log_3 y$.

Do mỗi giá trị $y \in \mathbb{Z}^*$ có không quá 10 giá trị nguyên của x thỏa mãn $-\frac{1}{2} < x < \log_3 y$ nên $0 \leq \log_3 y \leq 10$ hay $1 \leq y \leq 3^{10} = 59049$, từ đó có $y \in \{1, 2, \dots, 59049\}$.

Vậy có 59049 giá trị nguyên dương của y .

Câu 65. Có bao nhiêu m nguyên $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $6^x - 2m = \log_{\sqrt{6}}(18(x+1) + 12m)$ có nghiệm?

A. 211.

B. 2020.

*C. 2023.

D. 212.

Lời giải

Phương trình $6^x - 2m = \log_{\sqrt{6}}(18(x+1) + 12m) \Leftrightarrow 6^x = 2m + 3 \log_6 [6(3x + 2m + 3)]$
 $\Leftrightarrow 6^x = 2m + 3[1 + \log_6(3x + 2m + 3)]$
 $\Leftrightarrow 6^x = 3 \log_6(3x + 2m + 3) + 2m + 3, (*)$

Đặt $y = \log_6(3x + 2m + 3) \Leftrightarrow 6^y = 3x + 2m + 3, (1)$

Mặt khác, PT(*) trở thành: $6^x = 3y + 2m + 3, (2)$

Lấy (1) trừ vế với vế cho (2), ta được

$$6^y - 6^x = 3x - 3y \Leftrightarrow 6^x + 3x = 6^y + 3y \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 6^t + 3t, t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 6^t \ln 6 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà PT (3) $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay $y = x$ vào PT (1), ta được $6^x = 3x + 2m + 3 \Leftrightarrow 6^x - 3x = 2m + 3$.

Xét hàm số $g(x) = 6^x - 3x$, với $x \in \mathbb{R}$. Ta có $g'(x) = 6^x \ln 6 - 3 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_6 \left(\frac{3}{\ln 6} \right)$

BBT:

x	$-\infty$	$\log_6 \left(\frac{3}{\ln 6} \right)$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0,81	$+\infty$

$$\Leftrightarrow 2m+3 \geq g\left(\log_6 \frac{3}{\ln 6}\right) \approx 0,81 \Rightarrow m \geq -1,095$$

Từ đó suy ra PT đã cho có nghiệm

Vậy có 2023 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 66. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $y \leq 2021$ thỏa mãn

$$\log \frac{x+1}{2y+1} \leq 4y^4 + 4y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$$

A. 2021(2021 - 1)

B. 2021(2022 - 1)

*C. 2022(2022 - 1)

D. 2022(2022 + 1)

Lời giải

Ta có:
$$\log \frac{x+1}{2y+1} \leq 4y^4 + 4y^3 - x^2y^2 - 2y^2x \Leftrightarrow \log \frac{xy+y}{2y^2+y} \leq (4y^4 + 4y^3 + y^2) - (x^2y^2 + 2y^2x + y^2)$$

$$\Leftrightarrow \log(xy+y) - \log(2y^2+y) \leq (2y^2+y)^2 - (xy+y)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log t + t^2$ với $t \in (0; +\infty)$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 2t > 0; \forall t \in (0; +\infty)$. Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $t \in (0; +\infty)$.

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow f(xy+y) \leq f(2y^2+y) \Leftrightarrow xy+y \leq 2y^2+y \Leftrightarrow x \leq 2y$

Vì $y \in \mathbb{N}^+$ và $y \leq 2021$ nên ta xét các trường hợp sau.

* $y = 1 \Rightarrow x \in \{1; 2\}$

* $y = 2 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4\}$

*

* $y = 2021 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; \dots; 4042\}$

Vậy số cặp nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán là: $2 + 4 + 6 + \dots + 4042 = 2022 \cdot 2021$

Câu 67. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z$. Có bao giá trị nguyên của z để có đúng hai cặp (x, y) thỏa mãn đẳng thức trên.

A. 2

*B. 211

C. 99

D. 4

Lời giải

$$\log_3(2x^2 + y^2) = \log_7(x^3 + 2y^3) = \log z = t \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3^t & (1) \\ x^3 + 2y^3 = 7^t & (2) \\ z = 10^t & (3) \end{cases}$$

Ta có

+ Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 7^{\frac{t}{3}}$ thay vào (1) ta được $2 \cdot 7^{\frac{2t}{3}} = 3^t \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}} 2$ do đó $z = 10^{\log_{\frac{3}{\sqrt[3]{49}}} 2}$

+ Nếu $y \neq 0$

$$\begin{cases} (2x^2 + y^2)^3 = 27^t \\ (x^3 + 2y^3)^2 = 49^t \end{cases} \Rightarrow \frac{(x^3 + 2y^3)^2}{(2x^2 + y^2)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t \Leftrightarrow \frac{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\right)^2}{\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)^3} = \left(\frac{49}{27}\right)^t, (*)$$

Từ (1) & (2) suy ra

Đặt $\frac{x}{y} = u, u \neq -\sqrt[3]{2}$. Xét

$$f(u) = \frac{(u^3 + 2)^2}{(2u^2 + 1)^3} \Rightarrow f'(u) = \frac{6u(u^3 + 2)(u - 4)}{(2u^2 + 1)^4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -\sqrt[3]{2} \\ u = 4 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

u	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	0	4	$+\infty$				
$f'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(u)$	$\frac{1}{8}$		0	4		$\frac{4}{33}$		$\frac{1}{8}$	

Nhận xét với mỗi giá trị u tương ứng với duy nhất 1 cặp (x, y) thỏa mãn bài toán do đó

$$\begin{cases} \frac{1}{8} \leq \left(\frac{49}{27}\right)^t < 4 \\ 0 < \left(\frac{49}{27}\right)^t < \frac{4}{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^{\log_{49} \left(\frac{1}{8}\right)} \leq z < 10^{\log_{49} 4} \\ 0 < z < 10^{\log_{49} \left(\frac{4}{33}\right)} \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương

Vì z là số nguyên nên có 211 giá trị thỏa mãn.

Câu 68. Số giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $(2^{x+2} - \sqrt{2})(2^x - m) < 0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên là:

A. 62.

B. 33.

*C. 32.

D. 31.

Lời giải

Ta có: bất phương trình $(2^{x+2} - \sqrt{2})(2^x - m) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} > 0 \\ 2^x - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2} > \sqrt{2} \\ 2^x < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > \frac{1}{2} \\ x < \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < \log_2 m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} < 0 \\ 2^x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2} < \sqrt{2} \\ 2^x > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 < \frac{1}{2} \\ x > \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x > \log_2 m \end{cases} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \log_2 m$$

(Vì $m \geq 1 \Rightarrow \log_2 m \geq 0$ nên $(*)$ vô nghiệm).

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên

$$\Leftrightarrow \log_2 m \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 2^5 \Leftrightarrow m \leq 32$$

Mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 32\}$.

Vậy có 32 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 69. Cho phương trình $m \cdot 2^{x^2-4x-1} + m^2 \cdot 2^{2x^2-8x-1} = 7 \log_2 (x^2 - 4x + \log_2 m) + 3$, (m là tham số). Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho phương trình đã cho có nghiệm thực.

A. 31.

B. 63.

C. 32.

*D. 64.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 4x + \log_2 m > 0$

$$m.2^{x^2-4x-1} + m^2.2^{2x^2-8x-1} = 7\log_2(x^2 - 4x + \log_2 m) + 3$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-4x+\log_2 m} + 4^{x^2-4x+\log_2 m} = 14\log_2(x^2 - 4x + \log_2 m) + 6$$

Đặt $x^2 - 4x + \log_2 m = t, (t > 0)$. Phương trình trở thành $2^t + 4^t = 14\log_2 t + 6 (*)$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 4^t - 14\log_2 t - 6$ trên $(0; +\infty)$

Ta có
$$f'(t) = 2^t \ln 2 + 4^t \ln 4 - \frac{14}{t \ln 2}$$

$$f''(t) = 2^t \ln^2 2 + 4^t \ln^2 4 + \frac{14}{t^2 \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

Suy ra hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó phương trình $f(t) = 0$ hay phương trình $(*)$ có nhiều nhất 2 nghiệm

Ta thấy $t=1, t=2$ thỏa mãn $(*)$. Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$

$$t=1 \Rightarrow x^2 - 4x + \log_2 m = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 + \log_2 m = 0 \quad (1)$$

$$t=2 \Rightarrow x^2 - 4x + \log_2 m = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 + \log_2 m = 0 \quad (2)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) hoặc (2) có nghiệm

(1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - (\log_2 m - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 m \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 32$.

(2) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - (\log_2 m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 m \leq 6 \Leftrightarrow m \leq 64$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq 64$. kết hợp m nguyên dương. Vậy có 64 số

Câu 70. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\ln(x^2+2x+m)} - \left(\frac{1}{7}\right)^{2\ln(2x-1)} < 0$$

chứa đúng ba số nguyên.

A. 15.

B. 9.

C. 16.

*D. 14.

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + 2x + m > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ m > -\frac{5}{4} \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

•Điều kiện xác định:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\ln(x^2+2x+m)} - \left(\frac{1}{7}\right)^{2\ln(2x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{\ln(x^2+2x+m)} < \left(\frac{1}{7}\right)^{2\ln(2x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x + m) > 2\ln(2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + m > (2x - 1)^2 \Leftrightarrow m > 3x^2 - 6x + 1. \text{ Đặt } g(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

Câu 71. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m).3^{x-3} = 3^x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 45.

B. 34.

*C. 27.

D. 38.

Lời giải

$$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left[(x-3)^3 + 27 + m - 3x \right] \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-3)^3 + m - 3x + 27 = 3^3 + 3^{3-x} \quad (1)$$

$$a = 3 - x; b = \sqrt[3]{m-3x}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3^b + 27 + b^3 - a^3 = 27 + 3^a \Leftrightarrow 3^b + b^3 = 3^a + a^3$$

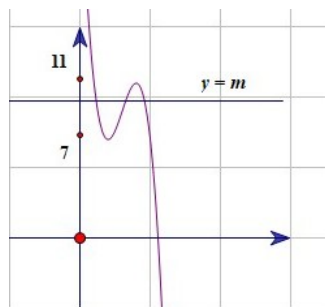
$$\text{Xét } f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 + 3t^2 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 3 - x = \sqrt[3]{m-3x}$$

$$\Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27$$

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 18x - 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$



Dựa vào đồ thị: $7 < m < 11 \Rightarrow m \in [8; 9; 10]$. Suy ra tổng các giá trị là 27.

Câu 72. Có bao nhiêu số nguyên y trong đoạn $[-2021; 2021]$ sao cho bất phương trình $(10x)^{y+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x}$ đúng với mọi x thuộc $(1; 100)$.

*A. 2021.

B. 4026.

C. 2013.

D. 4036.

Lời giải

$$(10x)^{y+\frac{\log x}{10}} \geq 10^{\frac{11}{10} \log x} \Leftrightarrow \left(y + \frac{\log x}{10} \right) \log(10x) \geq \frac{11}{10} \log x \Leftrightarrow \left(y + \frac{\log x}{10} \right) (1 + \log x) \geq \frac{11}{10} \log x \quad (1)$$

Đặt $\log x = t$. Ta có $x \in (1; 100) \Rightarrow \log x \in (0; 2) \Rightarrow t \in (0; 2)$. Bất phương trình trở thành

$$\left(y + \frac{t}{10} \right) (t+1) \geq \frac{11}{10} t \quad (2) \Leftrightarrow y(t+1) \geq \frac{-t^2 + 10t}{10} \Leftrightarrow \frac{-t^2 + 10t}{10(t+1)} \leq y \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2 + 10t}{10(t+1)}$ trên khoảng $(0; 2)$, ta có $f'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 10}{10(t+1)^2}$

$$\Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in (0; 2) \Rightarrow f(0) < f(t) < f(2), \forall t \in (0; 2) \Leftrightarrow 0 < f(t) < \frac{8}{15}, \forall t \in (0; 2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (2)$ đúng với mọi $t \in (0; 2) \Leftrightarrow f(t) \leq y, \forall t \in (0; 2) \Leftrightarrow y \geq \frac{8}{15}$.

Kết hợp với điều kiện $y \in [-2021; 2021] \Rightarrow y \in \left[\frac{8}{15}; 2021 \right]$. Vậy có tất cả 2021 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 73. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để phương trình $7^x + m = 6 \log_7(6x - m)$ có nghiệm thực

- A. 19.
B. 21.
C. 18.
*D. 20.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $t = \log_7 (6x - m) \Leftrightarrow 6x - m = 7^t \Leftrightarrow 6x - 7^t = m$. Khi đó phương trình trở thành $7^x + (6x - 7^t) = 6t \Leftrightarrow 7^x + 6x = 7^t + 6t \Leftrightarrow x = t$.

Khi đó ta có PT: $6x - 7^x = m$. Xét hàm số $f(x) = 6x - 7^x; x \in \mathbb{R}$

Có $f'(x) = 6 - 7^x \ln 7 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_7 \frac{6}{\ln 7} = x_0$. Ta có BBT

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y'		0	
		+	-
y	$-\infty$	$y(x_0)$	$-\infty$

Từ BBT ta thấy PT có nghiệm

$$m \leq y(x_0) = 6 \log_7 \frac{6}{\ln 7} - 7^{\log_7 \frac{6}{\ln 7}} \approx 0,389$$

Mà $m \in (-20; 20); m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-19; -18; \dots; 0\}$

----HẾT----

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>