b) Xét hai tam giác AEM và AOC có góc A chung, $\widehat{AEM}=\widehat{AOC}=90^{\circ}$, do đó $\triangle AEM \propto \triangle AOC$ (g.g), suy ra $\frac{AE}{AO}=\frac{AM}{AC}$. Suy ra $AE \cdot AC = AM \cdot AO$.

c) Gọi I là giao điểm của MC và EF . Xét tứ giác CEMF có $\widehat{ACB}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{MEC}=\widehat{MFC}=90^{\circ}$ (giả thiết), do đó CEMF là hình chữ nhật nên $ME=CF$ và $IE=IF=\Im=IC$.

Lại có $\widehat{CAB}=\frac{1}{2}\widehat{COB}=45^{\circ}$ (tính chất góc nội tiếp) nên $\triangle EMA$ vuông cân tại E . Suy ra $AE=\overset{2}{EM}$. Do đó $AE=CF$. Có $\widehat{BCD}=\frac{1}{2}\widehat{BOD}=45^{\circ}$ (tính chất góc nội tiếp). Xét hai tam giác OAE và OCF có $OA=OC=R$, $AE=CF$, $\widehat{OAC}=\widehat{OCF}=45^{\circ}$ (chứng minh trên). Do đó $\triangle OAE=\triangle OCF$ (c.g.c), suy ra $OE=OF$.

Như vậy $\triangle OEF$ cân tại O mà I là trung điểm của EF nên $OI \perp EF$ (tính chất tam giác cân). Suy ra OI//MH.

Xét $\triangle CMD$ có I là trung điểm của MC (chứng minh trên), O là trung điểm của CD , do đó IO là đường trung bình của tam giác CMD nên $OI /$¿MD.

Do đó MH và MD cùng song song với OI nên H, M, D thẳng hàng.

Bài 4. Cho đường tròn ($O;R$), đường kính AB. Gọi H là trung điểm của OA. Vẽ dây $CD \perp AB$ tại H . Điểm K thuộc đoạn HC , nối AK cắt đường tròn (O) tại M $(M \neq A)$, nối BM cắt CD tại N . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKN. Chứng minh:

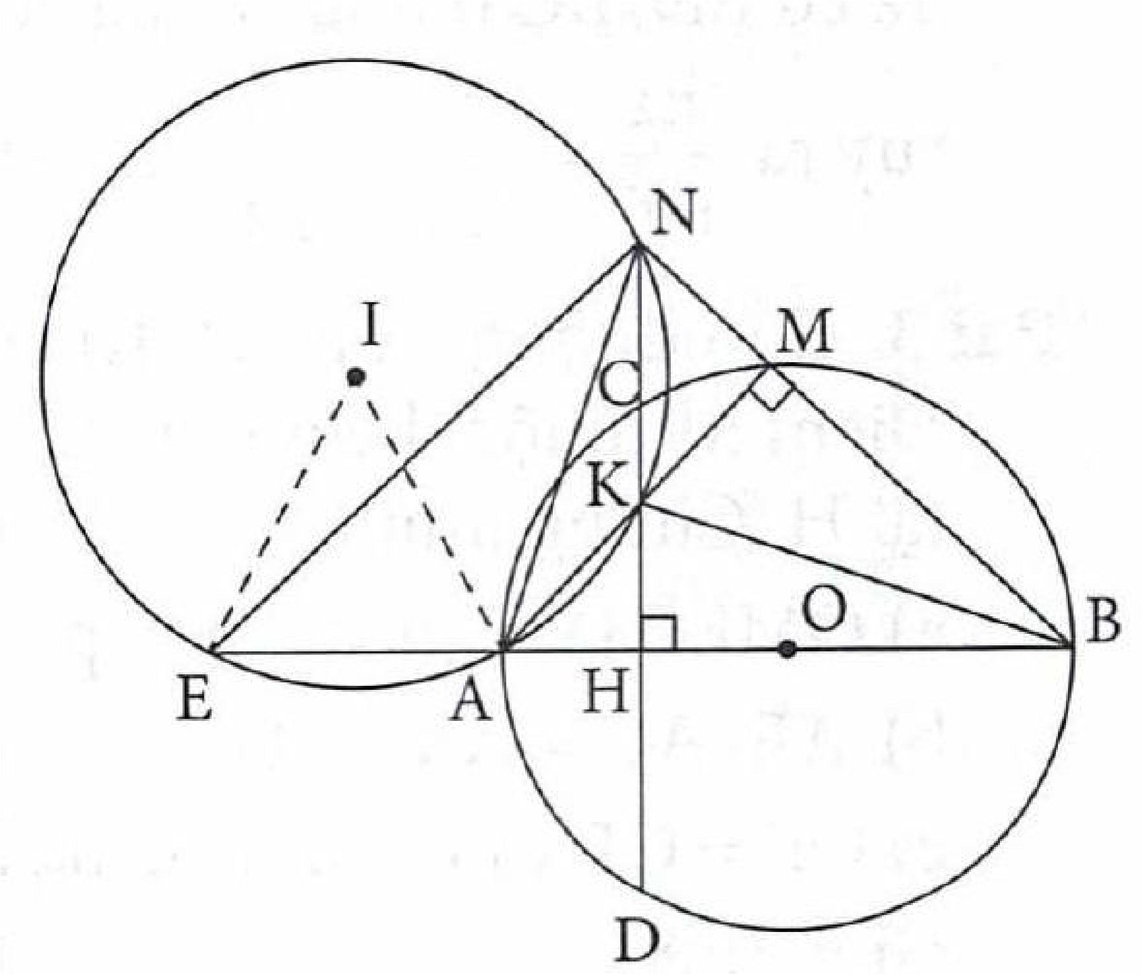
a) BMKH là tứ giác nội tiếp.

b) $BM \cdot BN = 3R^2$.

c) Khi K di chuyển trên HC thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Giải. (h.9)

a) Có $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{AMB}=90^{\circ}$. Do đó $\triangle KMB$ vuông tại M nên M thuộc đường tròn đường kính BK . Có $CH \perp AB$ nên $\triangle HBK$ vuông tại H do đó H thuộc đường tròn đường kính BK. Vậy tứ giác BMKH nội tiếp đường tròn đường kính BK .



Hinh 9

b) Xét hai tam giác BMA và BHN có $\widehat{ABM}$ chung, $\widehat{BMA}=\widehat{BHN}=90^\circ$, do đó $\triangle BMA \propto \triangle BHN$ (g.g), suy ra $\frac{BM}{BH}=\frac{BA}{BN}$ hay $BM \cdot BN = BA \cdot BH$. Mà $BH=\frac{3R}{2}, BA=2R$ nên $BH \cdot BA = 3R^2$. Vậy $BM \cdot BN = 3R^2$.

c) Gọi E là giao điểm của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác AKN . Suy ra AKNE là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{NEA}+\widehat{NKA}=180^\circ$. Do đó $\widehat{NEA}=\widehat{AKH}$.

Theo chứng minh trên, ta có BMKH là tứ giác nội iếp nên $\widehat{MBH}+\widehat{MKH}=180^\circ$, do đó $\widehat{MBH}=\widehat{AKH}$. Suy ra $\widehat{NEA}=\widehat{NBH}$ nên $\triangle$ NEB cân tại N .

Mà $NH \perp EB$ (giả thiết) nên $HE=HB$. Do H và B cố định nên E cố định. Có A và E cố định, $IA=IE$ nên I thuộc đường trung trực của AE. Vậy I thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 5. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB, điểm H thuộc đoạn OA. Vẽ dây $CD \perp AB$ tại H . Điểm I thuộc đoạn HC , nối AI cắt đường tròn tại M . Kẻ $CE \perp AM$ tại E , nối HM cắt CE tại K . Chứng minh:

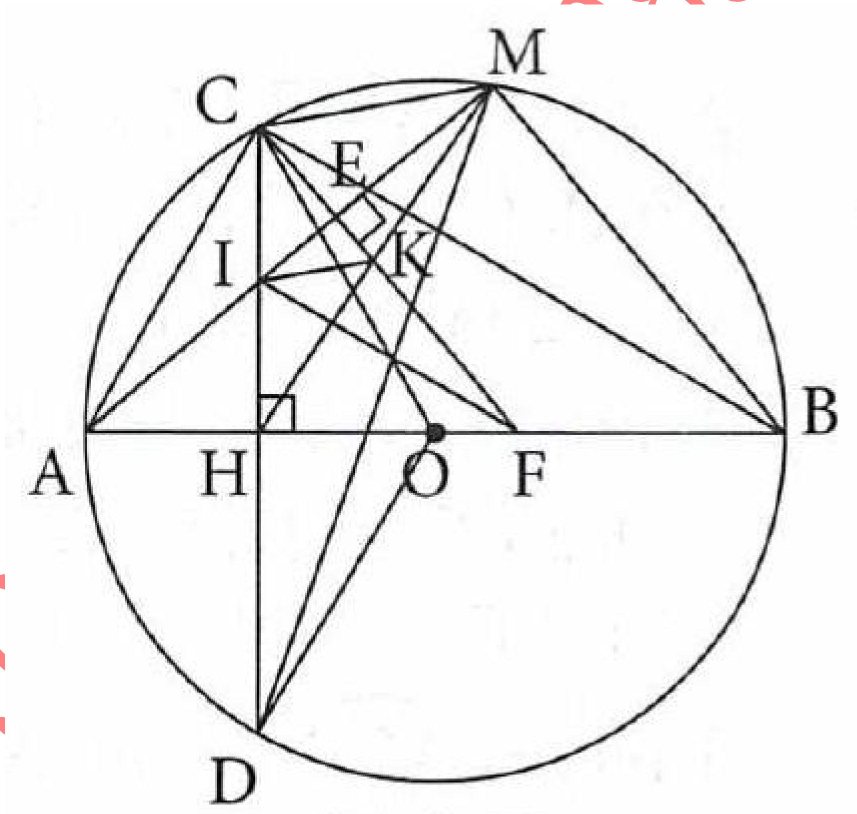
a) BMIH là tứ giác nội tiếp.

b) $\triangle ACM \propto \triangle DIM$.

c) $IK/$¿CM.

Giải. (h.10)

a) Ta có $\widehat{AMB}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\triangle MBI$ vuông tại M , do đó M thuộc đường tròn đường kính BI . Theo giả thiết $CH \perp AB$ tại H nên $\triangle HBI$ vuông tại H , do đó H thuộc đường tròn đường kính BI. Vậy tứ giác BMIH nội tiếp đường tròn đường kính BI .



Hình 10

b) Vì $OC=OD=R$ nên $\triangle OCD$ cân tại O . Mà $OH \perp CD$ nên OH là phân giác của góc COD , suy ra $\widehat{AOC}=\widehat{AOD}$. Theo tính chất góc nội tiếp $\widehat{AMC}=\frac{1}{2}\widehat{AOC}$, $\widehat{AMD}=\frac{1}{2}\widehat{AOD}$, do đó $\widehat{AMC}=\widehat{AMD}$.

Vì tứ giác BMIH nội tiếp nên $\widehat{HIM}+\widehat{HBM}=180^{\circ}$. Tứ giác ACMB nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{ACM}+\widehat{ABM}=180^{\circ}$. Suy ra $\widehat{DIM}=\widehat{ACM}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ACM \subset \triangle DIM$ (g.g).

c) Gọi F là giao điểm của CE và AB . Tam giác ACF có $AE \perp CF, CH \perp AF$ nên I là trực tâm của $\triangle ACF$, suy ra $FI \perp AC$. Mà $\widehat{ACB}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $FI/$¿BC. Do đó $\triangle HFI \propto \Delta HBC$ suy ra $\frac{FI}{BC}=\frac{HF}{HB}$. Có $CF/$¿MB nên $\frac{HF}{HB}=\frac{FK}{MB}$ suy ra $\frac{FI}{BC}=\frac{FK}{MB}$.

Ta có $CF/$¿MB nên $\widehat{FCB}=\widehat{CBM}$ (hai góc so le trong), $FI/$¿BC nên $\widehat{IFK}=\widehat{FCB}$ (hai góc so le trong). Do đó $\widehat{IFK}=\widehat{CBM}$.

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle IFK \propto \triangle CBM$ (c.g.c). Do đó $\widehat{IKF}=\widehat{CMB}$.

Suy ra $\widehat{CKI}=180^{\circ}-\widehat{IKF}=180^{\circ}-\widehat{CMB}=180^{\circ}-\left(\widehat{CMA}+90^{\circ}\right)$

¿$180^{\circ}-\widehat{CMA}-90^{\circ}=90^{\circ}-\widehat{CMA}=\widehat{ECM}\,($ do $\triangle EMC$ vuông tại $E)$.

Vậy $\widehat{CKI}=\widehat{ECM}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $IK/$¿CM.

Bài 6. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, điểm M thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tại D cắt MB tại N. Nối AM cắt CD tại E .

a) Chứng minh bốn điểm M, E, D, N thuộc cùng một đường tròn.

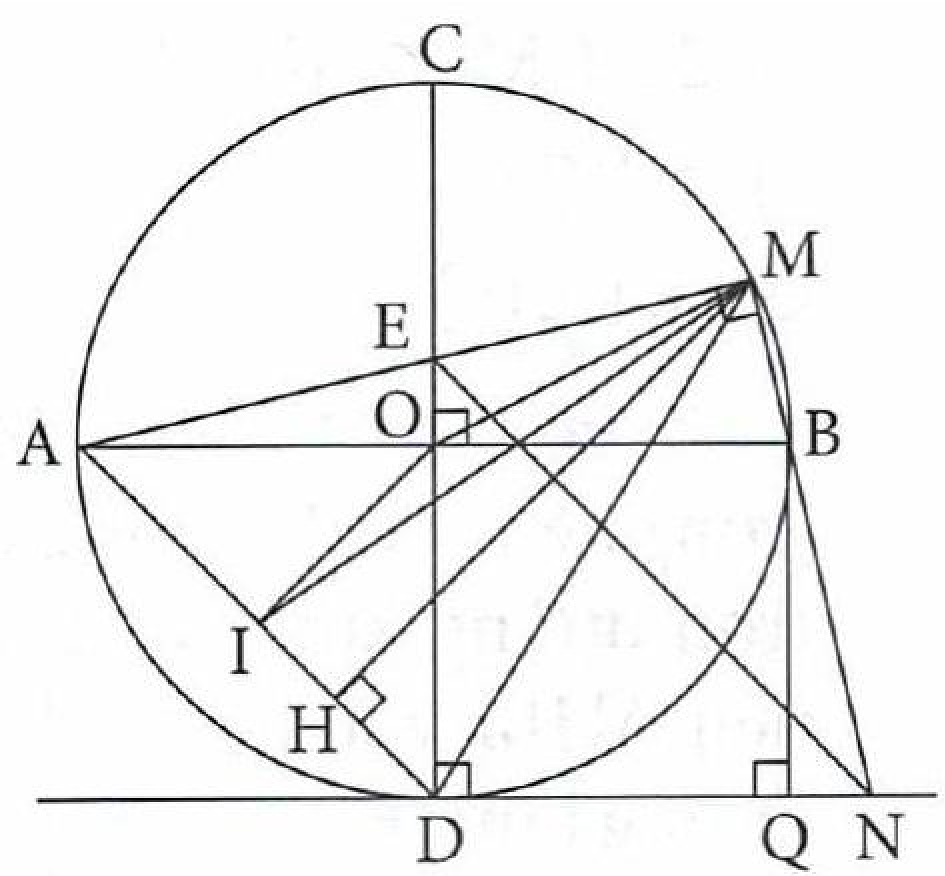
b) Chứng minh $AM \cdot BN=2R^{2}$.

c) Tìm vị trí của M để diện tích tam giác MAD có giá trị lớn nhất.

Giải. (h.11)

a) Ta có $\widehat{AMB}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $OD \perp DN$ (DN là tiếp tuyến). Do đó $\triangle MEN$ vuông tại M, $\triangle DEN$ vuông tại D . Suy ra bốn điểm M, E, D, N thuộc đường tròn đường kính EN .

b) Kẻ $BQ \perp DN$, khi đó OBQD là hình chữ nhật nên $BQ=OD$. Tứ giác $MEDN$ nội tiếp nên $\widehat{BNQ}=\widehat{AEO}$ (cùng bù với góc MED).



Hinh 11

Lai có $\widehat{BQN}=\widehat{AOE}=90^\circ$ nên $\triangle OAE \propto \triangle QBN\,(g.g)$, suy ra $\frac{AE}{BN}=\frac{AO}{BQ}=\frac{R}{R}=1$.

Do đó $AE=BN$. Xét $\triangle AOE$ và $\triangle AMB$ có $\widehat{AOE}=\widehat{AMB}=90^\circ, \widehat{OAE}$ chung.

Do đó $\triangle AOE \subset \triangle AMB\,(g.g)$, suy ra $\frac{AO}{AM}=\frac{AE}{AB}$.

Do đó $AM \cdot AE = AO \cdot AB = R \cdot 2R = 2R^2$. Mà $AE=BN$ nên $AM \cdot BN = 2R^2$.

c) Kẻ $MH \perp AD$ tại H . Gọi I là trung điểm của AD . Do $\triangle OAD$ cân tại O nên $OI \perp AD$. Ta có $MH \leq MI$, $MI \leq MO+OI$, suy ra $MH \leq MO+OI$ (không đổi). Dấu "=" xảy ra khi I, O, M thẳng hàng.

Ta có $S_{MAD}=\frac{1}{2}AD \cdot MH \leq \frac{1}{2}AD \cdot (MO+OI)$ với AD không đổi.

Vậy S_{MAD} lớn nhất khi ba điểm I, O, M thẳng hàng.

Bài 7. Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Điểm E thuộc đoạn OC , nối AE cắt đường tròn (O) tại M . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME .

a) Chứng minh $OBME$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AE \cdot AM = AC^2$.

c) Tìm vị trí của E để $MA = 2MB$.

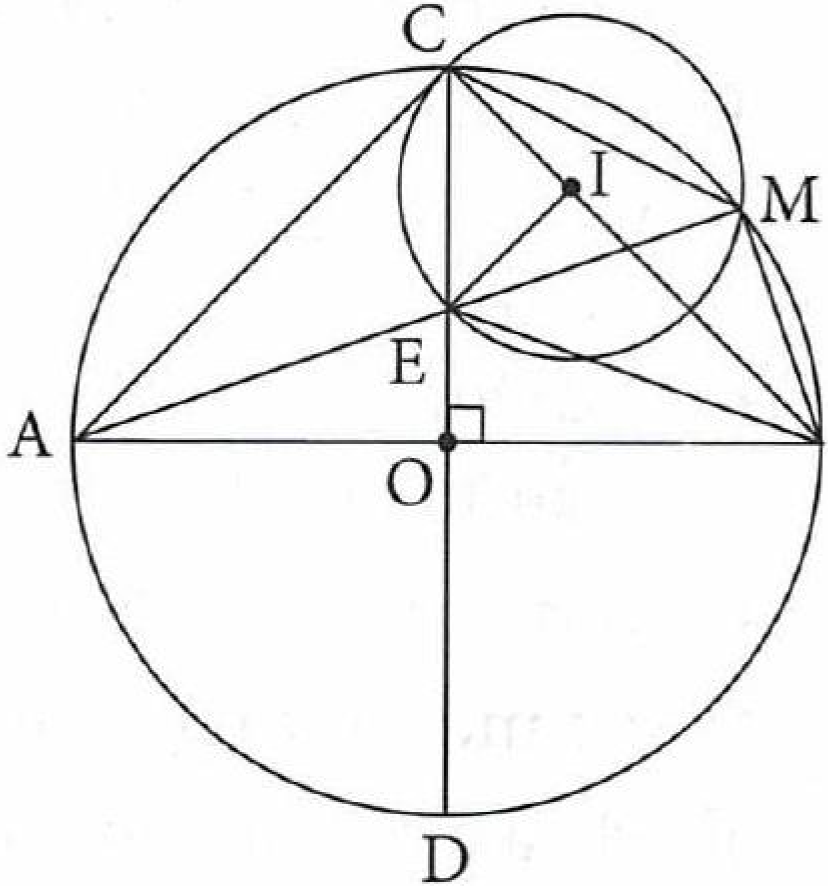
d) Cho E di chuyển trên OC , chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định.

Giải. (h.12)

a) Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\triangle MBE$ vuông tại M , do đó M thuộc đường tròn đường kính BE . Vì $AB \perp CD$ nên $\triangle EOB$ vuông tại O , do đó O thuộc đường tròn đường kính BE . Vậy bốn điểm O, B, M, E cùng thuộc đường tròn đường kính BE . Suy ra OBME là tứ giác nội tiếp.

b) Theo tính chất góc nội tiếp $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 45^\circ$,

$\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 45^\circ$.



Hinh 12

Xét $\triangle ACE$ và $\triangle AMC$ có $\widehat{MAC}$ chung, $\widehat{ACE}=\widehat{AMC}=45^\circ$ nên $\triangle ACE \propto \triangle AMC$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AC}{AM}=\dfrac{AE}{AC}$ do đó $AM \cdot AE = AC^2$.

c) Xét $\triangle AOE$ và $\triangle AMB$ có $\widehat{AOE}=\widehat{AMB}=90^\circ$, $\widehat{MAB}$ chung nên $\triangle AOE$ cs $\triangle AMB$ (g.g), suy ra $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{MB}{MA}=\dfrac{1}{2}$. Do đó $OE=\dfrac{1}{2}OA$ mà $OA=OC=R$ nên $OC=2OE$. Vậy $MA=2MB$ khi E là trung điểm OC .

d) Trong đường tròn $(O;R)$ có $\widehat{CMA}=\dfrac{1}{2}\widehat{COA}=45^\circ$. Trong đường tròn (I) có $\widehat{CME}=\dfrac{1}{2}\widehat{CIE}=45^\circ$. Do đó $\widehat{CIE}=90^\circ$. Xét $\triangle ICE$ có $IC=IE=R'$ và $\widehat{CIE}=90^\circ$ nên $\triangle ICE$ vuông cân tại I . Do đó $\widehat{ECI}=45^\circ$ hay $\widehat{OCI}=45^\circ$. Xét $\triangle OBC$ có $\widehat{COB}=90^\circ, OB=OC=R$ nên $\triangle OBC$ vuông cân tại O , do đó $\widehat{OCB}=45^\circ$.

Như vậy $\widehat{OCB}=\widehat{OCI}=45^\circ$ nên C, I, B thẳng hàng. Do đó I thuộc đường thẳng BC cố định.

Bài 8. Cho đường tròn $(O;R)$, dây CD không qua O . Lấy M thuộc tia đối của tia CD . Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A thuộc cung nhỏ CD). Gọi I là trung điểm của CD , nối OM cắt AB tại H . Qua A kẻ đường thẳng song song với IB cắt OI và MD lần lượt tại E và F . Chứng minh:

a) Năm điểm M, A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn.

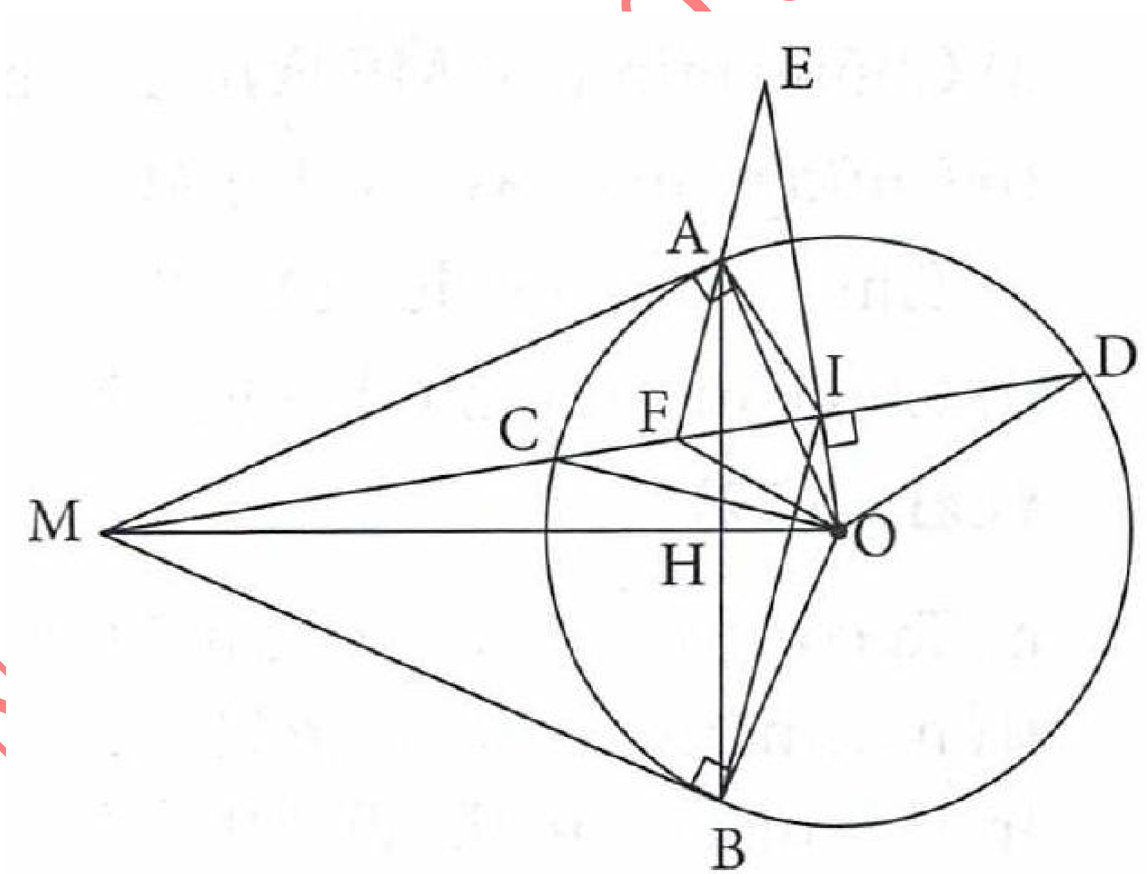
b) IM là phân giác của góc AIB.

c) A là trung điểm của EF .

Giải. (h.13)

a) Ta có $OC=OD=R$ nên $\triangle OCD$ cân tại O , mà I là trung điểm của CD , suy ra $OI \perp CD$. Do đó $\triangle IOM$ vuông tại I nên I thuộc đường tròn đường kính OM .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA \perp MA$, $OB \perp MB$ nên $\triangle AOM$ vuông tại A , ΔBOM vuông tại B, suy ra A và B cùng thuộc đường tròn đường kính OM . Vậy năm điểm M, A, B, O, I cùng thuộc đường



Hinh 13 tròn đường kính OM .

b) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $MA = MB$, mà năm điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{MA} = \widehat{MB}$. Có $\widehat{AIM}$ là góc nộit tiếp chắn cung MA, $\widehat{\text{BIM}}$ là góc nội tiếp chắn cung MB nên $\widehat{AIM} = \widehat{BIM}$, suy ra IM là phân giác của góc AIB.

c) Vi EF/¿IB nên $\widehat{AFI} = \widehat{FIB}$ (hai góc so le trong). Do đó $\widehat{AFI} = \widehat{AIF}$ nên $\triangle AIF$ cân tại A suy ra $AI = AF$. Mà ΔIEF vuông tại I nên $\widehat{AFI} + \widehat{AEI} = 90^\circ$ và $\widehat{AIF} + \widehat{AIE} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{AIE} = \widehat{AEI}$ nên $\triangle AIE$ cân tại A , suy ra $AI = AE$.

Vậy $AE = AF$ hay A là trung điểm của EF .

3. Bài tập tự luyện

Bài 1. Từ điểm A cố định ở ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ đường thẳng cắt đường tròn tại $M, N\,(AM < AN)$ và hai tiếp tuyến $AB, AC\,(B$ thuộc cung lớn MN$)$. Gọi I là trung điểm của MN , nối CI cắt đường tròn $(O; R)$ tại E , nối AO cắt đường tròn tại K . Chứng minh:

a) Bốn điểm A, O, I, C cùng thuộc một đường tròn.

b) K là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

c) BE/¿MN. Cho A cố định, tìm vị trí của N để diện tích $\triangle AEN$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C là điểm chính giữa cung AB . Điểm M thuộc cung nhỏ BC . Kẻ $CH \perp AM$ tại H , nối BC cắt OH tại I . Nối MI cắt nửa đường tròn tại D . Chứng minh:

a) Bốn điểm A, O, H, C cùng thuộc một đường tròn.

b) $OH \perp CM$.

c) CM/¿BD. Tìm vị trí của M để ba điểm B, H, D thẳng hàng.

Bài 3. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây $EF\,(E \in \acute{AF}, AE < BF)$. Nối AE cắt BF tại M, nối AF cắt BE tại H. Gọi I là trung điểm của MH. Nối OI cắt EF tại N . Kẻ $IK \perp OH$ tại K, IK cắt EF tại P . Chứng minh:

a) MEHF là tứ giác nội tiếp.

b) $AE \cdot AM = AF \cdot AH$.

c) $OI \perp EF$ và PH/¿AB.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $CE \cdot CA + BF \cdot BA = BC^2$.

c) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$ cắt đường tròn (O) tại K . Chứng minh ba điểm K, H, M thẳng hàng.

Bài 5. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn tại A. Lấy M thuộc Ax , kẻ tiếp tuyến MC với đường tròn, C là tiếp điểm. Gọi H là trực tâm của $\triangle MAC$.

a) Chứng minh MCBO là hình thang

b) Cho $\widehat{ABC}=60^\circ$, tính theo R độ dài đoạn thẳng MA .

c) Khi M di chuyển trên Ax , chứng minh H thuộc một đường tròn cố định.

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ dây $CD\left(C\in \overset{\frown}{AD}\right)$. Nối AD cắt BC tại H, AC cắt BD tại M .

a) Chứng minh MCHD là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $MC\cdot CA=HC\cdot CB$.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCHD , chứng minh $KC\perp OC$.

Bài 7. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ tiếp xúc ngoài tại $K\,(R<R)$. Gọi KB , KC lần lượt là đường kính của các đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. Gọi Kx là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tại K. Lấy điểm A thuộc Kx. Nối AB cắt đường tròn $(O;R)$ tại D, AC cắt đường tròn $(O';R)$ tại E . Nối DE cắt đường tròn $(O;R)$ tại M , cắt đường tròn $(O';R)$ tại N và cắt BC tại Q . Nối BM cắt CN tại H . Chứng minh:

a) ADKE là tứ giác nội tiếp..

b) $QB\cdot QC=QD\cdot QE$.

c) Ba điểm A, H, K thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AK . Kẻ BE và CF cùng vuông góc với AK . Gọi AD là đường cao của tam giác ABC .

a) Chứng minh ABDE và ACFD là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $DF/¿BK$.

c) Cho BC cố định, A di chuyển trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, chứng minh tầm đường tròn ngoại tiếp $\triangle \stackrel{\text{def}}{=} ¿$ là một điểm cố định.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác vẽ hai nửa đường tròn: nửa đường tròn tâm I đường kính AB và nửa đường tròn tâm K đường kính AC . Điểm M thuộc nửa đường tròn (I), MA cắt nửa đường tròn (K) tại N .

a) Tứ giác MNCB là hình gì?

b) Chứng minh $AM \cdot AN = BM \cdot CN$.

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác BMNC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10. Cho đường tròn (O) có hai bán kính OA và OB vuông góc với nhau. Điểm M thuộc cung lớn AB sao cho tam giác MAB có ba góc nhọn. Các đường cao AE và BF của tam giác MAB cắt nhau tại H, đồng thời cắt đường tròn (O) lần lượt tại P và Q . Các đường thẳng PB và QA cắt nhau tại S , nối SH cắt PQ tại I. Chứng minh:

a) P, O, Q là ba điểm thẳng hàng.

b) $SH = PQ$.

c) I luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 11. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn, nối MO cắt AB tại H . Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Kẻ $BK \perp AC$ tại K. Nối MC cắt đường tròn (O) tại E , cắt BK tại I . Gọi Q là trung điểm của BC . Chứng minh:

a) Bốn điểm B, H, O, K cùng thuộc một đường tròn.

b) $ME \cdot MC = MH \cdot MO$.

c) Ba điểm H, I, Q thẳng hàng.

Bài 12. Cho tứ giác $ABCD\,(AB < CD)$ nội tiếp đường tròn (O), đường kính AD . Nối AC cắt BD tại H, AB cắt CD tại K, KH cắt AD tại E .

a) Chứng minh ABHE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $EA \cdot ED = EH \cdot EK$.

c) Qua E kẻ đường thẳng song song với BC và cắt AB, DH lần lượt tại M và N . Chứng minh $EM = EN$.

Bài 13. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AC . Kẻ tiếp tuyến Ax với đường tròn tại A. Lấy M thuộc Ax, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn $(B \neq A)$. Gọi H là giao điểm của AB với OM . Kẻ $BK \perp AC$ tại K . Nối MC cắt BK tại I , cắt đường tròn (O) tại N . Gọi E là trung điểm của BC . Chứng minh:

a) $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) $CN \cdot CM = 4R^2$.

c) Ba điểm H, I, E thẳng hàng.

Bài 14. Cho tam giác $ABC\,(AB<AC)$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Nối EF cắt CB tại M , cắt AD tại I. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC và cắt AM tại N, cắt AD tại K. Chứng minh:

a) BCEF là tứ giác nội tiếp.

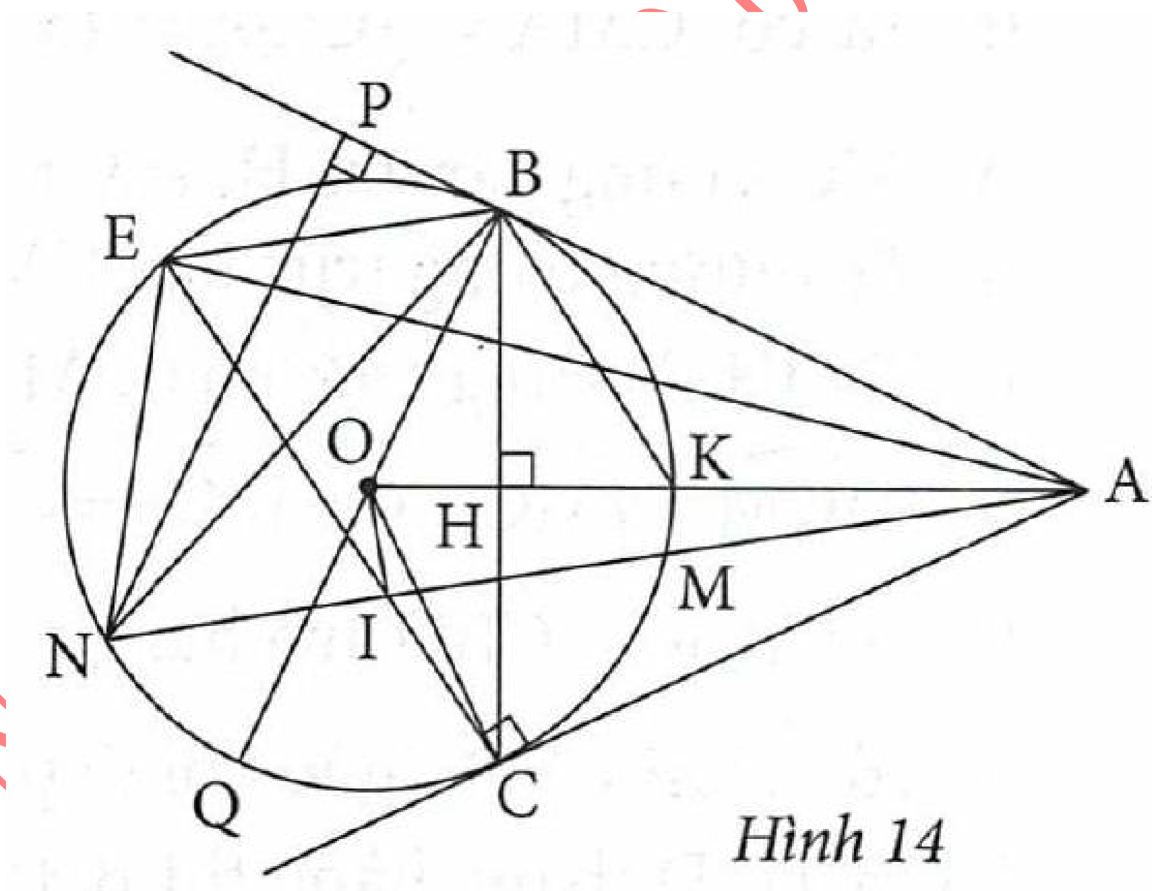
b) $ME \cdot MF = MB \cdot MC$.

c) F là trung điểm của KN .

Hướng dẫn - Lời giải - Đáp số

Bài 1. (h.14)

a) Vì $OM = ON = R$ nên $\triangle OMN$ cân tại O , mà ℑ=¿ nên $OI \perp MN$ (tính chất tam giác cân). Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OC \perp CA$, do đó $\triangle IOA$ vuông tại I và ΔCOA vuông tại C . Suy ra bốn điểm O, A, C , I thuộc đường tròn đường kính OA .



Hình 14

b) Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OB\perp BA$ nên $\widehat{ABK}+\widehat{KBO}=90^{\circ}$.

Có $AB=AC$ (tính chất tiếp tuyến), $OB=OC=R$ nên OA là trung trực của BC . Suy ra $OA\perp BC$ tại H , do đó: $\widehat{KBC}+\widehat{OKB}=90^{\circ}$.

Mà $OB=OK=R$ nên $\triangle OBK$ cân tại O , do đó $\widehat{OBK}=\widehat{OKB}$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{KBC}=\widehat{KBA}$ hay BK là phân giác của $\widehat{ABC}$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có AO là phân giác của $\widehat{BAC}$. Vậy K là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

c) Có $\widehat{BEC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (tính chất góc nội tiếp). Mà OA là phân giác của $\widehat{BOC}$ nên

$\widehat{AOC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$. Do đó $\widehat{BEC}=\widehat{AOC}$.

Tứ giác AOIC nội tiếp nên $\widehat{AOC}=\widehat{AIC}$ (cùng chắn $\acute{A}C$).

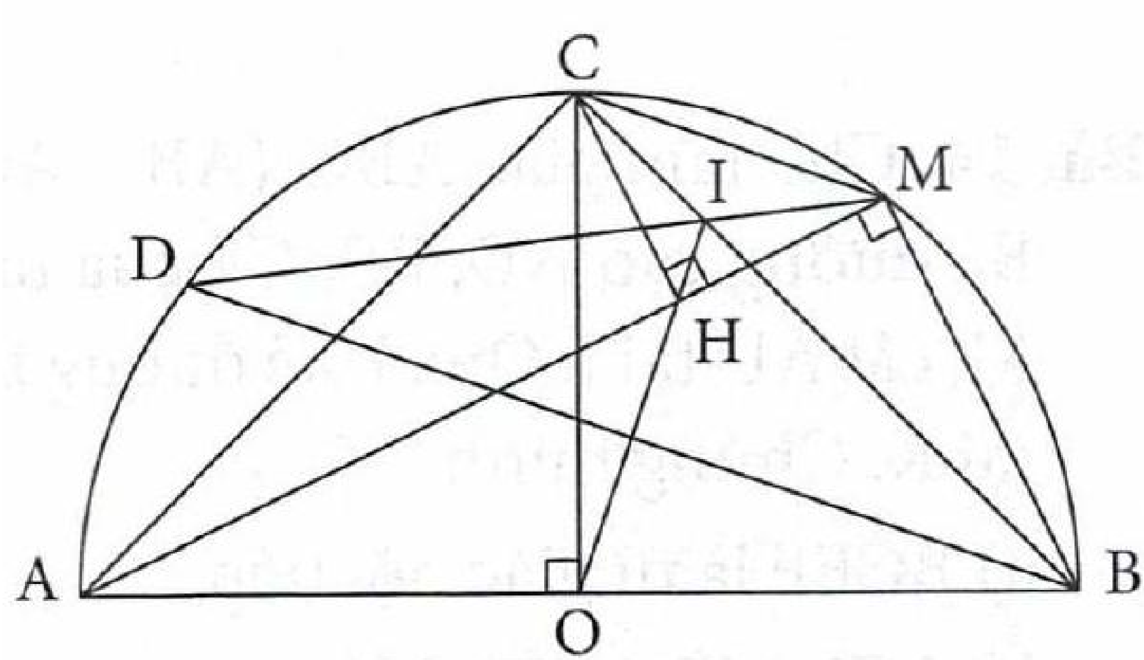
Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{BEC}=\widehat{AIC}$ mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $BE/$¿MN. Vì $BE/$¿MN nên $S_{AEN}=S_{ABN}$. Do đó S_{AEN} lớn nhất khi S_{ABN} lớn nhất. Kẻ đường kính BQ , kẻ $NP\perp AB$ tại P , ta có $NP\le NB, NB\le BQ$ (quan hệ giữa dây cung và đường kính). Suy ra $NP\le BQ$.

Ta có $S_{ABN}=\frac{1}{2}AB\cdot NP\le\frac{1}{2}AB\cdot BQ$, suy ra $S_{ABN}\le AB\cdot R$ hay $S_{AEN}\le AB\cdot R$.

Dấu "=" xảy ra khi $N\equiv Q$. Vậy S_{AEN} lớn nhất khi N, O, B thẳng hàng.

Bài 2. (h.15)

a) Theo giả thiết $\acute{C}A=\acute{C}B$ nên $\widehat{AOC}=\widehat{BOC}=90^{\circ}$. Có $CH\perp AM$ tại H nên $\triangle AOC$ vuông tại O và $\triangle AHC$ vuông tại H. Suy ra bốn điểm A, O, H, C thuộc đường tròn đường kính AC .



Hinh 15

b) Ta có $\widehat{CMA}=\frac{1}{2}\widehat{COA}=45^{\circ}$ (tính chất góc nội tiếp), mà $CH\perp AM$ nên ΔHMC vuông cân tại H , suy ra $HC=HM$. Lại có $OC=OM=R$ nên O và H thuộc đường trung trực của CM , suy ra $OH\perp CM$.

c) Vì OH là trung trực của CM và $I\in OH$ nên $IC=\Im$, do đó $\triangle ICM$ cân tại I , nên $\widehat{ICM}=\widehat{IMC}$. Mà $\widehat{IMC}=\widehat{CBD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$).

Suy ra $\widehat{ICM}=\widehat{CBD}$ mà hai góc ở vị trí so le trong nên CM /¿ BD.

Ta có $\widehat{AMB}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên CH /¿ MB.

Để B,H,D thẳng hàng thì BH /¿ CM. Khi đó BMCH là hình bình hành nên BC cắt HM tại trung điểm của BC .

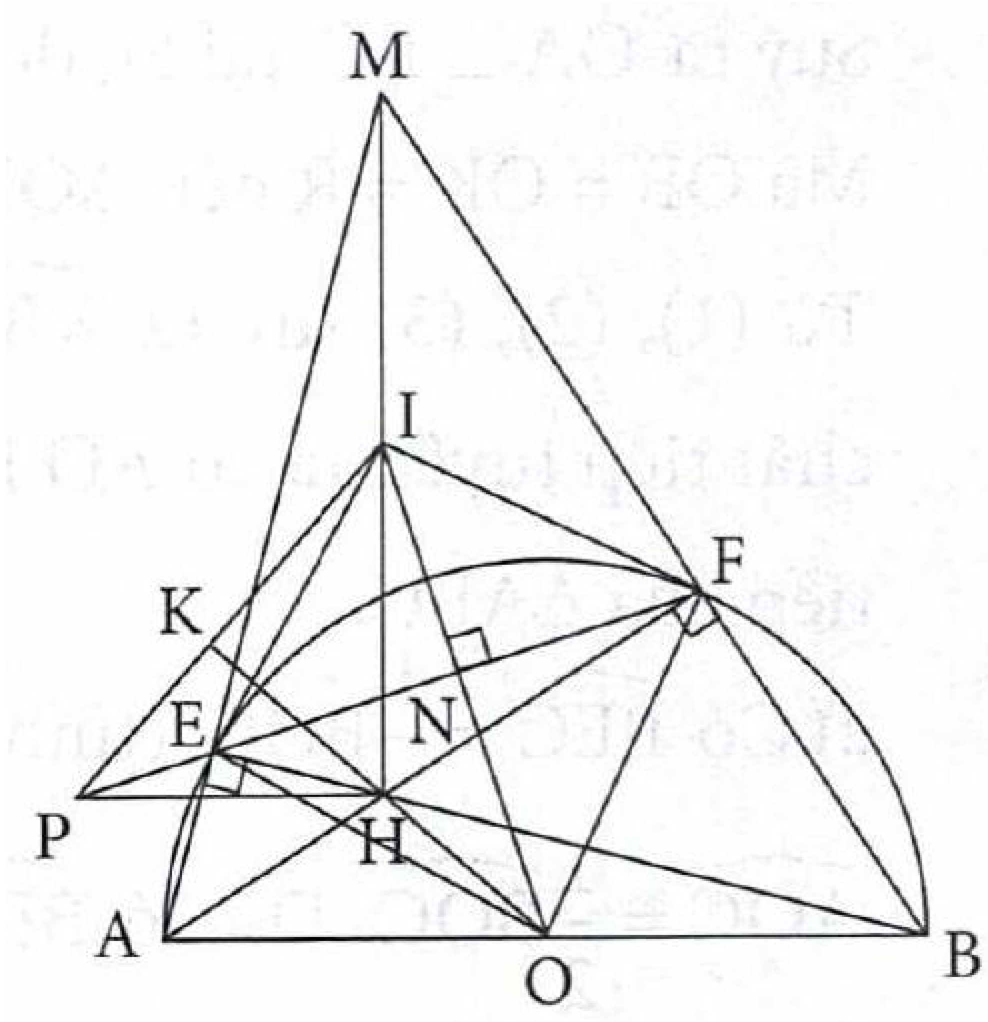
Vậy B,H,D thẳng hàng khi AM đi qua trung điểm của BC .

Bài 3. (h.16)

a) Vì E và F thuộc đường tròn (O) đường kính AB nên $\widehat{AEB}=\widehat{AFB}=90^{\circ}$.

Do đó $\widehat{MEH}=\widehat{MFH}=90^{\circ}$, suy ra $\triangle EMH$ và $\triangle FMH$ vuông tại E và F. Do đó tứ giác MEHF nội tiếp đường tròn đường kính MH .

b) Xét hai tam giác AEH và AFM có $\widehat{MAF}$ chung, $\widehat{AEH}=\widehat{AFM}=90^{\circ}$, nên $\triangle AEH\propto\triangle AFM$ (g.g), suy ra $\frac{AE}{AF}=\frac{AH}{AM}$. Do đó $AE\cdot AM=AH\cdot AF$.



Hình 16

c) Có $EI=FI=\frac{1}{2}MH, OE=OF$ nên OI là trung trực của EF . Do đó $OI \perp EF$ tại N. Lại có H là trực tâm của tam giác MAB nên $MH \perp AB$, do đó $\widehat{HMB}+\widehat{MBA}=90^{\circ}$. Có $\Im=IF$ nên $\triangle IMF$ cân tại I , do đó $\widehat{IMF}=\widehat{IFM}$. Có $OF=OB$ nên $\triangle OFB$ cân tại O , do đó $\widehat{OFB}=\widehat{OBF}$. Do đó $\widehat{IFM}+\widehat{OFB}=90^{\circ}$, suy ra $\widehat{IFO}=90^{\circ}$.

Xét $\triangle INF$ và $\triangle IFO$ có $\acute{I}$ chung, $\widehat{INF}=\widehat{IFO}=90^{\circ}$ nên $\Delta INF \propto \Delta IFO(g.g)$, suy ra $\frac{IF}{IO}=\frac{¿}{IF}$ hay $IF^2=¿\cdot IO$. Mà $IF=IH$ nên $IH^2=¿\cdot IO$.

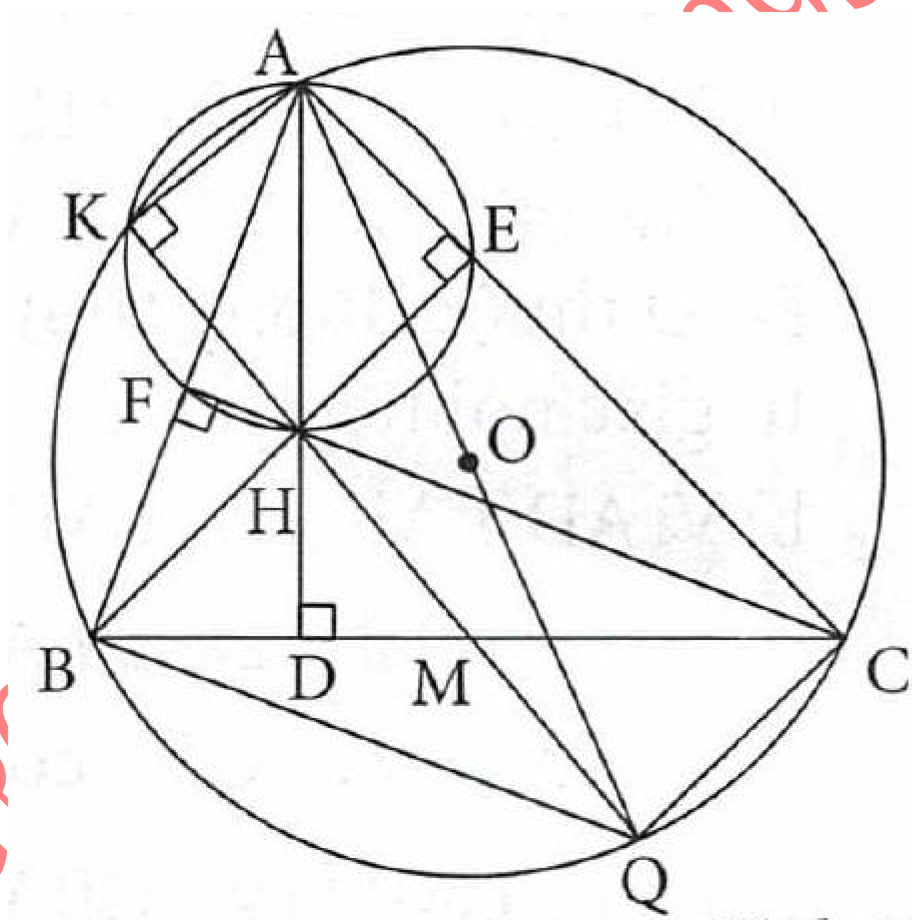
Xét ΔINP và ΔIKO có $\widehat{OIK}$ chung, $\widehat{INP}=\widehat{IKO}=90^{\circ}$ nên $\Delta INP cs \Delta IKO(g.g)$, suy ra $\frac{¿}{IK}=\frac{IP}{IO}$ hay $¿\cdot IO=IK\cdot IP$.

Từ (1) và (2) suy ra $IH^2 = IK \cdot IP$ hay $\frac{IH}{IK} = \frac{IP}{IH}$, do đó $\triangle IKH \propto \Delta IHP$ (c.g.c), suy ra $\widehat{IHP} = \widehat{IKH} = 90^\circ$. Từ đó ta có $PH \perp MH$ nên PH/¿AB.

Bài 4. (h.17)

a) Theo giả thiết có $BE \perp AC, CF \perp AB$ nên $\triangle BEC$ vuông tại E và $\triangle BFC$ vuông tại F. Suy ra bốn điểm B, C, E, F thuộc đường tròn đường kính BC.

b) Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên $AH \perp BC$ tại D. Xét $\triangle CEB$ và $\triangle CDA$ có $\widehat{CEB} = \widehat{CDA} = 90^\circ, \widehat{ACB}$ chung nên $\triangle CEB \subset \triangle CDA(g.g)$, suy ra $\frac{CE}{CD} = \frac{CB}{CA}$ hay $CE \cdot CA = CD \cdot CB$.



Hình 17

Tương tự ta có $\triangle BCF \propto \triangle BAD$ nên $\frac{BC}{BA} = \frac{BF}{BD}$ hay $BC \cdot BD = BF \cdot BA$.

Từ (1) và (2) suy ra $CE \cdot CA + BF \cdot BA = CD \cdot CB + BD \cdot BC = BC^2$.

c) Kẻ đường kính AQ của đường tròn (O) ta có $\widehat{ABQ} = \widehat{ACQ} = 90^\circ$.

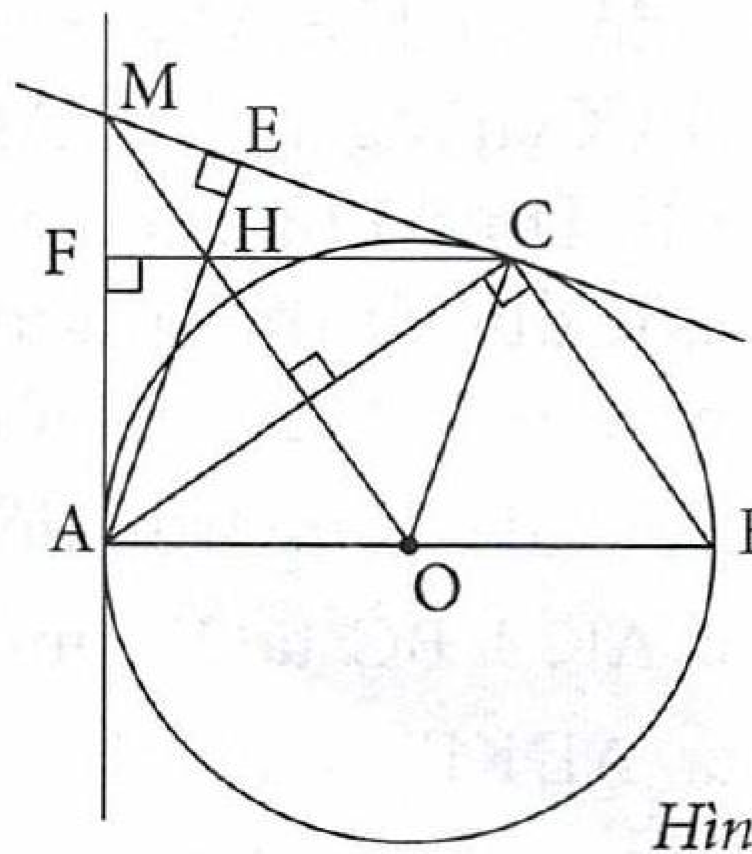
Lại có $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ nên $BH/\text{¿}CQ$ và $BQ/\text{¿}CH$ nên BHCQ là hình bình hành, mà M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của HQ (tính chất hình bình hành). Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ nên A, E, F, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH hay AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$. Lại có K thuộc đường tròn này nên $\widehat{AKH} = 90^\circ$ hay $HK \perp AK$.

Ta có $\widehat{AKQ} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $QK \perp AK$. Do đó Q, H, K thẳng hàng, mà Q, H, M thẳng hàng nên ba điểm K, H, M thẳng hàng.

Bài 5. (h.18)

a) Theo tính chất tiếp tuyến có $MA = MC$, lại có $OA = OC = R$ nên MO là trung trực của AC , suy ra $OM \perp AC$. Có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Do đó $CB/\text{¿}MO$, suy ra MCBO là hình thang.

b) Vì $OM/\text{¿}BC$ nên $\widehat{MOA} = \widehat{CBA} = 60^\circ$ (hai góc đồng vị).



Hình 18

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $OA \perp AM$. Trong $\triangle AMO$ vuông tại A ta có $MA = OA \cdot \tan \widehat{AOM}$ nên $MA = R \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}$.