

DẠNG 4**Cực trị liên quan đến hệ trục tọa độ****I. PHẦN ĐỀ BÀI**

- Câu 1.** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -2; 1); B(1; 0; -2); C(3; 1; -2); D(-2; -2; -1)$. Câu nào sau đây **sai**?
- A. Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. B. Tam giác ACD là tam giác vuông tại A .
 C. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù. D. Tam giác ABD là tam giác cân tại B .
- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 5 = 0$. Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ thỏa mãn đi qua A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất. Tính $a + b + c$
- A. 2. B. -2. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3}{2}$.
- Câu 3.** Trong không gian $(Oxyz)$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 11 = 0$. Tìm điểm M trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là ngắn nhất.
- A. $M(0; 0; 1)$. B. $M(2; -4; -1)$. C. $M(4; 0; 3)$. D. $M(0; -1; 0)$.
- Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 5 = 0$. Mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ thỏa mãn đi qua A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất. Tính $a + b + c$
- A. 2. B. -2. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3}{2}$.
- Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 3y - 2z - 29 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.
- A. 8. B. 10. C. -10. D. -8.
- Câu 6.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2; 0; -3)$; $B(-1; -2; 4)$; $C(2; -1; 2)$. Biết điểm $E(a; b; c)$ là điểm để biểu thức $P = |\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$
- A. $T = 3$. B. $T = 1$. C. $T = 0$. D. $T = -1$.
- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Gọi tọa độ điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $K = a + b + c$.
- A. $K = 1$. B. $K = 2$. C. $K = -5$. D. $K = -2$.

- Câu 8.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là
- A. $\sqrt{12}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\sqrt{24}$. D. $\sqrt{3}$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(9;-7;2)$. Tìm trên trục Ox tọa độ điểm M sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $M(5;0;0)$. B. $M(-2;0;0)$. C. $M(4;0;0)$. D. $M(9;0;0)$.
- Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z = 0$. Gọi d là đường thẳng đi qua $M(2;2;0)$, song song với (P) và tổng khoảng cách từ A , B đến đường thẳng d đạt giá trị nhỏ nhất. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của d ?
- A. $\vec{u}_1 = (-10;3;8)$. B. $\vec{u}_2 = (14;-1;-8)$. C. $\vec{u}_3 = (22;3;-8)$. D. $\vec{u}_4 = (-18;-1;8)$.
- Câu 11.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) có bán kính $r = 1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là bao nhiêu?
- A. $R = \sqrt{10}$. B. $R = \sqrt{10} - 1$. C. $R = 2\sqrt{2} - 1$. D. $R = 2\sqrt{2}$.
- Câu 12.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S) . Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng
- A. $\frac{4\sqrt{6}}{3} - 2$. B. 0 . C. $\sqrt{6} - 2$. D. $2\sqrt{6} - 2$.
- Câu 13.** Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$ và $a+b+c=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ là
- A. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. B. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. C. $5 - 2\sqrt{6}$. D. $5 + 2\sqrt{6}$.
- Câu 14.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a+b$ bằng
- A. 3 . B. 2 . C. 1 . D. -2 .
- Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 + c^2$.
- A. 25 . B. 29 . C. 24 . D. 26 .
- Câu 16.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1)$, $B(2;-1;1)$, $C(4;1;1)$ và $(P): x + y + z - 6 = 0$. Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc $mp(P)$ sao cho $|\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2a + 4b + c$ bằng:

A. 6.

B. 12.

C. 7.

D. 5.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ và hai điểm

$A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d thỏa mãn $P = MA^4 + MB^4 + MA^2 \cdot MB^2$ nhỏ nhất. Tìm y_0 .

A. $y_0 = 3$.B. $y_0 = 2$.C. $y_0 = 1$.D. $y_0 = -1$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11)$, $B(5;3;-4)$, $C(1;2;-6)$ và mặt $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6.

B. 2.

C. 4.

D. 9.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;-2;4)$, $B(-2;6;4)$, $C(5;-1;-6)$. Xét các điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $AMB = 90^\circ$, đoạn thẳng CM có độ dài lớn nhất bằng

A. $\sqrt{73}$.B. $5\sqrt{3}$.

C. 10.

D. 8.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6.

B. $\frac{21}{4}$.

C. 8.

D. 9.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

A. 54.

B. 282.

C. 256.

D. 328.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ và điểm $M(a;b;c) \in (S)$ sao cho biểu thức $P = a + 2b + 2c$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A. 2.

B. 1.

C. -2.

D. -1.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-3)^2 + (y+4)^2 = 4$. Xét hai điểm M, N di động trên (S) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $OM^2 - ON^2$ bằng

A. -10.

B. $-4-3\sqrt{5}$.

C. -5.

D. $-6-2\sqrt{5}$.

Câu 24. Cho điểm $A(-3;5;-5)$, $B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z=0$. Xét điểm M thay đổi trên (α) , giá trị lớn nhất của $MA^2 - 2MB^2$ bằng

A. 398.

B. 379.

C. 397.

D. 498.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(2;1;3)$, vuông góc với

đường thẳng d và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Khi đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; a; b)$. Tính $a + b$.

- A. 4. B. -2. C. $-\frac{1}{2}$. D. 5.

Câu 26. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(-1; 2; 2)$, $B(3; -1; -2)$, $C(-4; 0; 3)$. Tìm tọa độ điểm I trên mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $|\overline{IA} - 2\overline{IB} + 5\overline{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $I\left(-\frac{37}{4}; 0; \frac{19}{4}\right)$. B. $I\left(-\frac{27}{4}; 0; \frac{21}{4}\right)$. C. $I\left(\frac{37}{4}; 0; -\frac{23}{4}\right)$. D. $I\left(\frac{25}{4}; 0; -\frac{19}{4}\right)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-1; 3; 4)$, $B(3; 1; 0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của điểm M .

- A. $x_0 = 4$. B. $x_0 = 3$. C. $x_0 = 2$. D. $x_0 = 1$.

Câu 28. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (1; -1; 0)$ và hai điểm $A(-4; 7; 3)$, $B(4; 4; 5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overline{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

- A. $\sqrt{17}$. B. $\sqrt{77}$. C. $7\sqrt{2} - 3$. D. $\sqrt{82} - 5$.

Câu 29. Cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và hai điểm $A(3; 0; 0)$, $B(4; 2; 1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$.

- A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $6\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ A, B, C với $a, b, c > 0$ sao cho $OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1 + \sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $V_{O.ABC}$ bằng

- A. $\frac{1}{108}$. B. $\frac{1}{486}$. C. $\frac{1}{54}$. D. $\frac{1}{162}$.

Câu 31. Trong không gian Oxyz, cho $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(0; 1; -2)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} + 3\overline{MC} \cdot \overline{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là

- A. $T = 3$. B. $T = -3$. C. $T = 1$. D. $T = -1$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, gọi điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0$ sao cho biểu thức $T = 2a + 3b + 6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$ bằng

- A. $\frac{12}{7}$. B. 8. C. 6. D. $\frac{51}{7}$.

Câu 33. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(2; -3; 2)$, $B(-2; 1; 4)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 12$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ nhỏ nhất, tính $a + b + c$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. -4 .

C. 1 .

D. 4 .

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 103 .

B. 108 .

C. 105 .

D. 100 .

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Các điểm M , N lần lượt thuộc các đoạn $A'B'$ và $A'D'$ sao cho hai mặt phẳng (MAC') và (NAC') vuông góc với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A'MC'N$.

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 36. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3; 0; 0); B(4; 2; 1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = 3\sqrt{2}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 6\sqrt{2}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2t; 2t; 0), B(0; 0; t)$ với $t > 0$. Cho điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất là 3. Tính giá trị $Q = 2a + b$?

A. 5 .

B. 13 .

C. 11 .

D. 9 .

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 6)$ và $D(1; 1; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất, hỏi

Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(-1; -2; 1)$.

B. $M(5; 7; 3)$.

C. $M(3; 4; 3)$.

D. $M(7; 13; 5)$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-m)^2 = \frac{m^2}{4}$ và hai

điểm $A(2; 3; 5), B(1; 2; 4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 9$.

A. $m = 1$.

B. $m = 3 - \sqrt{3}$.

C. $m = 8 - 4\sqrt{3}$.

D. $m = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3; 0; 0); B(4; 2; 1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = 3\sqrt{2}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 6\sqrt{2}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;2); B(0;-1;-3)$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (Oxz) , giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ bằng?

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 4 = 0$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1) ; hai đỉnh C, D nằm trên (S_2) . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $6\sqrt{3}$. D. $6\sqrt{2}$.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn A

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; -3); \overrightarrow{CD} = (-5; -3; 1); \overrightarrow{AC} = (3; 3; -3); \overrightarrow{BD} = (-3; -2; 1); \overrightarrow{AD} = (-2; 0; -2)$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -6; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) = 0.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng. Vậy đáp án A sai.

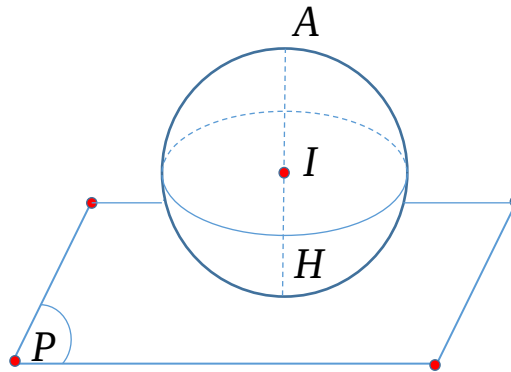
$$\text{Lại có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + (-3) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow AC \perp AD.$$

$\Rightarrow$ tam giác ACD là tam giác vuông tại A . Vậy đáp án B đúng.

Mặt khác: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 = -14 < 0 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) < 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ là góc tù. Vậy đáp án C đúng.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{14} \text{ hay } AB = BD \Rightarrow \text{tam giác } ABD \text{ là tam giác cân tại } B. \text{ Vậy đáp án D đúng.}$$

Câu 2. Chọn A



Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi $H = \Delta \cap (P)$ ta có: $H(1+2t; 2+t; 3+t)$ và $H \in (P)$ nên ta có:

$$2(1+2t) + (2+t) + (3+t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3; 0; 1)$$

Mặt cầu tâm I đi qua A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất nên có đường kính là đoạn AH với H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) .

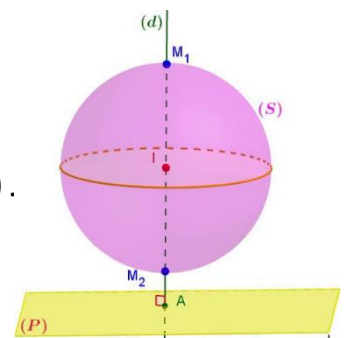
Gọi $I(a; b; c)$ là tọa độ trung điểm của AH ta có: $I(-1; 1; 2) \Rightarrow a + b + c = 2$.

Câu 3. Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có: $d(I, (P)) = 4 > R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) .

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) .



Suy ra phương trình đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Gọi M_1, M_2 là các giao điểm của d và (S) .

Khi đó tọa độ điểm M_1, M_2 ứng với t là nghiệm của phương trình

$$(3+t)^2 + (-2+2t)^2 + (1+2t)^2 - 6(3+t) + 4(-2+2t) - 2(1+2t) + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Với $t = 1 \Rightarrow M_1(4; 0; 3) \Rightarrow d(M_1, (P)) = 7$.

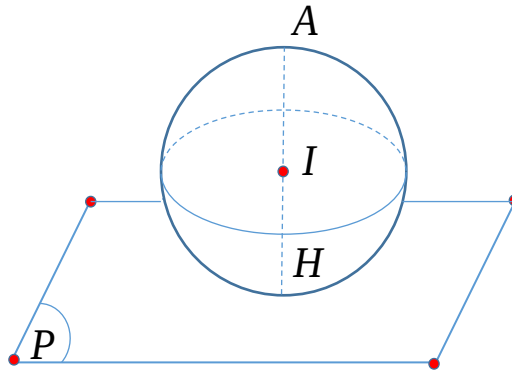
Với $t = -1 \Rightarrow M_2(2; -4; -1) \Rightarrow d(M_2, (P)) = 1$.

Với mọi điểm M thuộc (S) ta luôn có $d(M_2, (P)) \leq d(M, (P)) \leq d(M_1, (P))$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) ngắn nhất bằng 1 khi $M \equiv M_2$.

Vậy $M(2; -4; -1)$.

Câu 4. Chọn A



Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi $H = \Delta \cap (P)$ ta có: $H(1+2t; 2+t; 3+t)$ và $H \in (P)$ nên ta có:

$$2(1+2t) + (2+t) + (3+t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-3; 0; 1)$$

Mặt cầu tâm I đi qua A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) và có bán kính nhỏ nhất nên có đường kính là đoạn AH với H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) .

Gọi $I(a; b; c)$ là tọa độ trung điểm của AH ta có: $I(-1; 1; 2) \Rightarrow a + b + c = 2$.

Câu 5. Chọn A

Gọi $H(x_H; y_H; z_H)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Khi đó:
$$\begin{cases} 1 - x_H + 3 - x_H + 3(2 - x_H) = 0 \\ 4 - y_H + 4 - y_H + 3(-1 - y_H) = 0 \\ 5 - z_H + (-z_H) + 3(-z_H) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 1 \\ z_H = 1 \end{cases} \Leftrightarrow H(2; 1; 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 + 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})^2 \\ &= 5MH^2 + HA^2 + HB^2 + 3HC^2 + 2\overrightarrow{MH}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC}) = 5MH^2 + HA^2 + HB^2 + 3HC^2. \end{aligned}$$

Suy ra T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của H lên (P) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ đi qua } H(2;1;1) \text{ và vuông góc với } (P) \text{ là } \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \\ 3x + 3y - 2z - 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow M(5;4;-1). \text{ Vậy } a + b + c = 8.$$

Câu 6. Chọn B

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(1;-1;1)$.

Ta có: $P = |\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}| = |3\overrightarrow{EG}| = 3EG \geq 0 \Rightarrow P_{\min} = 0$ khi $E \equiv G(1;-1;1) \Rightarrow T = 1$, chọn **B**.

Câu 7. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1;-2;-1)$ và có bán kính $R = 3$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-1;2)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d có phương

$$\text{trình tham số là } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}.$$

Điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S) .

Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow M(3;-3;1) \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{|6 + 3 + 2 - 14|}{3} = 1.$$

$$\text{Với } t = -1 \Rightarrow M(-1;-1;-3) \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{|-2 + 1 - 6 - 14|}{3} = 7.$$

Vậy $M(-1;-1;-3)$ thỏa mãn nên $a = -1, b = -1, c = -3 \Rightarrow K = a + b + c = -5$.

Câu 8. Chọn B

Cách 1: Gọi I là tâm mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Q là tiếp điểm của Δ_1 với mặt cầu; R là tiếp điểm của Δ_2 với mặt cầu.

J là trung điểm của QR .

Ta có: $R = IQ \geq JQ \Rightarrow R$ nhỏ nhất khi và chỉ khi I trùng J hay QR là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 , khi đó tâm mặt cầu I là trung điểm của đoạn vuông góc chung, $2R$ bằng độ dài đoạn vuông góc chung.

$$\text{Gọi } \begin{cases} Q(4+3a; 1-a; -5-2a) \in \Delta_1, a \in \mathbb{R} \\ R(2+b; -3+3b; b) \in \Delta_2, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Khi đó ta có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3; -1; -2)$, $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1; 3; 1)$,

$$\overrightarrow{RQ} = (3a - b + 2; -a - 3b + 4; -2a - b - 5).$$

Theo giả thiết đề bài ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{u_{\Delta_1}} = 0 \\ \overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{u_{\Delta_2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = (2; -2; 4) \Rightarrow RQ = 2\sqrt{6} \Rightarrow R = \frac{RQ}{2} = \sqrt{6}.$$

Cách 2: Gọi hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa Δ_1 và Δ_2 là (P) và (Q) .

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sẽ tiếp xúc với (P) và (Q) nên đường kính hình cầu là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) hay là khoảng cách từ Δ_2 tới mặt phẳng (P) .

Khi đó ta có VTCP $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3; -1; -2)$; $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1; 3; 1)$ và $N = (2; -3; 0) \in \Delta_2$.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{u_P} = \frac{1}{5}[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}; \overrightarrow{u_{\Delta_2}}] = \frac{1}{5}(5; -5; 10) = (1; -1; 2)$

Ta có phương trình mặt phẳng (P) là $x - y + 2z + 7 = 0$.

Vậy $d((P), (Q)) = d(\Delta_2, (P)) = d(N, (P)) = 2\sqrt{6}$. Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{6}$.

Câu 9. Chọn C

Gọi $M(x; 0; 0) \in Ox$; $MA^2 = (x+1)^2 + 3^2 + 4^2$; $MB^2 = (x-9)^2 + 7^2 + 2^2$.

Suy ra $MA^2 + MB^2 = 2x^2 - 16x + 160 = 2(x-4)^2 + 128 \geq 128, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là 128 khi $x = 4$. Vậy $M = (4; 0; 0)$

Câu 10. Chọn B

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2; 2; 0)$ và song song với (P) .

Phương trình mặt phẳng (Q) là: $1(x-2) - 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 2 = 0$.

Theo bài ra $d \subset (Q)$.

Gọi A' , B' lần lượt là hình chiếu của A , B trên (Q) . Khoảng cách từ A , B đến d lần lượt là k_1 , k_2 . Khi đó $k_1 + k_2 \geq AA' + BB'$.

Vì $\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 0)$, $\overrightarrow{AM} = (-4; 2; 0)$ là hai vectơ cùng phương nên A , B và M thẳng hàng.
Do đó, dấu bằng xảy ra khi d đi qua A' , B' .

Ta có hai cách sau để tìm tọa độ vectơ chỉ phương của d .

Cách 1: Tìm B' .

Đường thẳng đi qua B và vuông góc với (Q) có phương trình:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow B'(t; 3 - 2t; 2t)$$

$$B' \in (Q) \text{ suy ra } t - 2(3 - 2t) + 2(2t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{9} \Rightarrow B' = \left(\frac{4}{9}; \frac{19}{9}; \frac{8}{9}\right).$$

$$\text{Từ đó } \overrightarrow{MB'} = \left(\frac{-14}{9}; \frac{1}{9}; \frac{8}{9}\right) = \frac{-1}{9}(14; -1; -8).$$

Do vậy, một vectơ chỉ phương của d là $(14; -1; -8)$.

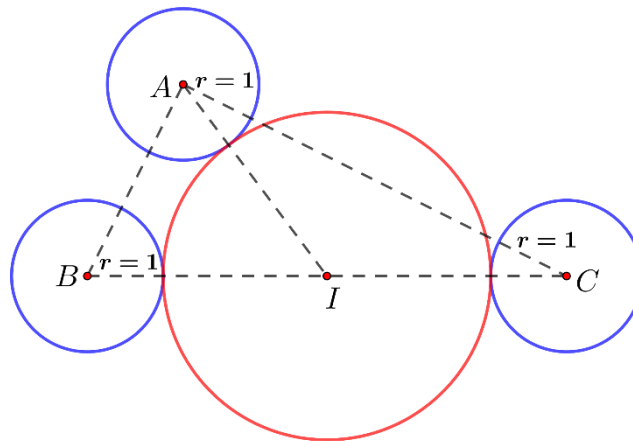
Cách 2: Ta thấy d là giao của hai mặt phẳng: (Q) và (R) với (R) là mặt phẳng chứa A , B và vuông góc với (Q) . Do đó vectơ chỉ phương của d cùng phương với tích có hướng của hai vectơ pháp tuyến tương ứng của (Q) và (R) .

Vectơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = (1; -2; 2)$. Vectơ chỉ phương của AB là $\overrightarrow{AB} = (-6; 3; 0)$.

Nên vectơ pháp tuyến của (R) là $\vec{n}_{(R)} = [\vec{n}_{(Q)}, \overrightarrow{AB}] = (-6; -12; -9) = -3(2; 4; 3)$.

Từ đó vectơ chỉ phương của d là $[\vec{n}_{(Q)}, \vec{n}_{(R)}] = (-14; 1; 8)$.

Câu 11. Chọn B



Ta có: $AB = \sqrt{8}$; $AC = \sqrt{32}$; $BC = \sqrt{40} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A .

Thấy 3 mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) có đôi một nằm ngoài nhau.

Khi đó: Mặt cầu (S) tiếp xúc với 3 mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) và có bán kính nhỏ nhất

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm thuộc $mp(ABC)$ và (S) tiếp xúc ngoài với 3 mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3)

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm I thuộc $mp(ABC)$ và $IA = IB = IC$

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm $I(1; 0; -1)$, (trong đó I là trung điểm của BC).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất $R_{\min} = IA - r = \sqrt{10} - 1$.

Câu 12. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 2)$ và bán kính $R = 2$.

$d(I, (P)) = \sqrt{6} > R$ suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) .

Điểm $M \in (S)$ thỏa mãn $d(M, (P))$ nhỏ nhất bằng $d(I, (P)) - R = \sqrt{6} - 2$.

Câu 13. Chọn C

Giả sử $M(x; y; z)$ và $N(a; b; c)$.

Khi đó $P = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = MN^2$.

Vì $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$ nên M thuộc mặt cầu (S) có tâm $I(-3; 2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Vì $a+b+c=1$ nên N thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$.

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|-3+2-1-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} > R \Rightarrow$ mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) .

$\Rightarrow \min P = \min MN^2 = [d(I, (P)) - R]^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$.

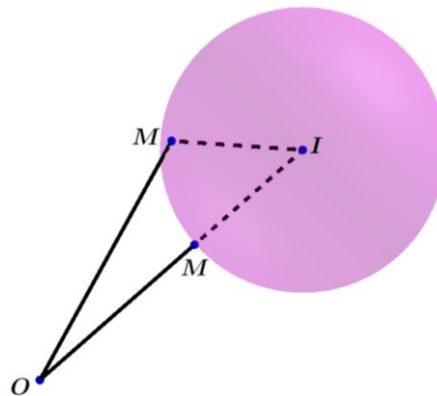
Câu 14. Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (1-a)^2 + (2-b)^2 + 1^2 + (2-a)^2 + (-1-b)^2 + 3^2 \\ &= 2a^2 - 6a + 2b^2 - 2b + 20 \\ &= 2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + 15 \geq 15. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ khi đó } a+b=2.$$

Câu 15. Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 2; 4)$, bán kính $R = 1$

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Ta có $OM \geq OI - IM = OI - R$

Nên OM nhỏ nhất khi $OM = OI - R = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} - 1 = 5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 + c^2 = 25$.

Câu 16. Chọn B

Ta có $T = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}| = |4\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}|$

Tìm tọa độ điểm $I(x_I; y_I; z_I)$ sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - x_I + 2(2 - x_I) + 4 - x_I = 0 \\ 1 - y_I + 2(-1 - y_I) + 1 - y_I = 0 \\ 1 - z_I + 2(1 - z_I) + 1 - z_I = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = 0 \\ z_I = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 0; 1) \Rightarrow T = 4|\overrightarrow{MI}|$ mà điểm M thuộc $mp(P)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạt được khi điểm M là hình chiếu của điểm I lên $mp(P)$.

$$\min T = 4.d_{(I, (P))} = 4 \cdot \frac{|2 + 0 + 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{3}.$$

Đường thẳng IM đi qua điểm I và nhận vector $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; 1; 1)$ làm vector chỉ phương.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \text{ Gọi điểm } M(2 + t; t; 1 + t) \in IM \text{ mà } M \in (P)$$

$$\Rightarrow 2 + t + t + 1 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; 1; 2).$$

Vậy giá trị của $2a + 4b + c = 2.3 + 4.1 + 2 = 12$

Câu 17. Chọn D

Vì $M \in d$ nên $M(t + 3; 2t + 1; 3t + 3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} = (-t - 1; -2t - 1; -3t)$, $\overrightarrow{MB} = (-t - 1; -2t - 3; -3t - 6)$.

$$MA^2 = (t + 1)^2 + (2t + 1)^2 + 9t^2 = 14t^2 + 6t + 2 \quad (1).$$

$$MB^2 = (t + 1)^2 + (2t + 3)^2 + (3t + 6)^2 = 14t^2 + 50t + 46 \quad (2).$$

$$\text{Ta có } P = MA^4 + MB^4 + MA^2 \cdot MB^2 = (MB^2 - MA^2)^2 + 3MA^2 \cdot MB^2$$

$$\text{Thay (1) và (2) vào } P \text{ ta được } P = (44t + 44)^2 + 3(14t^2 + 6t + 2)(14t^2 + 50t + 46)$$

$$= 44^2(t + 1)^2 + 3[14(t + 1)^2 + 10 - 22(t + 1)][14(t + 1)^2 + 10 + 22(t + 1)]$$

$$= 1936(t + 1)^2 + 3\left\{\left[14(t + 1)^2 + 10\right]^2 - 22^2(t + 1)^2\right\}$$

$$= 1936(t+1)^2 + 3[196(t+1)^4 + 280(t+1)^2 + 100 - 484(t+1)^2]$$

$$= 588(t+1)^4 + 1324(t+1)^2 + 300. \text{ Đặt } u = (t+1)^2, u \geq 0 \Rightarrow P = 588u^2 + 1324u + 300, u \geq 0.$$

Xét hàm số $f(u) = 588u^2 + 1324u + 300, u \geq 0$ có $f'(u) = 1176u + 1324 > 0, \forall u \geq 0$ cho nên $f(u) \geq f(0), \forall u \geq 0$.

Ta được $P_{\min} = f(0) = 300$ khi $u = 0 \Rightarrow t+1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow y_0 = 2.(-1)+1 = -1$. Vậy $y_0 = -1$.

Câu 18. Chọn B

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \vec{0}$, suy ra $N(-2; 0; 1)$.

Khi đó:

$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}) - (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) - (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC})| = |(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}) - \overrightarrow{MN}| = MN.$$

Suy ra $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 4; -1)$, suy ra:

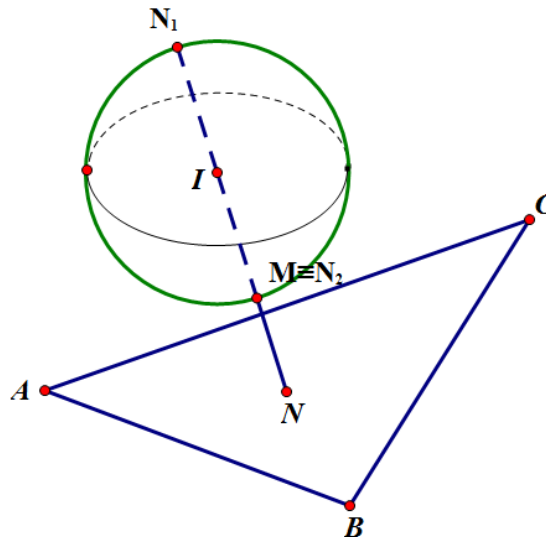
$$\overrightarrow{NI} = (4; 4; -2) = (2; 2; -1). \text{ Phương trình NI} = \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}. \text{ Thay phương trình NI vào phương}$$

$$\text{trình (S) ta được: } (2t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

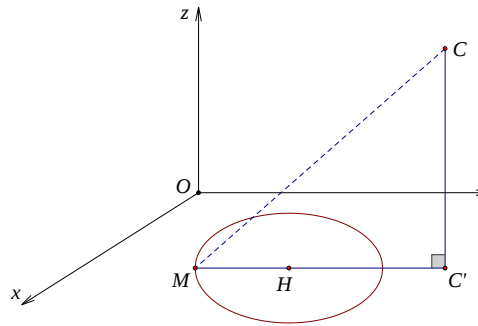
Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3; 6; -2), N_2(0; 2; 0)$.

Vì $NN_1 > NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N_2$. Vậy $M(0; 2; 0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a + b = 2$.



Câu 19.

**Chọn C**

Giả sử $M(x; y; 0)$. Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1; 2; 4)$.

Do $MA \perp MB$ tại M , suy ra M thuộc mặt cầu tâm I bán kính

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 0^2}}{2} = 5.$$

Mặt khác $M \in Oxy$ suy ra tọa độ điểm M thỏa mãn
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$. Suy ra M thuộc đường trong (C) có tâm $H(1; 2; 0)$ và bán kính

$$R = 3$$

Gọi C' là hình chiếu của C lên (Oxy) , suy ra $C'(5; -1; 0)$, $CC' = |-6| = 6$.

$$HC' = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

CM lớn nhất khi và chỉ khi $C'M$ lớn nhất.

$C'M$ lớn nhất bằng $(HC' + R) = 5 + 3 = 8$.

Suy ra độ dài đoạn CM lớn nhất bằng $\sqrt{C'M^2 + CC'^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Câu 20. Chọn B

Xét điểm $I(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 \\ &= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \\ &= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \text{ (vì } MI^2 \geq 0 \text{ với mọi điểm } M) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$ tức là $M\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}$.

Câu 21. Chọn B

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (-10 - x; -5 - y; 8 - z)$, $\overrightarrow{IB} = (2 - x; 1 - y; -1 - z)$, $\overrightarrow{IC} = (2 - x; 3 - y; -z)$.

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} (-10 - x) + 2(2 - x) + 3(2 - x) = 0 \\ (-5 - y) + 2(1 - y) + 3(3 - y) = 0 \\ (8 - z) + 2(-1 - z) + 3(-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1).$$

Với điểm M thay đổi trên (P) , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 \quad (\text{vì } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Ta lại có $IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 = 185 + 2.8 + 3.9 = 228$.

Do đó, $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Khi đó, $MI = d(I, (P)) = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ bằng $6MI^2 + 228 = 6.9 + 228 = 282$.

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) . Phương trình của Δ :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Ta có $M = \Delta \cap (P)$. Xét phương trình

$$t + 2(1 + 2t) - 2(1 - 2t) - 9 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 3; -1).$$

Câu 22. Chọn D

Cách 1:

Ta có $M(a; b; c) \in (S) \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 = 9$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$$\begin{aligned} [1.(a - 2) + 2.(b - 1) + 2.(c - 1)]^2 &\leq (1^2 + 2^2 + 2^2)[(a - 2)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2] \\ \Leftrightarrow [1.(a - 2) + 2.(b - 1) + 2.(c - 1)]^2 &\leq 9.9 \Leftrightarrow -9 \leq 1.(a - 2) + 2.(b - 1) + 2.(c - 1) \leq 9 \\ \Leftrightarrow -3 \leq a + 2b + 2c \leq 15 &\text{ hay } -3 \leq P \leq 15. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a - 2}{1} = \frac{b - 1}{2} = \frac{c - 1}{2} \\ 1.(a - 2) + 2.(b - 1) + 2.(c - 1) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Khi đó $T = a + b + c = 1 + (-1) + (-1) = -1$.

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$, bán kính $R=3$. Để $M(a;b;c) \in (S)$ đồng thời $P=a+2b+2c$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải là điểm chung giữa (S) và mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-P=0$.
 Suy ra $d(I;(\alpha)) \leq R \Leftrightarrow |6-P| \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq P \leq 15$. Ta có $P=-3$ khi $a=1, b=-1, c=-1$.
 Vậy $T=a+b+c=-1$.

Câu 23. Chọn A**Cách 1:**

Mặt cầu $(S): x^2+(y-3)^2+(y+4)^2=4$. có tâm $I(0;3;-4)$, bán kính $R=2$.

Ta có: $OM^2-ON^2=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM})^2-(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN})^2=2\overrightarrow{OI}(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN})$, (vì $IM=IN=R$)
 $=2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{NM}=2.OI.NM.\cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{NM}) \geq -2OI.NM = -10$.

Dấu “=” xảy ra khi hai véc tơ $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{NM}$ ngược hướng.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức OM^2-ON^2 là -10 .

Cách 2:

Xét điểm $M(x;y;z), N(a;b;c)$ ta có
$$\begin{cases} M \in (S) \\ N \in (S) \\ MN=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=4(1) \\ a^2+(b-3)^2+(c+4)^2=4(2) \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1(3) \end{cases}.$$

Lấy (1)-(2) theo vế có: $x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2=6(y-b)-8(z-c)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacopski) và (3) ta có

$$OM^2-ON^2=x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2=6(y-b)-8(z-c) \\ \geq -\sqrt{(6^2+8^2)((y-b)^2+(z-c)^2)} \geq -\sqrt{(6^2+8^2)((y-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)} = -10.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } \begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=4 \\ a^2+(b-3)^2+(c+4)^2=4 \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1. \\ x-a=0 \\ \frac{y-b}{6}=\frac{z-c}{-8}=k<0 \end{cases}$$

Chọn đáp án A.

*Một cách tương tự mở rộng cho min – max của $\alpha OM^2 + \beta ON^2$.

Câu 24. Chọn C**Cách 1.**

Gọi H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA}-2\overrightarrow{HB}=\vec{0} \Leftrightarrow H(13;-11;19)$.

Ta tính: $HA^2=1088$; $HB^2=272$; $d(H,(\alpha))=7\sqrt{3}$.

$$\text{Ta có: } MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 - 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2.$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 2MB^2 = -MH^2 + 2\overrightarrow{MH}(\overrightarrow{HA} - 2\overrightarrow{HB}) + HA^2 - 2HB^2 \Leftrightarrow MA^2 - 2MB^2 = -MH^2 + 544.$$

$$\Rightarrow MA^2 - 2MB^2 \leq -d^2(H, (\alpha)) + 544 = 397.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $MA^2 - 2MB^2 = 397$ khi M là hình chiếu vuông góc của H trên (α) .

Cách 2.

$$\text{Gọi } M(a; b; c) \in (\alpha) \Rightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -b - c.$$

$$\text{Ta tính } MA^2 = (-3 - a)^2 + (5 - b)^2 + (-5 - c)^2; MB^2 = (5 - a)^2 + (-3 - b)^2 + (7 - c)^2.$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 2MB^2 = -a^2 + 26a - b^2 - 22b - c^2 + 38c - 107.$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 2MB^2 = -2b^2 - 2b(24 + c) - 2c^2 + 12c - 107.$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 2MB^2 = -2\left(b + \frac{24 + c}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}c^2 + 36c + 181$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 2MB^2 = -2\left(b + \frac{24 + c}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}(c - 12)^2 + 397 \Rightarrow MA^2 - 2MB^2 \leq 397.$$

Giá trị lớn nhất của $MA^2 - 2MB^2 = 397$ khi $c = 12; b = -18; a = 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MA^2 - 2MB^2 = 397$ khi $M(6; -18; 12)$.

Câu 25. Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc d . Suy ra $(\alpha): 2x + 2y - z - 3 = 0$.

Δ đi qua A và vuông với d nên Δ nằm trong (α) .

Vì Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất nên Δ đi qua tâm K của đường tròn giao tuyến của (α) và (S) .

Ta có: K là hình chiếu vuông góc của tâm I của mặt cầu lên (α) nên $K\left(\frac{23}{9}; \frac{14}{9}; \frac{47}{9}\right)$.

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AK} = \left(\frac{5}{9}; \frac{5}{9}; \frac{20}{9}\right) \Rightarrow \vec{u} = (1; 1; 4).$$

Câu 26. Chọn B

Chọn điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KB} + 5\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

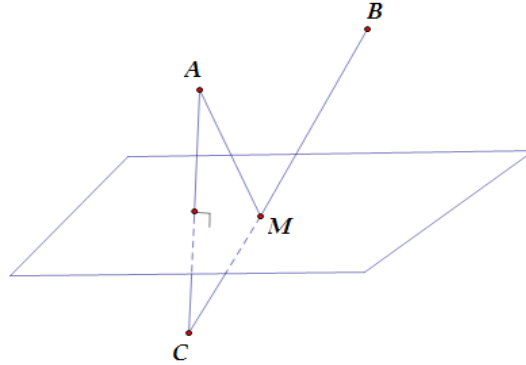
$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (-1 - x_K) - 2(3 - x_K) + 5(-4 - x_K) = 0 \\ (2 - y_K) - 2(-1 - y_K) + 5(0 - y_K) = 0 \\ (2 - z_K) - 2(-2 - z_K) + 5(3 - z_K) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -\frac{27}{4} \\ y_K = 1 \\ z_K = \frac{21}{4} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{27}{4}; 1; \frac{21}{4}\right).$$

$$|\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}| = |\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{IK} - 2\overrightarrow{KB} + 5\overrightarrow{IK} + 5\overrightarrow{KC}| = |4\overrightarrow{IK}| = 4IK.$$

IK đạt giá trị nhỏ nhất khi K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (Oxz) .

$$\text{Vậy } I\left(-\frac{27}{4}; 0; \frac{21}{4}\right).$$

Câu 27. Chọn C



Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$.

Vì $y_A \cdot y_B = 3 > 0$ nên A, B nằm cùng phía với mặt phẳng (Oxz) .

Lấy điểm C đối xứng với A qua (Oxz) . Suy ra $C(-1; -3; 4)$.

Khi đó $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $MC + MB$ nhỏ nhất. Suy ra M là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (Oxz) .

$$\text{Đường thẳng } BC : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ điểm } M(x; y; z) \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 + t = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

$$\Rightarrow M(2; 0; 1) \Rightarrow x_0 = 2.$$

Câu 28. Chọn A

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t > 0 : \overrightarrow{MN} = t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow t \cdot |\vec{a}| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 5$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = (5; -5; 0)$.

$$\text{Gọi } A'(x'; y'; z') \text{ là điểm sao cho } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 4 = 5 \\ y' - 7 = -5 \\ z' - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 2; 3).$$

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ

đương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$ suy ra $AM = A'N$ nên $|AM - BN| = |A'N - BN| \leq A'B$ dấu bằng xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy) .

Do đó $\max |AM - BN| = A'B = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{17}$, đạt được khi

$$N = A'B \cap (Oxy).$$

Câu 29. Chọn C

Cách 1: Gọi $M(a; b; c) \in (S)$, ta có $(a+1)^2 + (b-4)^2 + c^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a + 8b - 9$

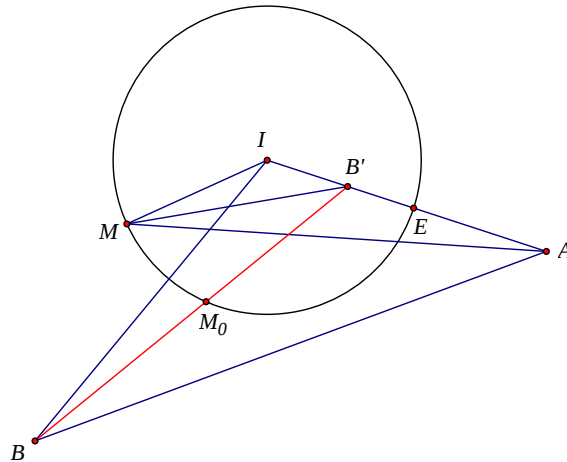
$$\text{Do đó } MA = \sqrt{(a-3)^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a^2 + b^2 + c^2) - 6a + 9}$$

$$2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 6b + 9} = 2\sqrt{a^2 + (b-3)^2 + c^2} = 2MB' \text{ với } B'(0; 3; 0).$$

Dễ thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA + 2MB = 2(MB' + MB)$ nhỏ nhất khi B', M, B thẳng hàng.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$ là $2BB' = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:



Ta có $IA = 4\sqrt{2}$, với I là tâm mặt cầu.

Gọi $E(1; 2; 0)$, $B'(0; 3; 0)$ lần lượt là trung điểm của IA và IE .

+ M là điểm nằm trên đường thẳng IA ta có $MB' = \frac{1}{2}MA$.

+ M là điểm không nằm trên đường thẳng IA ta có $\triangle IMB' \sim \triangle IAM$ nên $\frac{MB'}{MA} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{2}$,

$$\text{ta có } MB' = \frac{1}{2}MA.$$

Để thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA + 2MB = 2(MB' + MB)$ nhỏ nhất khi B', M, B thẳng hàng. $M \equiv M_0$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$ là $2BB' = 6\sqrt{2}$.

Câu 30. Chọn D

Ta có $OA = a, OB = b, OC = c; AB = \sqrt{a^2 + b^2}, BC = \sqrt{b^2 + c^2}, CA = \sqrt{c^2 + a^2}$.

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}a.b.c.$$

$$OA + OB + OC + AB + BC + CA = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$,

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq 3\sqrt[6]{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \geq 3\sqrt[6]{2ab.2bc.2ac} = 3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}.$$

$$\text{Suy ra } a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \geq 3\sqrt[3]{abc}(1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow abc \leq \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{1}{6}abc \leq \frac{1}{162} \Leftrightarrow V_{OABC} \leq \frac{1}{162}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0; b > 0; c > 0 \\ a = b = c \\ a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của V_{OABC} bằng $\frac{1}{162}$.

Câu 31. Chọn D

Ta có $M(a; b; c) \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Do đó $M(a; b; 0)$.

$$\overrightarrow{MA} = (1 - a; -1 - b; 2), \overrightarrow{MB} = (-2 - a; -b; 3), \overrightarrow{MC} = (-a; 1 - b; -2)$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (1 - a)(-2 - a) + (-1 - b)(-b) + 6 = a^2 + a + b^2 + b + 4$$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = (-2 - a)(-a) + (-b)(1 - b) - 6 = a^2 + 2a + b^2 - b - 6$$

$$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = (-a)(1 - a) + (1 - b)(-1 - b) - 4 = a^2 - a + b^2 - 5$$

Suy

ra

$$S = a^2 + a + b^2 + b + 4 + 2(a^2 + 2a + b^2 - b - 6) + 3(a^2 - a + b^2 - 5) = 6a^2 + 2a + 6b^2 - b - 23$$

$$S = 6\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 + 6\left(b - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{557}{24} \geq -\frac{557}{24}.$$

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{557}{24}$ khi $a = -\frac{1}{6}$ và $b = \frac{1}{12}$

$$\text{Khi đó } T = 12a + 12b + c = 12 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 12 \cdot \frac{1}{12} + 0 = -1.$$

Câu 32. Chọn C

$$\text{Ta có } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 16.$$

$$\text{Vì điểm } M \in (S) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 16. (*)$$

$$\text{Xét } T = 2a + 3b + 6c = 2(a-1) + 3(b-2) + 6(c-2) + 20$$

$$\leq \sqrt{(2^2 + 3^2 + 6^2)((a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2)} + 20 = 7.4 + 20 = 48.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{3} = \frac{c-2}{6} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 + 2t \\ b = 2 + 3t \\ c = 2 + 6t \end{cases}, \text{ thay vào phương trình } (*) \text{ ta}$$

$$\text{được: } 4t^2 + 9t^2 + 36t^2 = 16 \Rightarrow t = \frac{4}{7}.$$

$$\text{Do đó } M\left(\frac{15}{7}; \frac{26}{7}; \frac{38}{7}\right) \text{ và } P = 2a - b + c = 2 \cdot \frac{15}{7} - \frac{26}{7} + \frac{38}{7} = 6.$$

Câu 33. Chọn C

$$\text{Mặt cầu } (S): (x+1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 12 \text{ có tâm } I(-1; 0; 4), \text{ bán kính } R = \sqrt{12}.$$

Gọi $C(0; -1; 3)$ là trung điểm của AB .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IM}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + R^2 - 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IC} \\ &= \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + R^2 - 2 \cdot R \cdot IC \cdot \cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}). \end{aligned}$$

Vì I, A, B, R, C không đổi nên $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi $\cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) = 1$ lớn nhất hay hai vectơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}$ cùng hướng.

Cách 1: Đường thẳng IC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{IC} = (1; -1; -1)$

$$\text{Phương trình đường thẳng } IC: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$$\text{Điểm } M \text{ thuộc đường thẳng } IC \text{ nên } M = (-1 + t; -t; 4 - t)$$

$$\text{Điểm } M \text{ thuộc mặt cầu nên } (-1 + t + 1)^2 + (-t)^2 + (4 - t - 4)^2 = 12 \Leftrightarrow 3t^2 = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Khi $t = -2$ thì $M(-3; 2; 6)$ và $\overrightarrow{IM} = (-2; 2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = -2\overrightarrow{IC}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}$ không cùng hướng.

Khi $t = 2$ thì $M(1; -2; 2)$ và $\overrightarrow{IM} = (2; -2; -2) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IC}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}$ cùng hướng.

$$\text{Vậy } M(1; -2; 2) \text{ hay } a + b + c = 1.$$

Cách 2: $IC = \sqrt{3}$, $IM = R = 2\sqrt{3}$ và hai vectơ $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IC}$ (Tổng quát $\overrightarrow{IM} = \frac{IM}{IC} \overrightarrow{IC}$) hay C là trung điểm của đoạn thẳng IM . Suy ra $M(1; -2; 2)$ hay $a + b + c = 1$.

Bình luận: Bài toán cũng có thể ra ở dạng Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ lớn nhất, tính $a + b + c$.

Câu 34. Chọn C

• Gọi $H(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(2-x) + 3(-3-x) = 0 \\ 2(2-y) + 3(3-y) = 0 \\ 2(4-z) + 3(-1-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H(-1; 1; 1)$$

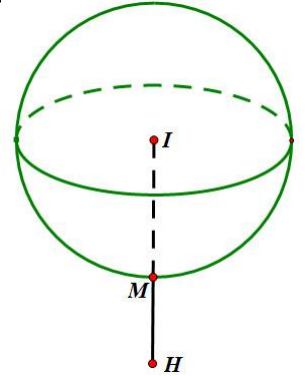
$$\begin{aligned} \bullet \text{ Xét } P &= 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 \\ &= 2(MH^2 + HA^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HA}) + 3(MH^2 + HB^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB}) \\ &= 5MH^2 + 2HA^2 + 3HB^2 + \overrightarrow{MH} \cdot (2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB}) = 5MH^2 + 2HA^2 + 3HB^2 \quad (\text{vì } 2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}) \\ &= 5MH^2 + 90 \end{aligned}$$

Để $P = 5MH^2 + 90$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH$ nhỏ nhất.

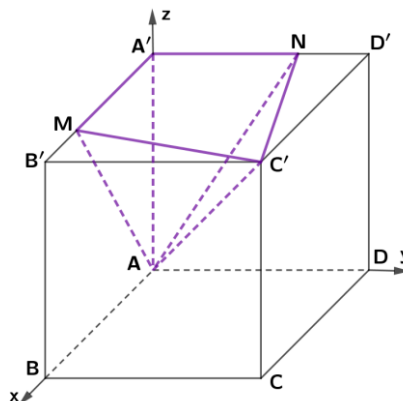
• Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 3)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

$IH = 2\sqrt{3} > R$ nên điểm H nằm ngoài mặt cầu (S) .

Khi đó: $MH_{\min} = |IH - R| = |2\sqrt{3} - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$. Vậy $P_{\min} = 5.3 + 90 = 105$.



Câu 35. Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, ta có: $A(0; 0; 0)$, $A'(0; 0; 1)$, $C'(1; 1; 1)$.

$M(t; 0; 1) \in A'B'$, $t \in [0; 1]$, $N(0; m; 1) \in A'D'$, $m \in [0; 1]$. (M, N lần lượt thuộc đoạn $A'B'$, $A'D'$)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (t; 0; 1) \\ \overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1) \end{cases} \Rightarrow (AMC') \text{ có một vector pháp tuyến là } \vec{n}_1 = [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AC'}] = (-1; 1-t; t).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AN} = (0; m; 1) \\ \overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1) \end{cases} \Rightarrow (ANC') \text{ có một vector pháp tuyến là } \vec{n}_2 = [\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{AC'}] = (m-1; 1; -m).$$

$$(MAC') \perp (NAC') \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow m+t+mt=2 \Rightarrow 2 = m+t+mt \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} m+t + \frac{(m+t)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(m+t)^2}{4} + m+t-2 \geq 0 \Rightarrow m+t \geq 2\sqrt{3}-2 \text{ vì } m, t \in [0; 1].$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} t=m \\ t+m=2\sqrt{3}-2 \end{cases} \Rightarrow t=m=\sqrt{3}-1.$$

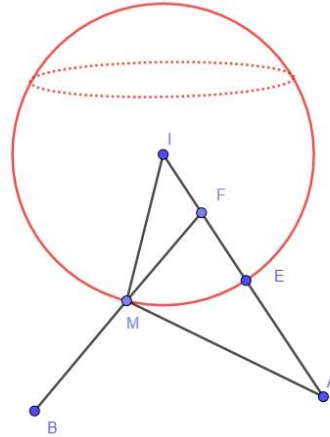
$$S_{\Delta B'MC'} = \frac{1}{2} B'M \cdot B'C' = \frac{1}{2} (1-t), \quad S_{\Delta D'NC'} = \frac{1}{2} D'N \cdot D'C' = \frac{1}{2} (1-m), \quad S_{A'B'C'D'} = 1.$$

$$S_{A'MC'N} = S_{A'B'C'D'} - S_{\Delta B'MC'} - S_{\Delta D'NC'} = \frac{1}{2} (m+t).$$

$$V_{A.A'MC'N} = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{A'MC'N} = \frac{1}{6} (t+m) \geq \frac{\sqrt{3}-1}{3}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp } A.A'MC'N \text{ là } \frac{\sqrt{3}-1}{3}.$$

Câu 36. Chọn D



Nhận xét: điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 0)$, $R = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA = 4\sqrt{2} = 2R$, $E = IA \cap (S) \Rightarrow E(1; 2; 0)$ (Do E là trung điểm của IA).

Gọi F là trung điểm của $IE \Rightarrow F(0; 3; 0)$.

Tam giác IFM và IMA có AIM chung và $\frac{IF}{IM} = \frac{1}{2} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow \Delta AIM \sim \Delta MIF$.

Suy ra $\frac{MA}{FM} = \frac{AI}{MI} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$.

Ta có: $MA + 2MB = 2(MF + MB) \geq 2FB = 6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M = BF \cap (S)$.

Câu 37. Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} &= 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 3 \\ &\Leftrightarrow 3OP^2 = 3 + 2\overrightarrow{OP} \cdot [\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}] \quad (1). \end{aligned}$$

Giả sử $P(x; y; z)$ thì phương trình (1) trở thành

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 3 + 2t(2x + 2y + z) \leq 3 + 2t\sqrt{(4+4+1)(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\text{Hay } 3OP^2 \leq 3 + 6tOP \Leftrightarrow OP^2 - 2tOP - 1 \leq 0 \Rightarrow t - \sqrt{t^2 + 1} \leq OP \leq t + \sqrt{t^2 + 1}$$

Từ giả thiết suy ra $t + \sqrt{t^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$. Vậy $Q = 2a + b = 11$.

Câu 38. Chọn B

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + z - 6 = 0$.

Dễ thấy $D \in (ABC)$. Gọi H, K, I lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên Δ .

Do Δ là đường thẳng đi qua D nên $AH \leq AD, BK \leq BD, CI \leq CD$.

Vậy để khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất thì Δ là đường thẳng đi qua D và

vuông góc với (ABC) . Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Kiểm tra ta thấy

điểm $M(5; 7; 3) \in \Delta$.

Câu 39. Chọn C

Gọi $M(x; y; z)$, suy ra

$$MA^2 - MB^2 = 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 - [(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2] = 9$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 4 = 0$$

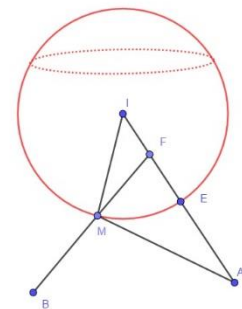
Suy ra: Tập các điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $MA^2 - MB^2 = 9$ là mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$

Trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 9$ khi và chỉ khi (S_m) và (P) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I; (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|1+1+m-4|}{\sqrt{1+1+1}} \leq \frac{|m|}{2} \Leftrightarrow 2|m-2| \leq \sqrt{3}|m|$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 16m + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 8 - 4\sqrt{3} \leq m \leq 8 + 4\sqrt{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $8 - 4\sqrt{3}$.

Câu 40. Chọn D

Nhận xét: điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 0), R = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA = 4\sqrt{2} = 2R, E = IA \cap (S) \Rightarrow E(1; 2; 0)$ (Do E là trung điểm của IA).

Gọi F là trung điểm của $IE \Rightarrow F(0; 3; 0)$.

Tam giác IFM và IMA có AIM chung và $\frac{IF}{IM} = \frac{1}{2} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow \triangle AIM \sim \triangle MIF$.

Suy ra $\frac{MA}{FM} = \frac{AI}{MI} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$.

Ta có: $MA + 2MB = 2(MF + MB) \geq 2FB = 6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M = BF \cap (S)$.

Câu 41. Chọn A

Chọn $I(a; b; c)$ thỏa $\vec{OI} + 2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{4}; \frac{-5}{4}\right)$.

Ta có: $|\vec{OM} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}| = |\vec{OI} + 2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{MI}| = 4|\vec{MI}|$.

$\Rightarrow |\vec{OM} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4|\vec{MI}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI \perp (Oxz)$.

Lúc đó $4|\vec{MI}| = 4d(I; (Oxz)) = 1$.

Câu 42. Chọn D

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1; -2; 1)$ và bán kính là $R_1 = 2$. Mặt cầu (S_2) cũng có tâm $I(1; -2; 1)$ nhưng bán kính là $R_2 = \sqrt{10}$.

Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng AB, CD .

Ta có $AB = 2\sqrt{R_1^2 - a^2} = 2\sqrt{4 - a^2}$, $CD = 2\sqrt{R_2^2 - b^2} = 2\sqrt{10 - b^2}$

và $d(AB, CD) \leq d(I, AB) + d(I, CD) = a + b$. Thêm nữa: $\sin(AB, CD) \leq 1$.

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(AB, CD) \leq \frac{2}{3} (a + b) \sqrt{4 - a^2} \sqrt{10 - b^2}$.

Ta có: $a + b = a + \sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{3} \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}$

và $\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right)(4 - a^2)\left(5 - \frac{b^2}{2}\right) \leq \left(\frac{a^2 + \frac{b^2}{2} + 4 - a^2 + 5 - \frac{b^2}{2}}{3}\right)^3 = 27$.

Vậy $V_{ABCD} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{27} = 6\sqrt{2}$.

Dấu bằng đạt được tại $a = 1, b = 2$ và hai đường AB, CD vuông góc với nhau