**ĐỀ 87**

**ĐỀ THI HSG TOÁN 9 TRÀ VINH 2023-2024**

**Câu 1. (4,0 điểm)** Cho hai biểu thức

A = $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và B = $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ + $\frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}}$ $-$ $\frac{13\sqrt{x}+2}{4-x}$ (với $x\geq 0$; $x\ne 1$; $x\ne 4$).

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x=\left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)+2$
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm các giá trị nguyên của x để P = A.B nhận giá trí là một số tự nhiên,

**Câu 2. (6,0 điểm)**

1. Giải phương trình sau:$ 3x^{2}+26=6\sqrt{2x+5}+10x$
2. Giải hệ phương trình sau: $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+2xy-3y^{2}=0\\x\left|x\right|+y\left|y\right|=-8\end{array}\right.$

**Câu 3. (2,0 điểm)**

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M(0;1) và đường thẳng (d): $4x+3y=12$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d).

**Câu 4. (2,0 điểm)**

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca\leq a^{2}+b^{2}+c^{2}<2\left(ab+bc+ca\right)$$

**Câu 5. (4,0 điểm)**

Cho tam giác ABC vuông tại A, biếtAB = 3 cm; AC = 4,5 cm. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính BA. Trên ta đối của tia AC lấy điểm D sao cho tam giác BCD vuông tại B. Kẻ các tiếp tuyến CN, DM với đường tròn ( M, N là tiếp điểm, khác điểm A ).

1. Chứng minh ba điểm M, B, N thẳng hàng.
2. Tính diện tích tứ giác DMNC.
3. Gọi H là giao điểm của AB và CN. Tính độ dài HB và HN.

**Câu 6. (2,0 điểm)**

Cho tam giác vuông ABC có độ dài cạnh huyền BC = a. Gọi AH là đường cao của tam giác ( H $\in $ BC), D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AC và AB . Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ADHE.

**------- HẾT---------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (4,0 điểm)** Cho hai biểu thức

A = $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và B = $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ + $\frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}}$ $-$ $\frac{13\sqrt{x}+2}{4-x}$ (với $x\geq 0$; $x\ne 1$; $x\ne 4$).

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x=\left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)+2$
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm các giá trị nguyên của x để P = A.B nhận giá trí là một số tự nhiên,

**Lời giải**

**a)** Ta có: $x=\left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)+2$ = $5^{2}-\left(\sqrt{2}\right)^{2}+2=25$

Thay x = 25 vào biểu thức A ta được:

A = $\frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}-1}= \frac{5-2}{5-1}=\frac{3}{4}$. Vậy với $x=\left(5+\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)+2$ thì A = $\frac{3}{4}$.

**b)** B = $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ + $\frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}}$ $-$ $\frac{13\sqrt{x}+2}{4-x}$

= $\frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{(\sqrt{x}+2).(2-\sqrt{x})}+\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^{2}}{(2+\sqrt{x}).(2-\sqrt{x})}-\frac{13\sqrt{x}+2}{(2+\sqrt{x}).(2-\sqrt{x})}$

= $\frac{6\sqrt{x}-3x+x+4\sqrt{x}+4-13\sqrt{x}-2}{(2+\sqrt{x}).(2-\sqrt{x})}$ = $\frac{2x+3\sqrt{x}-2}{(2+\sqrt{x}).(\sqrt{x}-2)}=\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-2)}$

= $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

Vậy B = $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

**c)** Ta có P = A.B = $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ . $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ = $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ = 2 + $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Để P nhận giá trị là một số tự nhiên thì $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ phải là số nguyên

Suy ra $\sqrt{x}-1$ phải là ước của 1 $⇔$ $\left[\begin{array}{c}\sqrt{x}-1=1\\\sqrt{x}-1=-1\end{array}\right.$ $⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=4\\x=0\end{array}\right.$

So sánh với điều kiện của bài toán ta thấy x = 0 là giá trị cần tìm

**Câu 2. (6,0 điểm)**

1. Giải phương trình sau:$ 3x^{2}+26=6\sqrt{2x+5}+10x$
2. Giải hệ phương trình sau: $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+2xy-3y^{2}=0\\x\left|x\right|+y\left|y\right|=-8\end{array}\right.$

**Lời giải**

**1.** $ 3x^{2}+26=6\sqrt{2x+5}+10x$ (ĐK: $x\geq \frac{-5}{2}$)

$⇔$ $3x^{2}-10x+26-6\sqrt{2x+5}=0$

$⇔$ 3$\left(x^{2}-4x+4\right)+\left[\left(2x+5\right)-2.3\sqrt{2x+5}+9\right]=0$

$⇔$ 3$\left(x-2\right)^{2}+\left(\sqrt{2x+5}-3\right)^{2}=0$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x-2=0\\\sqrt{2x+5}-3=0\end{array}\right.$ $⇔\left\{\begin{array}{c}x=2\\\sqrt{2x+5} =3\end{array}\right.$ $⇔\left\{\begin{array}{c}x=2\\x=2\end{array} \right.$ $⇒$ $x=2$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$

**2.** $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+2xy-3y^{2}=0 (1)\\x\left|x\right|+y\left|y\right|=-8 (2)\end{array}\right.$

Từ phương trình (1) ta có:

$x^{2}+2xy-3y^{2}=0 $

$⇔$ $x\left(x-y\right)+3y\left(x-y\right)=0$

$⇔$ $\left(x+3y\right)\left(x-y\right)=0$

$⇔$ $\left[\begin{array}{c}x=y\\x=-3y\end{array}\right.$

+) Với $x=y$ thay vào (2) ta được:

2$x\left|x\right|=-8⇔$ $\left[\begin{array}{c}x<0\\x^{2}=4\end{array}\right.⇔x=-2$ $⇒$ $y=-2$

+) Với $x=-3y$ thay vào (2) ta được:

$-3y\left|-3y\right|+y\left|y\right|=-8$ $⇔ -8y\left|y\right|=-8⇔ y\left|y\right|=1⇔y=1⇒x=-3$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm (x;y) = ($-2$;$-2$) hoặc

(x;y) = ($-$3;1)

**Câu 3. (2,0 điểm)**

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M(0;1) và đường thẳng (d): $4x+3y=12$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d).

**Lời giải**

Ta có: (d): $4x+3y=12$ $⇒$ $y=$ $\frac{-4}{3}$ y + 4

Bảng giá trị (d)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x$$ | 0 | 3 |
| $y=$ $\frac{-4}{3}$ $x$ + 4 | 4 | 0 |



Đồ thị của đường thẳng (d) được vẽ như hình bên.

Lập phương trình đường thẳng (d’): $y=ax+b$ đi qua M(0; 1) và $⊥$ (d):

+ Để (d’) $⊥$ (d) thì: $a.(\frac{-4}{3}$) = $-1$ $⇒$ $a=\frac{3}{4}$

+ Và (d’) đi qua M(0;1) thì thay x = 0; y = 1 vào (d’) ta được

1 = $\frac{3}{4}$ . 0 + b $⇒$ b = 1. Vậy (d’): y = $\frac{3}{4}x$ + 1

Hoành độ giao điểm N của đường thẳng (d) và (d’) là nghiệm của phương trình:

$\frac{-4}{3}$ $x$ + 4 = $\frac{3}{4}x$ + 1 $⇔\frac{25}{12}x$ = 3 $⇔x$ = $\frac{36}{25}$ = 1,44

$⇒$ Tung độ y = $\frac{3}{4}$ . 1,44 + 1 = $\frac{52}{25}$ = 2,08

Gọi H là hình chiếu của N trên trục tung Oy, ta có: NH = 1,44;

MH = 2,08 $-1=1,08$

Do $△$MNH vuông tại H nên: d(M; (d)) = MH = $\sqrt{NH^{2}+MH^{2}}$

$= \sqrt{1,44^{2}+1,08^{2}}$ = 1,8 (đvđd**)**

Vậy d(M;(d)) = 1,8 (đvđd)

**Câu 4. (2,0 điểm)**

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca\leq a^{2}+b^{2}+c^{2}<2\left(ab+bc+ca\right)$$

**Lời giải**

+) Ta có: $\left(a-b\right)^{2}\geq $0 $∀$ a,b $⇔$ $a^{2}-2ab+b^{2}\geq $0$⇔$$a^{2}+b^{2}\geq $*2ab* (1)

Tương tự ta cũng có: $b^{2}+c^{2}\geq 2bc (2)$

$c^{2}+a^{2}\geq 2ca (3)$

Cộng các vế của (1), (2) và (3) ta được:

$2\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)\geq 2\left(ab+bc+ca\right)⇔a^{2}+b^{2}+c^{2}\geq ab+bc+ca$ (\*)

+) Mặt khác do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$0<a<b+c⇔a^{2}<a(b+c)⇔a^{2}<ab+ac$

$0<b<a+c⇔b^{2}<b(a+c)⇔b^{2}<ab+bc$

$0<c<a+b⇔c^{2}<c(a+c)⇔c^{2}<ca+cb$

Suy ra: $a^{2}+b^{2}+c^{2}$ < $2\left(ab+bc+ca\right)$ (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) $⇒$ $ab+bc+ca\leq a^{2}+b^{2}+c^{2}< $2$\left(ab+bc+ca\right)$

**Câu 5. (4,0 điểm)**

Cho tam giác ABC vuông tại A, biếtAB = 3 cm; AC = 4,5 cm. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính BA. Trên ta đối của tia AC lấy điểm D sao cho tam giác BCD vuông tại B. Kẻ các tiếp tuyến CN, DM với đường tròn ( M, N là tiếp điểm, khác điểm A ).

1. Chứng minh ba điểm M, B, N thẳng hàng.
2. Tính diện tích tứ giác DMNC.
3. Gọi H là giao điểm của AB và CN. Tính độ dài HB và HN.

**Lời giải**

**a)**

****

Do CD vuông góc với bán kính BA tại A nên CA và DA là hai tiếp tiếp của (B; BA)

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

+) BC là phân giác của $\hat{NBA}$, nên: $\hat{NBC}$ = $\hat{ABC}$

+) Tương tự, BD là phân giác của góc $\hat{MBA}$, nên: $\hat{MBD}$ = $\hat{ABD}$

Suy ra: $\hat{NBA}$ + $\hat{MBA}$ = $2\left( \hat{ABC}+ \hat{ABD}\right)$ = $2\left( \hat{NBC}+ \hat{MBD} \right)$ = 2.90° = 180° (do tam giác BCD vuông tại B)

Vậy ba điểm M, B, N thẳng hàng.

**b)** Tính diện tích tứ giác DMNC

+) Ta có CN; DM là hai tiếp tuyến của (B; BA), nên: CN $⊥$ BN; DM $⊥$ BM

Mà ba điểm M, B, N thẳng hàng (theo câu a)

Suy ra: CN // DM (Cùng $⊥$ MN) hay tứ giác DMNC là hình thang vuông

+) Xét tam giác NBC vuông tại N và tam giác ABC vuông tại A ta có:

Cạnh huyền BC chung

BA = BN (cùng là bán kính của đường tròng (B; BA))

$⇒$ $△$NBC = $△$ABC (CH-CGV) $⇒$ CN = CA = 4,5 (cm)

+) Tương tự ta cũng có DM = DA

Xét $△$CBD vuông tại B, theo hệ thức lượng ta có:

$AB^{2}=AC.DA$ $⇒$ DA = $\frac{AB^{2}}{AC}$ = $\frac{3^{2}}{4,5}$ = 2(cm) $⇒$ DM = DA = 2 (cm)

+) Đường cao MN = 2 NB = 2 AB = 6 (cm)

Vậy $S\_{DMNC}$ = $\frac{1}{2}$ $\left(DM+CN\right).MN$ = $\frac{1}{2}$ $\left(2+4,5\right).6$ = 19,5 ($cm^{2})$

**c)** H là giao điểm của AB và CN

Xét $△$HAC và $△$HNB ta có:

$\hat{HAC}$ = $\hat{HNB}$ = 90°

$\hat{H}$ chung

$⇒$ $△$HAC $\~$ $△$HNB (g-g) $⇒$ $\frac{HA}{HN}$ = $\frac{HC}{HB}$ = $\frac{AC}{NB}$ = $\frac{4,5}{3}$ = 1,5

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}HA=1,5HN\\HC=1,5HB\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}HB+3=1,5HN\\HN+4,5=1,5HB\end{array}\right.$

Giải hệ trên ta được: HN = 7,2 (đvđd) và HB = 7,8 (đvđd)

**Câu 6. (2,0 điểm)**

Cho tam giác vuông ABC có độ dài cạnh huyền BC = a. Gọi AH là đường cao của tam giác ( H $\in $ BC), D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AC và AB . Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ADHE.



**Lời giải**

Gọi O là trung điểm của cạnh huyền BC $⇒$ AO là trung tuyến ứng với BC

Vì AH là đường cao của tam giác ABC (H $\in $ BC) nên: AH $\leq $ AO (1)

Xét tứ giác ADHE có $\hat{AEH}$ = $\hat{EAD}$ = $\hat{ADH}$ = 90° $⇒$ ADHE là hình chữ nhật

$⇒$ $S\_{ADHE}$ = AE.AD

Do $△$ABH vuông tại H, đường cao EH, nên ta có: $AH^{2}$ = AE.AB $⇒$ AE = $\frac{AH^{2}}{AB}$

Tương tự với $△$AHC, ta cũng có: AD = $\frac{AH^{2}}{AC}$

Suy ra: $S\_{ADHE}$ = $\frac{AH^{4}}{AB.AC}$, mà AB.AC = AH.BC (hệ thức lượng trong $△$ABC vuông tại A)

$⇒$ $S\_{ADHE}$ = $\frac{AH^{4}}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $⇒$ $S\_{ADHE}$ = $\frac{AH^{4}}{BC}$ $\leq $ $\frac{AO^{3}}{BC}$ = $\frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^{3}}{BC}$ = $\frac{BC^{2}}{8}$ = $\frac{a^{2}}{8}$

Vậy Max $S\_{ADHE}$ = $\frac{a^{2}}{8}$ khi AH = AO hay H $≡$ O ($△$ABC vuông tại A).

**------- HẾT---------**