

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

- Câu 1.** (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu
- A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$ B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$
- C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$ D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

- Câu 2.** (Mã 101 - 2020 Lần 1) $\int x^2 dx$ bằng
- A. $2x + C.$ B. $\frac{1}{3}x^3 + C.$ C. $x^3 + C.$ D. $3x^3 + C.$

Lời giải

Chọn

B.

- Câu 3.** Hàm số nào sau đây **không** là một nguyên hàm của $f(x) = \sqrt[3]{x}$ trên $(0; +\infty)$?
- A. $F_1(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + 1$ B. $F_3(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + 3$
- C. $F_4(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 4$ D. $F_2(x) = \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{4} + 2$

Lời giải

Với $x \in (0; +\infty)$, ta có: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}.$

Suy ra: $F(x) = \int f(x) dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C.$

- Câu 4.** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là
- A. $4x^4 + C.$ B. $3x^2 + C.$ C. $x^4 + C.$ D. $\frac{1}{4}x^4 + C.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$

- Câu 5.** (Mã 104 - 2020 Lần 2) $\int 4x^3 dx$ bằng

- A. $4x^4 + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + C$. C. $12x^2 + C$. D. $x^4 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int 4x^3 dx = x^4 + C$.

Câu 6. (Mã 103 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ B. $x^4 + x^2 + C$ C. $x^5 + x^3 + C$. D. $4x^3 + 2x + C$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$$

Câu 7. (Mã 104 - 2019) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $x^2 + C$. B. $2x^2 + C$. C. $2x^2 + 4x + C$. D. $x^2 + 4x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + 4) dx = x^2 + 4x + C$

Câu 8. (Mã 102 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- A. $x^2 + C$. B. $x^2 + 6x + C$. C. $2x^2 + C$. D. $2x^2 + 6x + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int (2x + 6) dx = x^2 + 6x + C$$

Câu 9. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- A. $\sin x + 3x^2 + C$. B. $-\sin x + 3x^2 + C$. C. $\sin x + 6x^2 + C$. D. $-\sin x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x) dx = \int (\cos x + 6x) dx = \sin x + 3x^2 + C$

Câu 10. (Mã 101-2021-Lần 1) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = 2x + C$ B. $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$. D. $\int f(x) dx = x^3 + 4x + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = x^2 + 4 \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$

Câu 11. (Mã 101-2021-Lần 2) Cho hàm số $f(x) = 4 + \cos x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = -\sin x + C$

B. $\int f(x) dx = 4x + \sin x + C$

C. $\int f(x) dx = 4x - \sin x + C$

D. $\int f(x) dx = 4x + \cos x + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = 4x + \sin x + C$

Câu 12. (Mã 101-2021-Lần 1) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x) dx = e^{x^2} + C$

B. $\int f(x) dx = e^x + 2x + C$

C. $\int f(x) dx = e^x + C$

D. $\int f(x) dx = e^x - 2x + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x) dx = \int (e^x + 2) dx = e^x + 2x + C$

Câu 13. (Mã 105 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$

A. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$

B. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$

C. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$

D. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

Lời giải

Chọn A

Câu 14. (Mã 101 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

B. $3x^2 + 1 + C$

C. $x^3 + x + C$

D. $x^4 + x^2 + C$

Lời giải

Chọn A

$\int (x^3 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

Câu 15. (Mã 103 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

A. $x^2 + 3x + C$

B. $2x^2 + 3x + C$

C. $x^2 + C$

D. $2x^2 + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + C$.

Câu 16. (Đề Tham Khảo 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 17. (Đề Tham Khảo 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

A. $e^x + 1 + C$

B. $e^x + x^2 + C$

C. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

D. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

Lời giải

Chọn C

Câu 18. (Mã 101 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

A. $x^2 + C$

B. $x^2 + 5x + C$

C. $2x^2 + 5x + C$

D. $2x^2 + C$

Lời giải

Chọn B

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là $F(x) = x^2 + 5x + C$.

Câu 19. (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$ ta được đáp án B

Câu 20. (Đề Tham Khảo 2018) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- A. $x^3 + C$ B. $\frac{x^3}{3} + x + C$ C. $6x + C$ D. $x^3 + x + C$

Lời giải

Chọn D

$$\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C.$$

Câu 21. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$ B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$ D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

Lời giải

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$

Câu 22. (Chuyên KHTN 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là
A. $x^3 + \cos x + C$ B. $6x + \cos x + C$ C. $x^3 - \cos x + C$ D. $6x - \cos x + C$

Lời giải

Ta có $\int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C$

Câu 23. (Chuyên Bắc Ninh 2019) Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$ B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C$
C. $f(x) = 12x^2 + 2x$ D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$

Lời giải

Có $f(x) = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x$

Câu 24. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là
A. $\ln x - \cos x + C$ B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$ C. $\ln|x| + \cos x + C$ D. $\ln|x| - \cos x + C$

Lời giải

Ta có $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx = \ln|x| - \cos x + C$

- Câu 25.** (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$ là
- A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$ B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$
- C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$ D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C$

Lời giải

Sử dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ta được:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2019x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2019x + C.$$

- Câu 26.** (Sở Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Tìm $\int f(x) dx$
- A. $\int f(x) dx = 2^x + x^2 + x + C$ B. $\int f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$
- C. $\int f(x) dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$ D. $\int f(x) dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C$

Lời giải

Ta có: $\int (2^x + x + 1) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$

- Câu 27.** (Quảng Ninh 2019) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$
- A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$ B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$
- C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$ D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$$

- Câu 28.** (Chuyên Hạ Long 2019) Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)?$
- A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C$ B. $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C$
- C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$ D. $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C$

Lời giải

Ta có: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \Rightarrow F(x) = \int (x^3 + 6x^2 + 11x + 6) dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$

Câu 29. (Mã 101-2022) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C.$

B. $\int f(x) dx = e^x + C.$

C. $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C.$

Câu 30. (Mã 103 - 2022) Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}.$

B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}.$

C. $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$

D. $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Lời giải

Chọn D

Có $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ suy ra $F(x) = \cot x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Câu 31. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

B. $F(x) = \ln|x| + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

C. $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

D. $F(x) = \ln(-x) + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

Lại có $F(-2)=0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$. Do đó $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$.

$$F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$$

Vậy

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x-2)$ là

A. $\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C$

B. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

C. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

D. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

Lời giải

Chọn D

$$\int (x+1)(x-2)dx = \int (x^2 - x - 2)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Câu 33. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(2x-1)$ là

A. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

B. $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

C. $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$

D. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x)dx = \int (x+1)(2x-1)dx = \int (2x^2 + x - 1)dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C.$$

Câu 34. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(2x-3)^2$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + \frac{9}{2}x^2 + C$

B. $x^4 - 4x^2 + 9x + C$

C. $\frac{x^2(2x-3)^3}{6} + C$

D. $x^4 - 4x^2 + \frac{9}{2}x^2 + C$

Lời giải

Chọn D

$$\int x(2x-3)^2 dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 9x) dx = x^4 - 12 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + C$$

Câu 35. Tìm $\int \frac{x^2 + x - 2}{x} dx$

A. $\frac{x^2}{2} + x - 2 \ln |x| + C$

B. $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \ln |x| + C$

C. $\frac{x^2 + 2}{x^2} + C$

D. $\frac{x^2}{2} - 2 \ln |x| + C$

Lời giải

Chọn A

$$\int \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x - 2 \ln |x| + C$$

Câu 36. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5 + 2x^4}{x^2}$

A. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$

B. $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + 5 \ln x^2 + C$

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2} \Rightarrow \int \left(\frac{5}{x^2} + 2x^2 \right) dx = -\frac{5}{x} + \frac{2x^3}{3} + C$$

Câu 37. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(x - \frac{2}{x} \right)^2$.

A. $x^3 - 4x + \frac{4}{x} + C$

B. $\frac{1}{3}x^3 - 4x - \frac{1}{x} + C$

C. $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{4}{x} + C$

D. $\frac{x^3}{3} - 4x - \frac{4}{x} + C$

Lời giải

Chọn D

$$\int f(x) dx = \int \left(x - \frac{2}{x} \right)^2 dx = \int \left(x^2 - 4 + \frac{4}{x^2} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x - \frac{4}{x} + C$$

Câu 38. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3\sqrt{x} + x^2}{x}$.

A. $6\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$

B. $3\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$

C. $6\sqrt{x} + x^2 + C$

D. $3\sqrt{x} + x^2 + C$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(\frac{3\sqrt{x} + x^2}{x} \right) dx = \int \left(3 \frac{\sqrt{x}}{x} + x \right) dx = \int \left(3x^{-\frac{1}{2}} + x \right) dx = 3 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2} + C \\ &= 6\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + C. \end{aligned}$$

Câu 39. Tìm $\int \frac{x dx}{x^2 - x^3} - \int \frac{dx}{x^2 - x^3}$

A. $x^3 - x^2 + C$

B. $\frac{1}{x} + C$

C. $\frac{x}{x^3 - 1} + C$

D. $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + C$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{x^2 - x^3} &= \int \frac{dx}{x^2 - x^3} = \int \left(\frac{x}{x^2 - x^3} - \frac{1}{x^2 - x^3} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{x-1}{x^2 - x^3} \right) dx = \int \left(-\frac{x-1}{x^2(x-1)} \right) dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Câu 40. Tính $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} dx$

A. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + C$

B. $\frac{3}{4}x\sqrt{x} + 3x + C$

C. $\frac{3}{4}x\sqrt{x} - 3x + C$

D. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + C$

Lời giải

Chọn D

$$\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} dx = \int \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+3} dx = \int (\sqrt{x}-3) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3 \right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + C$$

Câu 41. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3} \sin^3 \frac{x}{2} + C$

B. $\frac{1}{2}x - \frac{\sin x}{2} + C$

C. $\frac{1}{8} \sin^3 \frac{x}{2} + C$

D. $\frac{1}{2}x + \frac{\sin x}{2} + C$

Lời giải

Chọn B

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2} (x - \sin x) + C = \frac{1}{2} x - \frac{\sin x}{2} + C$$

Câu 42.

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$$

A. $x + \cos x + C$

B. $x - \cos x + C$

C. $1 + \cos x + C$

D. $1 - \cos x + C$

Lời giải

Chọn A

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \int (1 - (\sin x + \sin 0)) dx = x + \cos x + C.$$

Câu 43.

$$\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad \text{bằng}$$

A. $-4 \cot x + C$

B. $4 \tan x + C$

C. $2 \cot x - 2x + C$

D. $2 \tan x - 2x + C$

Lời giải

$$\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{4}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right)^2} dx = \int \frac{4}{\sin^2 x} dx = -4 \cot x + C$$

Ta có:

Câu 44. (Mã 105 2017) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.
Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$ B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$ D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có: $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

- Câu 45.** $F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + 1$ và $F(0) = 1$. Tính giá trị của $F(1)$.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 + 1) dx = x^4 + x + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 1$ nên $C = 1 \Rightarrow F(1) = 3$.

- Câu 46.** Cho hàm số $f(x) = 2x + e^{-x}$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2023$
A. $F(x) = x^2 - e^{-x} + 2023$. B. $F(x) = x^2 - e^x + 2024$.
C. $F(x) = x^2 + e^{-x} + 2022$. D. $F(x) = x^2 - e^{-x} + 2024$.

Lời giải

Chọn D

$$F(x) = \int (2x + e^{-x}) dx = \frac{2x^2}{2} - e^{-x} + C = x^2 - e^{-x} + C$$

$$F(0) = 2023 \Leftrightarrow 0^2 - e^{-0} + C = 2023 \Leftrightarrow C = 2024$$

$$F(x) = x^2 - e^{-x} + 2024.$$

- Câu 47.** Cho $F(x) = \int \sin \frac{x}{2} dx$. Biết $F(\pi) = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $F(0) \in (2; 3)$ B. $F(0) \in (-4; -2)$ C. $F(0) \in (0; 1)$ D. $F(0) \in (-2; 0)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x) = \int \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} + C$

$$F(\pi) = 1 \Rightarrow C = 1$$

Vậy $F(x) = -2\cos\frac{x}{2} + 1$. Suy ra $F(0) = -1 \in (-2; 0)$.

- Câu 48. (Mã 104 2017)** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
- A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$ B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$
- C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$ D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Lời giải

Chọn C

Có $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

- Câu 49. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
- A. $f(x) = 2x + 5\cos x + 3$ B. $f(x) = 2x - 5\cos x + 15$
- C. $f(x) = 2x + 5\cos x + 5$ D. $f(x) = 2x - 5\cos x + 10$

Lời giải

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 5\sin x) dx = 2x + 5\cos x + C$

Mà $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 2x + 5\cos x + 5$.

- Câu 50.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ thỏa mãn $F(0) = 2$, giá trị của $F(1)$ bằng
- A. 4. B. $\frac{13}{3}$. C. 2. D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\int x^2 - 2x + 3 dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ có $F(0) = 2 \Rightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{13}{3}$.

- Câu 51.** Để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ thì giá trị của tham số m là
- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int (3x^2 + 10x - 4)dx = x^3 + 5x^2 - 4x + C$.

Do đó $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$

khi và chỉ khi $\begin{cases} m = 1 \\ 3m + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

- Câu 52.** Cho $\int \frac{ax + b + ce^x \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 9\sqrt{x^2 + 1} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 5e^x + C$. Tính giá trị biểu thức $M = a + b + c$.
- A. 6. B. 20. C. 16. D. 10.

Lời giải

Ta có $\left[9\sqrt{x^2 + 1} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 5e^x \right]' = \frac{9x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 2 \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + 5e^x = \frac{9x + 2 + 5e^x \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Do đó $a = 9$, $b = 2$, $c = 5$. Suy ra $M = a + b + c = 16$.

NHÓM CÂU HỎI DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ GIỎI

- Câu 53.** Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc $a(t) = 2t + 1$ (m/s^2). Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h.
- A. 200. B. 243. C. 288. D. 300.

Lời giải

Ta có $v(t) = \int a(t)dt = \int (2t + 1)dt = t^2 + t + C$.

Mặt khác vận tốc ban đầu là 180 km/h hay 50 m/s nên ta có $v(0) = 50 \Leftrightarrow C = 50$.

Khi đó vận tốc của vật sau 5 giây là $v(5) = 5^2 + 5 + 50 = 80$ m/s hay 288 km/h.

- Câu 54.** Một xe buýt bắt đầu đi từ một nhà chờ xe buýt A với vận tốc $v(t) = 10 + 3t^2$ (m/s) (khi bắt đầu chuyển động từ A thì $t = 0$) đến nhà chờ xe buýt B cách đó 175 m. Hỏi thời gian xe đi từ A đến B là bao nhiêu giây?
- A. 7. B. 8. C. 9. D. 5.

Lời giải

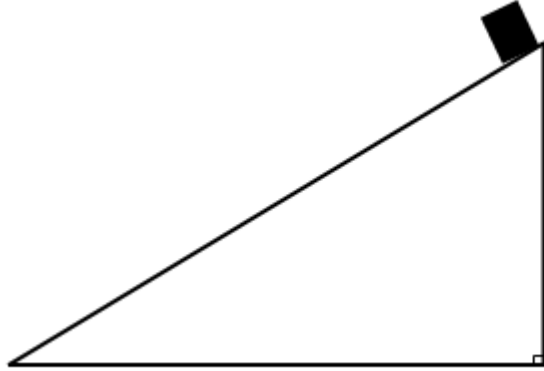
Quãng đường xe đi được sau thời gian t là

$s(t) = \int v(t)dt = \int (10 + 3t^2)dt = 10t + t^3 + C$.

Tại $t=0$ thì $S=0$ nên $C=0 \Rightarrow s(t)=10t+t^3$.

Với $S=175$ thì $t^3+10t-175=0 \Leftrightarrow t=5$.

Câu 55. Một vận chuyển động không vận tốc đầu xuất phát từ đỉnh mặt phẳng nằm nghiêng (như hình vẽ). Biết gia tốc của chuyển động là 5m/s^2 và sau $1,2\text{s}$ thì vật đến chân của mặt ván. Độ dài của mặt ván là



A. $3,6\text{m}$.

B. $3,2\text{m}$.

C. 3m .

D. $2,8\text{m}$.

Lời giải

Vì gia tốc của chuyển động là 5m/s^2 nên vận tốc của chuyển động được tính theo công thức

$$v(t) = \int a(t) dt = 5t + C$$

Vì vận tốc ban đầu là 0 nên $v(t)=5t(\text{m/s})$. Do đó quãng đường của chuyển động được xác định theo công thức

$$s(t) = \int v(t) dt = \frac{5}{2}t^2 + C$$

Lúc ban đầu vật chưa chuyển động nên ta chọn $s(t) = \frac{5}{2}t^2 (\text{m})$.

Độ dài mặt ván chính là quãng đường vật chuyển động sau $1,2\text{s}$ là $s = \frac{5}{2}(1,2)^2 = 3,6(\text{m})$.

Câu 56. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=\sin^2 x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Giá trị biểu thức $S=F(-\pi)+2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $S = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{4}$.

B. $S = \frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4}$.

C. $S = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{8}$.

D. $S = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có
$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Mà $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\sin \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} S &= F(-\pi) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(-2\pi) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + 2\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right] \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

- Câu 57. (Sở Nam Định 2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng
- A. $\frac{32}{5} + \cos 1$ B. $\frac{32}{5} - \cos 1$ C. $\frac{32}{5} - \sin 1$ D. $\frac{32}{5} + \sin 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 2x^4 - \cos x + C_1$.

Mà $f(0) = 3 \Leftrightarrow -1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 4$. Vậy $f(x) = 2x^4 - \cos x + 4$.

Ta có: $\int f(x) dx = \int (2x^4 - \cos x + 4) dx = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C$

Do đó: $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C_2$

Mà: $F(0) = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$. Suy ra: $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + 2$

Khi đó: $F(1) = \frac{32}{5} - \sin 1$

- Câu 58. (Mã 103 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng
- A. $-\frac{391}{400}$ B. $-\frac{1}{40}$ C. $-\frac{41}{400}$ D. $-\frac{1}{10}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{25}, \text{ nên ta có } C = -9. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}.$$

- Câu 59.** (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x).e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(12; 13)$. B. $(9; 10)$. C. $(11; 12)$. D. $(13; 14)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

Từ giả thiết $(f'(x))^2 = f(x).e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) = \sqrt{f(x).e^x}, \forall x \in [0; +\infty)$.

$$\text{Do đó, } \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty).$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C, \forall x \in [0; +\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Từ đó, tính được $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$.

- Câu 60.** (THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$ thì giá trị $f(2)$ là

- A. e^2 . B. $2e$. C. $e + 1$. D. e^3 .

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + C}$$

Theo giả thiết $f(-1) = 1$ nên $e^{-\frac{1}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}$.

Vậy $y = f(x) = e^{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}}$. Do đó $f(2) = e^3$.

- Câu 61. (Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $f(x) < 2$ B. $2 < f(x) < 4$ C. $f(x) > 6$ D. $4 < f(x) < 6$

Lời giải

Ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) = 2\sqrt{x+1} + C$

Mà $f(0) = 1$ nên $C = -2 \Rightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow f(3) = e^2 > 6$

- Câu 62. (Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Tính giá trị của $T = f^2(2)$
- A. $\frac{43}{30}$ B. $\frac{16}{15}$ C. $\frac{43}{15}$ D. $\frac{26}{15}$

Lời giải

Có $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x \Leftrightarrow (f(x) \cdot f'(x))' = x^3 - 2x$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = \int (x^3 - 2x) dx = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$. Suy ra $C = 1$. Vậy $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$

Tiếp, có $2f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Leftrightarrow (f^2(x))' = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$

$\Leftrightarrow f^2(x) = \int (\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2) dx = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$

Từ $f(0) = 1$. Suy ra $C = 1$. Vậy $f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1$.

Do đó $T = \frac{43}{15}$

- Câu 63. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1) \cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

- A. $f(8) = 49$ B. $f(8) = 256$ C. $f(8) = \frac{1}{16}$ D. $f(8) = \frac{49}{64}$

Lời giải

Chọn A

Ta có với $\forall x \in (0; +\infty)$ thì $y = f(x) > 0$; $x+1 > 0$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Do đó $[f'(x)]^2 = (x+1)f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1}$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{x+1} dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C$

Vì $f(3) = \frac{4}{9}$ nên $C = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -2$.

Suy ra $f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2 \right)^2$, suy ra $f(8) = 49$.

Câu 64. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x+1)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0, \forall x > 0$ và $f(2) = \frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P = f(1) + f(2) + \dots + f(2019)$

A. $\frac{2021}{2020}$. B. $\frac{2020}{2019}$. C. $\frac{2019}{2020}$. D. $\frac{2018}{2019}$.

Lời giải

TH1: $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ trái giả thiết.

TH2: $f(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) = -(2x+1)f^2(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -(2x+1)$
 $\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = - \int (2x+1) dx \Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = -(x^2 + x + C)$

Ta có: $f(2) = \frac{1}{6} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow P = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2020} = \frac{2019}{2020}$.

Câu 65. (THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018) Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -1$.

B. $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$.

D. $b - a = 3029$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$

$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C$

Vì $f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2$

Vậy $f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$

Do đó $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2} = -\frac{1009}{2020}$.

Vậy $a = -1009$; $b = 2020$. Do đó $b - a = 3029$.

- Câu 66.** (Sở Hà Tĩnh - 2018) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng
- A. $e^{\frac{3}{2}}$. B. e^3 . C. $e^{\frac{5}{2}}$. D. e^2 .

Lời giải

$$[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Rightarrow \frac{f(x).f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1$$

Theo đề bài, ta có

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

Mà $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0 \end{cases}$. Suy ra: $f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}$.

- Câu 67.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 2x \quad \forall x \in (0; +\infty)$, $f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:
- A. $\frac{25}{6}$. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $2xf''(x) + f'(x) = 2x$ (1) trên $(0; +\infty)$: $(1) \Leftrightarrow f''(x) + \frac{1}{2x} \cdot f'(x) = 1$ (2).

Đặt $g(x) = \frac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x) dx = \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln x + C = \ln \sqrt{x} + C$. Ta chọn $G(x) = \ln \sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)} = \sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x} \cdot f''(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot f'(x) = \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} \cdot f'(x))' = \sqrt{x} \quad (3)$$

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int_1^4 (\sqrt{x} \cdot f'(x))' dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f'(x)) \Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right) \Big|_1^4 \Rightarrow 2f(4) - f(1) = \frac{14}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3} + 1 \right) = \frac{17}{6} \quad (\text{vì } f(1) = 1).$$

Vậy $f(4) = \frac{17}{6}$.