PHẦN E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức

$h = 16 + 7\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right), 0 \le t \le 24.$

Tìm thời điểm mà mực nước tại cảng là cao nhất.

Trả lời: ....

Lời giải

Do $-1 \le \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \le 1$ nên $16 - 7 \le 16 + 7\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \le 16 + 7$ hay $9 \le h \le 23$.

Vậy mực nước tại cảng cao nhất bằng $23m$ khi $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 6 + 24k (k \in \mathbb{Z})$.

Mà $0 \le t \le 24$ nên $t = 6$. Thời điểm mà mực nước tại cảng cao nhất là $t = 6$ (giờ).

Câu 2. Công thức Định luật làm mát của Newton được cho như sau: $kt = \ln\frac{T - S}{T_0 - S}$, trong đó t là số giờ trôi qua, T_0 là nhiệt độ lúc đầu, T là nhiệt độ sau t giờ, S là nhiệt độ môi trường (T_0, T, S theo cùng một đơn vị đo), k là một hằng số. Một cốc trà có nhiệt độ $96^\circ C$, sau 2 phút nhiệt độ giảm còn $90^\circ C$. Biết nhiệt độ phòng là $24^\circ C$. Tính nhiệt độ của cốc trà sau 10 phút (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Trả lời: ....

Lời giải

Thay $t = 2$ phút $= \frac{1}{30}$ giờ, $T_0 = 96, T = 90, S = 24$, ta có: $\frac{1}{30}k = \ln\frac{90 - 24}{96 - 24}$.

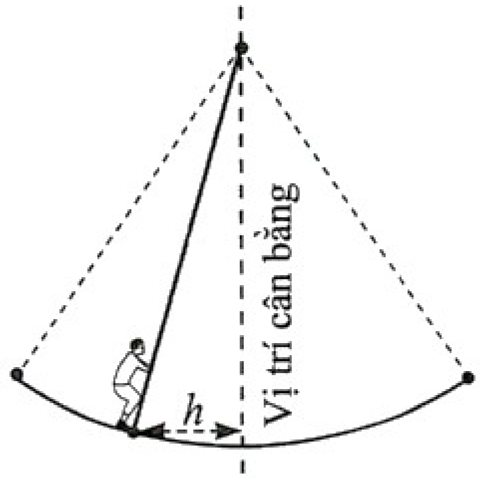
Do đó, $k = 30\ln\frac{11}{12}$. Sau 10 phút $= \frac{1}{6}$ giờ, ta có: $\frac{1}{6}k = \ln\frac{T - 24}{96 - 24}$ hay $5\ln\frac{11}{12} = \ln\frac{T - 24}{72}$.

Do đó, $\frac{T - 24}{72} = \left(\frac{11}{12}\right)^5$.

Suy ra $T = 72 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^5 + 24 \approx 70,6^\circ C$.

Vậy nhiệt độ của cốc trà sau 10 phút khoảng $70,6\left(^\circ C\right)$.

Câu 3. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình).



Hình 1

Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian $t(s)$ (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: R. Larson and Edwards, Calculus 10e Cengage). Tìm thời điểm đầu tiên mà khoảng cách h là lớn nhất. (Viết kết quả dưới dạng số thập phân).

Trả lời: ……………

Lời giải

Do $-1 \leq \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 1$ nên $-3 \leq 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 3$ hay $-3 \leq d \leq 3$.

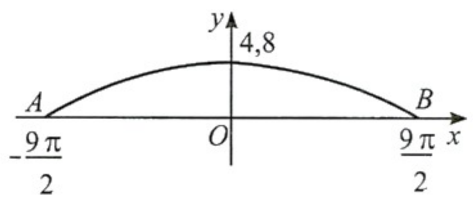
Do đó, $0 \leq |d| \leq 3$. Vậy h lớn nhất bằng 3 khi $|d| = 3$ hay

$$\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2} \text{ v?i } k \in \mathbb{N}$$

Thời điểm đầu tiên mà khoảng cách h lớn nhất là $t = 0,5\,s$ (ứng với $k = 0$).

Câu 4. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,8\cos\frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trục là mét như ở Hình.



Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6m$ so với mực nước sông. Hỏi chiều rộng của khối hàng hoá đó lớn nhất là bao nhiêu mét để sà lan có thể đi qua được gầm cầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……………

Lời giải

Với mỗi điểm $M(x;y)$ nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M. Xét phương trình:

$4,8\cos\frac{x}{9}=3,6 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{9}=\frac{3}{4}$.

Do $x\in\left[-\frac{9\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right]$ nên $\frac{x}{9}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Từ phương trình $\cos\frac{x}{9}=\frac{3}{4}$ với $\frac{x}{9}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, ta có: $\frac{x}{9}\approx\pm0,7227$. Khi đó, $2|x|\approx13,0086$. Vậy chiều rộng của khối hàng hoá đó lớn nhất là $13m$ để sà lan có thể đi qua được gầm cầu.

Câu 5. Trong một thí nghiệm, một quả cầu được gắn vào một đầu dây đàn hồi, đầu kia của sợi dây được gắn cố định vào một thanh treo nằm ngang. Sau khi quả cầu được kéo xuống và thả ra, nó bắt đầu di chuyển lên xuống. Khi đó, chiều cao $h(cm)$ của quả cầu so với mặt đất theo thời gian $t(s)$ được cho bởi công thức
$h=100-30\cos20t.$

Tính thời điểm đầu tiên mà quả cầu đạt chiều cao cao nhất kể từ khi quả cầu được thả ra (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời: ....

Lời giải

Do $-1\le\cos20t\le1$ nên $70\le100-30\cos20t\le130$. Ta có $h=130cm$ khi

$\cos20t=-1\Leftrightarrow 20t=\pi+k2\pi\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10}, k\in\mathbb{N}$

Vậy thời điểm đầu tiên mà quả cầu đạt chiều cao cao nhất kể từ khi quả cầu được thả ra là $t=\frac{\pi}{20}\approx0,16$ (s).

Câu 6. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của một chiếc ô tô giảm đi 6% so với năm trước đó. Giả sử một chiếc ô tô lúc mới mua là 800 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị còn lại của chiếc ô tô đó nhỏ hơn 600 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?
Trả lời: ....

Lời giải

Gọi S là giá trị còn lại của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng và được tính bởi công thức: $S=S_0\cdot(0,94)^t$, trong đó S_0 là giá trị ban đầu của ô tô. Xét phương trình: $800.(0,94)^t<600\Leftrightarrow(0,94)^t<0,75\Leftrightarrow t>\log_{0,94}0,75$ vì $\log_{0,94}0,75\approx4,65$ nên $t>4,65$.

Vậy sau khoảng 5 năm sử dụng thì giá trị còn lại của một chiếc ô tô đó nhỏ hơn 600 triệu đồng.

Câu 7. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của ${}^{14}_{6}C$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử ${}^{14}_{6}C$ giảm đi một nửa. Một cây còn sống có lượng ${}^{14}_{6}C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ${}^{14}_{6}C$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ và đo được tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_{6}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là 75%. Hỏi mẫu gỗ cổ đó đã chết cách đây bao nhiêu năm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……………

Lời giải

Gọi m_0 là khối lượng của ${}^{14}_{6}C$ trong cây tại thời điểm cây còn sống $(t=0)$. Khi đó, khối lượng $m(t)$ của ${}^{14}_{6}C$ trong cây sau khi chết t (năm) được tính bởi công thức: $m(t)=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$. Theo giả thiết, ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}=\frac{m(t)}{m_0}=0,75$. Do đó, $\frac{t}{5730}=\log_{\frac{1}{2}}0,75$. Vậy $t\approx 2378$ (năm).

Câu 8. Cô Liên gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $6\%/$ năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Liên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì số tiền cô Liên có được cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……………

Lời giải

Số tiền sau t năm mà cô Liên có là: $S=100\cdot(1,06)^t$. Xét bất phương trình: 100. $(1,06)^t>150\Leftrightarrow(1,06)^t>\frac{150}{100}\Leftrightarrow t>\log_{1,06}(1,5)$. Vì $\log_{1,06}(1,5)\approx 6,96$ nên $t>6,96$.

Vậy sau ít nhất 7 năm thì số tiền cô Liên có được cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng.

Câu 9. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x=2\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Trả lời: ……………

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hòa là vị trí vật đứng yên, khi đó $x=0$, ta có

$$2\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 5t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k,k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow t=\frac{2\pi}{15}+k\frac{\pi}{5},k\in\mathbf{Z}$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0\le t\le 6$ hay

$$0\le\frac{2\pi}{15}+k\frac{\pi}{5}\le 6\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le k\le\frac{90-2\pi}{3\pi}$$

Vì $k\in\mathbf{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Câu 10. Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hoá bằng công thức: $V(t)=780\cdot(0,905)^t$. Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc ô tô đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Trả lời: ....

Lời giải

Ta cần tìm t sao cho $V(t)\le 300 \Leftrightarrow 780\cdot(0,905)^t \le 300 \Leftrightarrow (0,905)^t \le \dfrac{5}{13} \Leftrightarrow t \ge \log_{0,905}\dfrac{5}{13} \approx 9,6.$

Vậy sau khoảng 10 năm sử dụng, giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng.

Câu 11. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là: $A = 500\cdot(1+0,075)^n$ (triệu đồng).
Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Trả lời: ....

Lời giải

Để có được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) thì

$500\cdot 1,075^n \ge 800 \Leftrightarrow 1,075^n \ge 1,6 \Leftrightarrow n \ge \log_{1,075}1,6 \approx 6,5$ (năm)

Vậy cần tối thiểu 7 năm gửi tiết kiệm thì bác An thu được ít nhất 800 triệu đồng.

Câu 12. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t) = 500e^{0,4t}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con?
Trả lời: ....

Lời giải

Số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con khi và chỉ khi

$N(t) \ge 80000 \Leftrightarrow 500e^{0,4t} \ge 80000 \Leftrightarrow e^{0,4t} \ge 160 \Leftrightarrow t \ge \ln 160 : 0,4 \approx 12,69$ (giờ)

Vậy sau khoảng 12,69 giờ thì số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con.

Câu 13. Giả sử tổng chi phí hoạt động (đơn vị tỉ đồng) trong một năm của một công ty được tính bằng công thức $C(t) = 90 - 50e^{-t}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm kể từ khi công ty được thành lập. Tính chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).
Trả lời: ....

Lời giải

Chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập là:

$C(10) = 90 - 50e^{-10} \approx 89,998$ (tỉ đồng)

Câu 14. Dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là $A = 98564407$ người.
(Nguồn: https://danso.org/viet-nam)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2021) ước tính theo công thức: $S = A\,.\,e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số Việt Nam vượt quá 110 triệu người?

Trả lời: ....

Lời giải

Ta có: 98564 407. $e^{0,0093t} > 110000000 \Leftrightarrow e^{0,0093t} > 110000000 : 98564407$

$\Leftrightarrow 0,0093t > \ln\dfrac{110000000}{98564407}$. Suy ra $t > 11,803$. Vậy sau 12 năm tính từ mốc năm 2021, tức là từ năm 2033 trở đi, dân số Việt Nam vượt quá 110 triệu người.

Câu 15. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là $6\% /$ năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.
Trả lời: ……………

Lời giải

Gọi x là số năm người đó gửi tiền trong ngân hàng.

Số tiền cả gốc và lãi người đó có được sau x năm được tính bởi công thức:

$S = 100.1,06^x$. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì

$100.1,06^x > 130 \Leftrightarrow 1,06^x > 1,3 \Leftrightarrow x > \log_{1,06} 1,3$. Suy ra $x > 4,503$. Do kì hạn gửi là 12 tháng nên để rút được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất 5 năm.

Câu 16. Cường độ của một trận động đất, kí hiệu là M (độ Richter), được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, ở đó A là biên độ rung chấn tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số phụ thuộc vào từng khu vực)
(Nguồn: https://vi.wikipedia.org/wiki/Độ_Richter)

Vào hồi 12 giờ 14 phút trưa ngày 27/07/2020, tại khu vực huyện Mộc Châu, Sơn La xảy ra trận động đất thứ nhất với cường độ 5,3 độ Richter. Trong vòng 20 tiếng đồng hồ, Sơn La đã xảy ra liên tiếp 7 trận động đất. Đến 8 giờ 26 phút sáng 28/07/2020, trận động đất thứ bảy xảy ra với cường độ 4 độ Richter. (Nguồn: https://plo.vn/7-tran-dong-dat-lien-tiep-o-son-la-trong-vong20-tieng-dong-ho-post585443.html) Biết rằng biên độ chuẩn được dùng cho cả tỉnh Sơn La. Hỏi biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng mấy lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Trả lời: ……………

Lời giải

Cường độ trận động đất thứ nhất là: $M_1 = \log A_1 - \log A_0 = 5,3$.

Cường độ trận động đất thứ bảy là: $M_7 = \log A_7 - \log A_0 = 4$.

Do đó, ta có:

$M_1 - M_7 = \log A_1 - \log A_7 = 1,3 \Leftrightarrow \log\dfrac{A_1}{A_7} = 1,3 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_7} = 10^{1,3}$. Suy ra $\dfrac{A_1}{A_7} \approx 20$.

Vậy biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng 20 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy.

Câu 17. Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0), t$ (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có

500 con và sau 6 giờ có 2000 con. Hỏi ít nhất bao nhiêu giờ, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con?

Trả lời: ……………

Lời giải

Ta có: $A=500, S(360)=2000, 6$ giờ $=360$ phút.

Sau 6 giờ số lượng vi khuẩn là 2000 con, tức là: $2000=500\cdot e^{r.360}$

$\Leftrightarrow e^{r.360}=4 \Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 4}{360}$ (do $e>1$).

Số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con, nghĩa là: $500\cdot e^{\frac{\ln 4}{360}t}\geq 120000$

$\Leftrightarrow e^{\frac{\ln 4}{360}t}\geq 240 \Leftrightarrow \dfrac{\ln 4}{360}\cdot t\geq \ln 240 \Leftrightarrow t\geq \dfrac{360\cdot \ln 240}{\ln 4}\approx 1423,24$ (phút).

Vậy sau ít nhất 24 (giờ) thì số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con.

Câu 18. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác Thảo đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng số tiền là 500 triệu đồng với lãi suất $r<0$ cho kỳ hạn một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi năm trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho năm sau (theo thể thức lãi kép). Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác đã thanh toán hợp đồng ngân hàng với số tiền là 599823000 đồng. Hỏi bác Thảo đã vay ngân hàng với lãi suất r là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Trả lời: ……………

Lời giải

Ta có: $A=500$ triệu đồng, lãi suất $r/$ năm, $n=2$ năm, $T=599823000$ đồng.

Theo công thức lãi kép, ta có:

$$T=A(1+r)^n \quad \Leftrightarrow 599823000=500000000(1+r)^2$$

$$\Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{599823}{500000}}-1\approx 0,095.$$

Vậy lãi suất mà bác Thảo vay ngân hàng là xấp xỉ $9,5\%$.

Câu 19. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 800.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Trả lời: ……………

Lời giải

Giá bán loại xe X năm 2021 là: $800.000.000-800.000.000\times 2\%=800.000.000\times(1-2\%)$

Giá bán loại xe X năm 2022 là: $800.000.000\times(1-2\%)-800.000.000\times(1-2\%)\times 2\%=800.000.000\times(1-2\%)^2$.

Tương tự ta có: giá bán loại xe X năm 2025 sẽ là: $800.000.000\times(1-2\%)^5\approx 723.137.000$ đồng.

Câu 20. **(Mã 104 2018)** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,1\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Trả lời: ……………

Lời giải

Gọi x số tiền gửi ban đầu.

Theo giả thiết $2x = x\left(1+\frac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow 2 = \left(1+\frac{6,1}{100}\right)^N$

$\Leftrightarrow 2 = \left(1+\frac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow N = \log_{(1,061)} 2 \approx 11,7$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được số tiền thỏa yêu cầu.

Câu 21. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

Trả lời: ……………

Lời giải

Sau n tháng, người đó lĩnh được số tiền là: $100.(1+0,6\%)^n$ (triệu đồng).

Sau n tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi)

$\Rightarrow 100.(1+0,6\%)^n \geq 110 \Leftrightarrow n \geq \log_{1+0,6\%} \frac{11}{10} \approx 15,9$.

Câu 22. Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán năm trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bảo nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

Trả lời: ……………

Lời giải

Ta có: $A = 900.000.000, r = \frac{2}{100}$

Năm 2021 giá xe niêm yết là: $T_1 = A - Ar$

Năm 2022 giá xe niêm yết là $T_2 = A - Ar - (A - Ar)r = A(1-r)^2$

.

Năm 2025 giá xe niêm yết là: $T_5 = T_4 - T_4 r = A(1-r)^5$

$T_5 = 900.000.000\left(1-\frac{2}{100}\right)^5 \approx 813.529.000$

Câu 23. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Anh Việt vay tiền ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất là $0,9\%$ / tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?

Trả lời: ……………

Lời giải

Gọi A là số tiền vay ngân hàng; r là lãi suất hàng tháng cho số tiền còn nợ; m là số tiền trả nợ hàng tháng; n là thời gian trả hết nợ.

Để trả hết nợ thì $A(1+r)^n - \frac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow 500(1+0,9\%)^n - \frac{10}{0,9\%}\left[(1+0,9\%)^n - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1+0,9\%)^n = \frac{20}{11}$

$\Leftrightarrow n = \log_{(1+0,9\%)}\frac{20}{11} \approx 66,72$

Vậy sau 67 tháng anh Việt trả hết nợ.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến một chữ số phần thập phân)?

Trả lời: ……………

Lời giải

Sau mỗi giờ, lượng lá bèo phủ trên mặt nước là: $10^n \ (1 \le n \le 12)$.

$\Rightarrow$ Lượng lá bèo phủ kín mặt nước trong chậu (sau 12 giờ) là:

$S = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{12} = \frac{10^{13} - 1}{9}$

Do đó, lượng lá bèo cần để phủ $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu là $\frac{10^{13} - 1}{45}$.

Giả sử sau t giờ, lá bèo phủ kín được $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu, ta có

$1 + 10 + 10^2 + ... + 10^t = \frac{10^{t+1} - 1}{9} = \frac{10^{13} - 1}{45}$

$10^{t+1} = \frac{10^{13} + 4}{5} \Leftrightarrow t \approx 11,3.$

Câu 25. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x lần quảng

cáo được phát thì số $\%$ người xem mua sản phẩm là $P(x)=\dfrac{100}{1+49e^{-0.015x}},\ x\geq 0$. Hãy tính số lần quảng cáo được phát tối thiểu để số $\%$ người xem mua sản phẩm đạt hơn 75%.
Trả lời: ……………

Lời giải

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$P(x)=\frac{100}{1+49e^{-0.015x}}>75\Leftrightarrow 1+49e^{-0.015x}<\frac{4}{3}\Leftrightarrow e^{-0.015x}<\frac{1}{147}$$

$$\Leftrightarrow -0.015x<\ln\left(\frac{1}{147}\right)\Leftrightarrow x>\frac{\ln\left(\frac{1}{147}\right)}{-0.015}\approx 332.7$$

Vậy số lần quảng cáo tối tiểu là 333 lần.

Câu 26. **(Mã 103 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3(5x-1)=-\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?
Trả lời: ……………

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x>\dfrac{1}{5} \\ m>0 \end{cases}$.

Xét phương trình: $\log_9 x^2-\log_3(5x-1)=-\log_3 m\quad(1)$.

Cách 1.

$$(1)\Leftrightarrow \log_3 x-\log_3(5x-1)=-\log_3 m\Leftrightarrow \log_3\frac{5x-1}{x}=\log_3 m\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x}=m\Leftrightarrow 5-\frac{1}{x}=m\quad(2).$$

Xét $f(x)=5-\dfrac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$.

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{1}{x}\right)=5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ phương trình (2) có nghiệm $x>\dfrac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0<m<5$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m>0$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.
Cách 2.

Với $\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$, ta có:

$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x} = m \Leftrightarrow (5-m)x = 1 \quad (2)$

Với $m = 5$, phương trình (2) thành $0.x = 1$ (vô nghiệm).

Với $m \neq 5$, $(2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5-m}$.

Xét $x > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5-m} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{m}{5.(5-m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1;2;3;4\}$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 27. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho phương trình $m.16^x - 2(m-2).4^x + m - 3 = 0 (1)$. Tập hợp tất cả các giá trị dương của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tổng $T = a + 2b$ bằng:
Trả lời: ……………

Lời giải

+) Đặt: $4^x = t(t>0) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow m.t^2 - 2(m-2)t + m - 3 = 0 (2)$

+) Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-2)^2 - m(m-3) > 0 \\ \frac{m-2}{m} > 0 \\ (m-3)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m + 4 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < m < 4 \\ m < 0 (l) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Điều kiện:

+) Vậy $3 < m < 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 11$

Câu 28. **(Mã 102 - 2019)** Cho phương trình $(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?
Trả lời: ……………

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m \leq 3^x \end{cases}$ (*)

Ta có $\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0$ $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 & (2) \\ \sqrt{3^x - m} = 0 & (3) \end{array}\right.$.

Trong đó $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.(4)

Với $m > 0$ thì $3^x = m \Leftrightarrow \log_3 m = x$.

Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi xảy ra các trường hợp sau:

TH1: (3) có nghiệm $x = \log_3 m \le 0 \Leftrightarrow 0 < m \le 1$. Kết hợp điều kiện (*) và (4) ta được $m = 1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $x = 4$.

TH2: $m > 1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x \ge \log_3 m > 0$.

Và do $4 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \log_3 m < 4$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \le m < 3^4$.

Mà m nguyên dương nên ta có $m \in \{3, 4, ..., 80\}$, có 78 giá trị của m.

Vậy có 79 giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt

Câu 29. **(THPT huyện Mỹ Lộc – Vụ Bản – Nam Định 2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(x-1)\cdot\log\left(e^{-x} + m + 2023\right) = x - 2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

Trả lời: ……………

Lời giải

Phương trình tương đương với: $\log\left(e^{-x} + m + 2023\right) = \dfrac{x-2}{x-1}, x \ne 1$

$\Leftrightarrow e^{-x} + m + 2023 = 10^{\frac{x-2}{x-1}}, x \ne 1 \Leftrightarrow m + 2023 = g(x) = -e^{-x} + 10^{\frac{x-2}{x-1}}, x \ne 1$

Ta có $g'(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{(x-1)^2} 10^{\frac{x-2}{x-1}} \ln 10 > 0, \forall x \ne 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-1/e$	$\nearrow$	10

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $-\dfrac{1}{e} < m + 2023 < 10 \Rightarrow m + 2023 \in \{0, \cdots, 9\}$.

Câu 30. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

Trả lời: ……………

Lời giải

Xét $f(x)=\frac{2}{n}x^m-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$

Đạo hàm $f'(x)=\frac{2m}{n}x^{m-1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$

Theo đề bài $f(x)=0$ có ba nghiệm nên $\frac{2m}{n}x^{m-1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có ít nhất hai nghiệm

Xét đồ thị của hàm $y=x^{m-1};\ y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $m-1$ chẵn và $m-1>0$

Suy ra $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$. Khi đó $f'(x)=0$ có nghiệm $\begin{cases}x_1<0\\x_2>0\end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)>0\\f(-1)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{n}>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\\-\frac{2}{n}<\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow n\le 2\Rightarrow n=\{1;2\}$

$n\in\{1;2\}$ và $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$, do $m+n\le 14$ nên ta có 11 cặp $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 31. **(Sở Bình Phước 2023)** Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên dương thỏa mãn $2^{(x-1)(x+1)}\ln\left[(x+1)^2+1\right]=2^{y-x-3}\ln\sqrt{x+y-1}$ và $x,y\le 2023$?

Trả lời: ……………

Lời giải

Điều kiện: $x+y-1>0$.

Từ giả thiết $2^{(x-1)(x+1)}\ln\left[(x+1)^2+1\right]=2^{y-x-3}\ln\sqrt{x+y-1}$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-1}\ln\left[x^2+2x+2\right]=2^{y-x-4}\ln(x+y-1)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+3}\ln\left(x^2+2x+2\right)=2^{y-x}\ln(x+y-1)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+2x+2}\ln\left(x^2+2x+2\right)=2^{x+y-1}\ln(x+y-1)$.

Vì $x,y\in\mathbb{Z}^+$ nên suy ra $x+y\ge 2$. Do đó: $x+y-1\ge 1$.

Xét hàm số $f(t)=2^t\ln t$ trên $[1;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2^t\cdot\ln 2\cdot\ln t+2^t\cdot\frac{1}{t}>0,\ \forall t\ge 1$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Ta thấy $f\left(x^2+2x+2\right)=f(x+y-1)$.

Suy ra $\Rightarrow x^2+2x+2=x+y-1$

$\Leftrightarrow y=x^2+x+3\le 2023$

$\Leftrightarrow x^2+x-2020\le 0 \Rightarrow x\in\left[1;\frac{-1+\sqrt{8081}}{2}\right]$

Vâv có 44 giá tri nguvên của x.

Câu 32. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2(x+y)$?

Trả lời: ……………

Lời giải

Ta có: $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2(x+y)\Leftrightarrow x^2+y\ge 3^{\log_2(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge(x+y)^{\log_2 3}$ (1)

Đk: $x+y\ge 1$ (do $x,y\in\mathbb{Z}$, $x+y>0$)

Đặt $t=x+y\ge 1$, nên từ $(1)\Rightarrow x^2-x\ge t^{\log_2 3}-t$ (2)

Để (1) không có quá 255 nghiệm nguyên y khi và chỉ khi bất phương trình (2) có không quá 255 nghiệm nguyên dương t.

Đặt $M=f(255)$ với $f(t)=t^{\log_2 3}-t$.

Vì f là hàm đồng biến trên $[1,+\infty)$ nên $(2)\Leftrightarrow 1\le t\le f^{-1}\left(x^2-x\right)$ khi $x^2-x\ge 0$.

Vậy (2) có không quá 255 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-x\right)\le 255 \Leftrightarrow x^2-x\le 255$ $\Leftrightarrow -78\le x\le 79$ $(x\in\mathbb{Z})$.

Vậy có 158 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là

Trả lời: ……………

Lời giải

- TH1: $x^2+2y^2>1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1\Leftrightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2$

$\Rightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2>1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-CopSky ta có

$$\left(2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(x^2+2y^2\right)\geq(2x+y)^2$$

$$\Rightarrow x^2+2y^2\geq\frac{2(2x+y)^2}{9}$$

$$\Rightarrow 2x+y\geq\frac{2(2x+y)^2}{9}\Leftrightarrow(2x+y)\left(2x+y-\frac{9}{2}\right)\leq 0\Rightarrow 2x+y\in\left(1;\frac{9}{2}\right]$$

Giá trị lớn nhất của $T=2x+y=\frac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=2; y=\frac{1}{2}$

- TH2: $0<x^2+2y^2<1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\geq 1\Leftrightarrow 2x+y\leq x^2+2y^2<1<\frac{9}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T=2x+y=\frac{9}{2}$.