

BÀI 3**BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR****1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector**

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

• Tổng hai vector: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

• Hiệu hai vector: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

• $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ($k \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Nhận xét: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$)

2. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm tam giác

Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

ABC có $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm

Cho tam giác

của tam giác ABC thì: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Nhận xét:

• Nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

• Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

• Tích vô hướng 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$

• Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, ta có:

+ Hai vector vuông góc: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

+ Góc hai vector:

CHỦ ĐỀ 1**BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR****DẠNG 1****CÁC PHÉP TOÁN VECTOR****1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vector, phép trừ hai vector, phép nhân một số với một vector**

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

• Tổng hai vector: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

• Hiệu hai vector: $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

• $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ($k \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

• $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($b \neq 0$)

• Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; -4; 0)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 1)$. Vector $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là

- A. $(-2; -10; 3)$ B. $(-2; -6; 3)$ C. $(-4; -8; 4)$ D. $(-2; -10; -3)$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $3\vec{v} = (-3; -6; 3)$.

Do đó $\vec{u} + 3\vec{v} = (-2; -10; 3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ vector $\vec{u} - \vec{v}$ là:

- A. $(3; 4; -3)$ B. $(-1; 2; -3)$ C. $(-1; 2; -1)$ D. $(1; -2; 1)$

Lời giải

Chọn C.

$$u - v = (-1; 2; -1)$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho $a = (2; 3; 2)$ và $b = (1; 1; -1)$. Vector $a - b$ có tọa độ là
 A. $(3; 4; 1)$ B. $(-1; -2; 3)$ C. $(3; 5; 1)$ **D. $(1; 2; 3)$**

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } a - b = (2 - 1; 3 - 1; 2 + 1) = (1; 2; 3)$$

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $a(1; 2; 3); b(2; 2; -1); c(4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $d = a - b + 2c$ là

- A. $d(-7; 0; -4)$ B. $d(-7; 0; 4)$ **C. $d(7; 0; -4)$** D. $d(7; 0; 4)$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } d = a - b + 2c = (1 - 2 + 2 \cdot 4; 2 - 2 + 2 \cdot 0; 3 + 1 + 2 \cdot (-4)) = (7; 0; -4)$$

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $a = (2; -3; 3)$, $b = (0; 2; -1)$, $c = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $u = 2a + 3b - 2c$.

- A. $(10; -2; 13)$ **B. $(-2; 2; -7)$** C. $(-2; -2; 7)$ D. $(-2; 2; 7)$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } 2a = (4; -6; 6), 3b = (0; 6; -3), -2c = (-6; 2; -10) \Rightarrow u = 2a + 3b - 2c = (-2; 2; -7)$$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $a = (2; -3; 3)$, $b = (0; 2; -1)$, $c = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $u = 2a + 3b - 2c$.

- A. $(10; -2; 13)$ **B. $(-2; 2; -7)$** C. $(-2; -2; 7)$ D. $(-2; 2; 7)$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Có } 2a = (4; -6; 6); 3b = (0; 6; -3); -2c = (-6; 2; -10)$$

$$\text{Khi đó: } u = 2a + 3b - 2c = (-2; 2; -7)$$

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $x = (2; 1; -3)$ và $y = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $a = x + 2y$.

- A. $a = (4; 1; -1)$ B. $a = (3; 1; -4)$ C. $a = (0; 1; -1)$ **D. $a = (4; 1; -5)$**

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\vec{2y} = (2; 0; -2)$

$$a = x + 2y = (2 + 2; 1 + 0; -3 - 2) = (4; 1; -5)$$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ với i, j, k lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $i + j - k$.

- A. $i + j - k = (-1; -1; 1)$. B. $i + j - k = (-1; 1; 1)$. C. $i + j - k = (1; 1; -1)$. D. $i + j - k = (1; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $i = (1; 0; 0), j = (0; 1; 0), k = (0; 0; 1)$.

Do đó, $i + j - k = (1; 1; -1)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $a = (1; 2; 1)$ và $b = (-1; 3; 0)$. Vectơ $c = 2a + b$ có tọa độ là

- A. $(1; 7; 2)$ B. $(1; 5; 2)$ C. $(3; 7; 2)$ D. $(1; 7; 3)$

Lời giải

Chọn A.

Có $c = 2a + b$, gọi $c = (c_1; c_2; c_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2.1 + (-1) = 1 \\ c_2 = 2.2 + 3 = 7 \\ c_3 = 2.1 + 0 = 2 \end{cases}$$

Vậy $c = (1; 7; 2)$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $a(-2; 2; 0), b(2; 2; 0), c(2; 2; 2)$. Giá trị của $|a + b + c|$ bằng

- A. 6. B. 11. C. $2\sqrt{11}$. D. $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $a + b + c = (2; 6; 2)$

Vậy $|a + b + c| = 2\sqrt{11}$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $a = (2; m - 1; 3), b = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ a, b cùng hướng.

- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$ B. $m = 4; n = -3$ C. $m = 1; n = 0$ D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn A.

$$a \text{ và } b \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow a = k\vec{b} \quad (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ . Vậy } m = 7; n = -\frac{3}{4}$$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $u = 2i - 2j + k$, $v = (m; 2; m + 1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|u| = |v|$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $u = (2; -2; 1)$

$$\text{Khi đó } |u| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \text{ và } |v| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$$

$$\text{Do đó } |u| = |v| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $a = (2; m - 1; 3)$, $b = (1; 3; -2n)$. Tìm m , n để các vectơ a , b cùng phương.

A. $m = 7$; $n = -\frac{3}{4}$.

B. $m = 7$; $n = -\frac{4}{3}$.

C. $m = 4$; $n = -3$.

D. $m = 1$; $n = 0$.

Lời giải

Chọn A.

Các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 6 \\ 3 = 2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Câu 14. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; 2; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(x; y; -2)$ thẳng hàng.

Khi đó $x + y$ bằng

A. $x + y = 1$.

B. $x + y = 17$.

C. $x + y = -\frac{11}{5}$.

D. $x + y = \frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (x+1; y-2; 1)$.

$$\hat{U} \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \hat{U} \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ p } x+y=1$$

A, B, C thẳng hàng $\hat{U} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5), B(5; -5; 7), M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

- A.** $x=4; y=7$ **B.** $x=-4; y=-7$ **C.** $x=4; y=-7$ **D.** $x=-4; y=7$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1), B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

- A.** $M(4; -5; 0)$ **B.** $M(2; -3; 0)$ **C.** $M(0; 0; 1)$ **D.** $M(4; 5; 0)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$, $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$; $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; -1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$.

Vậy $M(4; -5; 0)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho vector $a = (2; -2; -4)$, $b = (1; -1; 1)$.

- A.** $a+b = (3; -3; -3)$
B. a và b cùng phương
C. $|b| = \sqrt{3}$
D. $a = 2i - 2j - 4k$

Lời giải

A. $a + b = (3; -3; -3)$ ĐÚNG

B. a và b cùng phương SAI

C. $|b| = \sqrt{3}$ ĐÚNG

D. $a = 2i - 2j - 4k$ ĐÚNG

● Xét đáp án A: $a + b = (3; -3; -3)$ đúng.

● Xét đáp án B: $a = 2(1; -1; -2) \neq b = (1; -1; 1)$. Suy ra a và b không cùng phương. Đáp án B sai.

● $|b| = \sqrt{3}$ đúng.

● $a = 2i - 2j - 4k$ đúng.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.

B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$ SAI

B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$ SAI

C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ ĐÚNG

D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ SAI

Đặt: $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m(2; 3; 1) + n(-1; 5; 2) + p(4; -1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \quad (I)$$

Giải hệ phương trình (I) ta được: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $a = (2; -5; 3)$, $b = (0; 2; -1)$, $c = (1; 7; 2)$.

A. $u = 3a - b + 5c$ với $u = (11; 22; 18)$

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2i - 3j + 2k$

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -i + 5j - 3k$

Lời giải

A. $u = 3a - b + 5c$ với $u = (11; 22; 18)$ ĐÚNG

+ Ta có:
$$\left\{ \begin{array}{l} 3\vec{a} = (6; -15; 9) \\ \vec{b} = (0; -2; 1) \\ 5\vec{c} = (5; 35; 10) \end{array} \right\} \Rightarrow 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} = (11; 22; 18) = u$$

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$ ĐÚNG

+ Ta có:
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\vec{a} = \left(1; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ \frac{4}{3}\vec{b} = \left(0; \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right) \\ 2\vec{c} = (2; 14; 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right) = \vec{x}$$

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2i - 3j + 2k$ ĐÚNG

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{v} = (2; -3; 2) \Rightarrow \vec{v} = 2i - 3j + 2k$

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -i + 5j - 3k$ SAI

$\vec{y} = \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \vec{y} = (-1; -5; -3) \Rightarrow \vec{y} = -i - 5j - 3k$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 20. Tìm tọa độ vector $\vec{x}$, biết rằng: $\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ với $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$

Lời giải

Đáp án: $\vec{x} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2\right)$

+ Gọi vector $\vec{x}$ có tọa độ: $\vec{x} = (x; y; z) \Rightarrow 2\vec{x} = (2x; 2y; 2z)$

+ Ta có:
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + 2\vec{x} = (5 + 2x; 4 + 2y; -1 + 2z) \\ \vec{b} = (2; -5; 3) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 5+2x=2 \\ 4+2y=-5 \\ -1+2z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{9}{2} \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2 \right)$$

+ Vì $a+2x=b$ nên:

Câu 21. Cho vector $a=(1;-1;0)$, xác định k để vector $u=(2;2k-1;0)$ cùng phương với vector a .

Câu 22. Cho hai vector $a=(3;-2;1)$, $b=(2;1;-1)$. Tìm m để $u=ma-3b$ và $v=3a+2mb$ cùng phương.

Câu 23. Cho ba vector $a=(1;-7;9)$, $b=(3;-6;1)$, $c=(2;1;-7)$. Biểu diễn vector $u=(-4;13;-6)$ theo các vector a, b, c .

Câu 24. Cho ba vector $a=(1;-1;1)$, $b=(0;1;2)$, $c=(4;2;3)$. Biểu diễn vector $u=(1;2;-2)$ theo các vector a, b, c .

Câu 25. Cho 3 vector $a=(2;5;4)$, $b=(6;0;-3)$, $c=(3;2;-1)$. Xác định các số thực m, n để $ma-3nb=c$.

Câu 26. Cho 3 vector $a=(2;-1;3)$, $b=(1;-3;2)$, $c=(3;2;-4)$. Xác định các số thực m, n để $\frac{m}{3}a - nb = \frac{1}{2}c$.

Câu 27. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(4;2;3)$, $B(-2;1;-1)$, $C(3;8;7)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 28. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(2;5;3)$, $B(3;7;4)$, $C(x;y;6)$. Tìm x, y để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

DẠNG 2

TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTOR

- Nếu $a = (a_1; a_2; a_3)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Tích vô hướng 2 vector: $a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$;
- Hai vector vuông góc: $a \perp b \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

- Góc hai vector:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $u = (3; 0; 1)$ và $v = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $u \cdot v$.

- A. $u \cdot v = 8$. B. $u \cdot v = 6$. C. $u \cdot v = 0$. D. $u \cdot v = -6$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $u \cdot v = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$.

Câu 30. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $u = i + 3j$ và $v = (2; -1)$. Tính $u \cdot v$.

- A. $u \cdot v = -1$. B. $u \cdot v = 1$. C. $u \cdot v = (2; -3)$. D. $u \cdot v = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Từ $u = i + 3j \Rightarrow u = (1; 3)$.

Do đó, $u \cdot v = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Câu 31. Cho hai véc tơ $a = (1; -2; 3)$, $b = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(a+b) \cdot b$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C.

$$a + b = (-1; -1; 5) \Rightarrow (a + b) \cdot b = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11$$

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $u = (2; -1; 1)$ và $v = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $u \cdot v = 1$.

A. $m = 4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $u \cdot v = 1 \Leftrightarrow 3 - m = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector u và v tạo với nhau một góc 120° và $|u| = 2$, $|v| = 5$. Tính $|u + v|$

A. $\sqrt{19}$.

B. -5 .

C. 7 .

D. $\sqrt{39}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |u + v|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v = |u|^2 + 2|u||v|\cos(u; v) + |v|^2 \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5^2 = 19 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } |u + v| = \sqrt{19}$$

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $a = (2; 1; 0)$ và $b = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(a, b)$

A. $\cos(a, b) = -\frac{2}{25}$

B. $\cos(a, b) = -\frac{2}{5}$

C. $\cos(a, b) = \frac{2}{25}$

D. $\cos(a, b) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có: } \cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector i và $u = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

A. 120° .

B. 60° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C.

Ta có $i = (1; 0; 0)$.

$$\text{Vậy: } \cos(i, u) = \frac{i \cdot u}{|i| \cdot |u|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (i, u) = 150^\circ$$

Câu 36. Trong không gian Oxyz, cho $a = (-3; 4; 0)$, $b = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa a và b bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. **D. $-\frac{3}{13}$.**

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{-3}{13}$$

Câu 37. Cho $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; -1; 0)$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

- A. 120° . B. 45° . **C. 135° .** D. 60° .

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (u, v) = 135^\circ$$

Câu 38. Trong không gian Oxyz cho 2 véc tơ $a = (2; 1; -1)$, $b = (1; 3; m)$. Tìm m để $(a; b) = 90^\circ$.

- A. $m = -5$. **B. $m = 5$.** C. $m = 1$. D. $m = -2$

Lời giải

Chọn B.

$$(a; b) = 90^\circ \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5$$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho véc tơ $u = (1; 1; -2)$, $v = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa u , v bằng 45° .

- A. $m = 2$. B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. **C. $m = 2 - \sqrt{6}$.** D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C.

$$+ \quad (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2 + 1)} = 1 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ 3m^2 + 3 = 1 - 4m + 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}$$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $a = (5; 3; -2)$ và $b = (m; -1; m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ a và b là góc tù?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 5.

Lời giải

Chọn A.

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3m - 9}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{2m^2 + 6m + 10}}$$

Ta có

Góc giữa hai vec tơ a và b là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Leftrightarrow 3m - 9 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1;3)$, $B(-2;-2)$, $C(3;1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{AB} = (-3; -5)$, $\vec{AC} = (2; -2)$.

$$\cos A = \cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Khi đó:

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$ B. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$ C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$ D. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{AB} = (1; 5; -2)$, $\vec{AC} = (5; 4; -1)$.

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{5 + 20 + 2}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(3; -1; -2)$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

A. -6. B. -14. C. 14. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -2); \overrightarrow{AC} = (2; -3; -5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = 2$

B. $m = -6$

C. $m = 0$

D. $m = -4$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MN} = (-3; -2; 2); \overrightarrow{NP} = (2; m-2; 1)$

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$

Câu 45. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + y(y-2) + z^2 = 0 \\ x^2 + y(y-2) + z(z-2) = 0 \\ x(x-2) + y^2 + z(z-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x = z \\ y = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(0; 0; 0) \\ M\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \end{cases}$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$, $C(3; 1; -2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

A. $9 - 2\sqrt{6}$.

B. $9 - 3\sqrt{6}$.

C. $9 + 3\sqrt{6}$.

D. $9 + 2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AC^2 + BC^2 = 9 + 9 = AB^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C .

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2} CA \cdot CB}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 9 - 3\sqrt{6}$$

Suy ra:

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $a = (2; 1; -3)$, $b = (-4; -2; 6)$.

- A. $b = -2a$.
- B. $a.b = 0$.
- C. a ngược hướng với b .
- D. $|b| = 2|a|$.

Lời giải

- A. $b = -2a$. **ĐÚNG**
- B. $a.b = 0$. **SAI**
- C. a ngược hướng với b . **ĐÚNG**
- D. $|b| = 2|a|$. **ĐÚNG**

Dễ thấy $b = -2a$. Từ đó suy ra vector a ngược hướng với vector b và $|b| = 2|a|$.

$$a.b = 2.(-4) + 1.(-2) + (-3).6 = -28 \neq 0$$

Do đó đáp án B sai.

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $a = (1; -2; 3)$ và $b = (1; 1; -1)$.

- A. $|a + b| = 2$.
- B. $a.b = -4$.
- C. $|a - b| = 5$.
- D. $a \perp b$.

Lời giải

- A. $|a + b| = 2$. **SAI**
- B. $a.b = -4$. **ĐÚNG**
- C. $|a - b| = 5$. **ĐÚNG**
- D. $a \perp b$. **ĐÚNG**

Ta có

$$|a+b|=|u|=\sqrt{(1+1)^2+(-2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+1+4}=3\neq 2 \quad (\text{SAI}).$$

$$ab=1.1+(-2).1+3.(-1)=1-2-3=-4 \quad (\text{đúng}).$$

$$|a-b|=|u|=\sqrt{(1-1)^2+(-2-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{0+9+16}=5 \quad (\text{đúng}).$$

$$a \perp b=1.1+(2)1+3.(-1)=0 \quad (\text{đúng}).$$

Câu 49. Biết $c=(x; y; z)$ khác 0 và vuông góc với cả hai vector $a=(1; 3; 4), b=(-1; 2; 3)$.

A. $5z-x=0$.

B. $7x-y=0$.

C. $5y+7z=0$.

D. $7x+y=0$.

Lời giải

A. $5z-x=0$. SAI

B. $7x-y=0$. SAI

C. $5y+7z=0$. ĐÚNG

D. $7x+y=0$. ĐÚNG

Theo giả thiết ta có $c=(x; y; z)$ khác 0 và vuông góc với cả hai vector $a=(1; 3; 4), b=(-1; 2; 3)$ nên

$$\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4z=0 \\ -1x+2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4z=0 \\ 5y+7z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4\cdot\frac{-5}{7}y=0 \\ z=\frac{-5}{7}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=0 \\ 5y+7z=0 \end{cases}$$

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$.

A. $AB \perp BD$.

B. $AB \perp BC$.

C. $AB \perp AC$.

D. $AB \perp CD$.

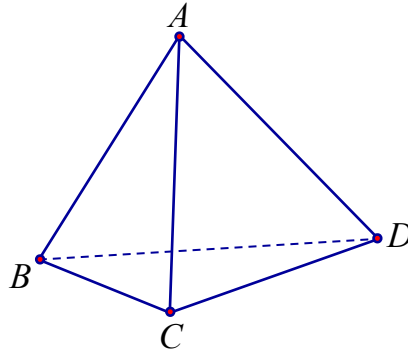
Lời giải

A. $AB \perp BD$. ĐÚNG

B. $AB \perp BC$. ĐÚNG

C. $AB \perp AC$. SAI

D. $AB \perp CD$. ĐÚNG



Ta có $\vec{AB} = (0; 0; -4)$, $\vec{AC} = (1; 0; -4) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 16 \neq 0 \Rightarrow AB$ và AC không vuông góc.

Làm tương tự ta có:

$$AB \perp BD$$

$$AB \perp BC$$

$$AB \perp CD$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 51. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -2; \frac{1}{4})$, $\vec{b} = (-2; 1; 1)$, $\vec{c} = 3i + 2j + 4k$

a) Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{b}$. Trong ba vector trên có các cặp vector nào vuông góc?

b) Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$, $\cos(\vec{a}, i)$

Câu 52. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vector $\vec{a} = (2; 5; 4)$, $\vec{b} = (6; 0; -3)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$

a) Tính $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$.

b) Tính góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 53. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 vector $\vec{a} = (3; 2; 2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; -1)$, $\vec{c} = (3; 2; -1)$

a) Tính $4\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$.

b) Tính góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 54. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 3)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$. Tìm tọa độ vector $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{u} \perp \vec{b}$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = -6$.

Câu 55. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vector $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$. Tìm tọa độ vector $\vec{u}$, biết rằng: $\vec{a} \cdot \vec{u} = -5$, $\vec{u} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = 20$.

Câu 56. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 4; -1)$, $B(1; 4; -1)$, $C(2; 4; 3)$, $D(2; 2; -1)$. Biết $M(x; y; z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $x + y + z = 7$

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$.

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$.

Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = 7$.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(2; -3; 1)$. Điểm $S(a; b; c)$ sao cho $SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

Lời giải

Đáp án: $T = a + b + c = -\frac{5}{6}$

Gọi G là điểm sao cho $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow G\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{-1}{3}\right)$

$$SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2 = \overrightarrow{SA}^2 + 2\overrightarrow{SB}^2 + 3\overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GB})^2 + 3(\overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ = 6SG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 3GC^2$$

$SA^2 + 2SB^2 + 3SC^2$ nhỏ nhất khi $S \equiv G$ hay $S\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{-1}{3}\right)$.

Nên $T = a + b + c = -\frac{5}{6}$.

Câu 58. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $m = 4$

$$\overrightarrow{MA} = (2 - m; 5 - m; 1 - m), \overrightarrow{MB} = (-2 - m; -6 - m; 2 - m), \overrightarrow{MC} = (1 - m; 2 - m; -1 - m)$$

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m - 4)^2 \leq 28$$

Để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $m = 4$

Câu 59. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $m = 2$

$$\overrightarrow{AC} = (-1; -3; -2), \overrightarrow{MB} = (-2 - m; -6 - m; 2 - m)$$

$$|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m - 6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m - 2)^2 + 24}$$

Để $\left| \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC} \right|$ nhỏ nhất thì $m = 2$

Câu 60. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 3), B(2; 2; 1), M \in Ox$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$

Câu 61. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-1; 2; -3), B(0; 2; 1), C(-1; 2; 1), M \in Oy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|$ để T đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: $T_{\min} = \sqrt{5}$

Câu 62. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(0; 2; 3), B(2; 1; 1), C(1; 2; 3), M \in Oz$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = \left| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: $M\left(0; 0; \frac{7}{2}\right)$

Câu 63. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 0), B(2; 0; -2)$ và điểm $M(a, b, c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a + 2b - c - 1 = 0$. Biết $MA = MB$ và góc $\angle AMB$ có số đo lớn nhất. Tính $S = a + 2b + 3c$.

Lời giải

Đáp án: $S = a + 2b + 3c = \frac{15}{11}$

Vì $MA = MB$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB .

Ta có $(P): y + z = 0$ nên $\begin{cases} b + c = 0 \\ a + 2b - c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = 1 - 3b \end{cases}$.

$\overrightarrow{MA} = (1 + 3b; 2 - b; b), \overrightarrow{MB} = (1 + 3b; -b; -2 + b)$

$$\Rightarrow \cos \angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{\left| \overrightarrow{MA} \right| \cdot \left| \overrightarrow{MB} \right|} = \frac{(1 + 3b)^2 + 2b(b - 2)}{\sqrt{(1 + 3b)^2 + (b - 2)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(1 + 3b)^2 + (b - 2)^2 + b^2}}$$

$$= \frac{9b^2 + 6b + 1 + 2b^2 - 4b}{9b^2 + 6b + 1 + 2b^2 - 4b + 4} = \frac{11b^2 + 2b + 1}{11b^2 + 2b + 5}$$

Xét $f(b) = \frac{11b^2 + 2b + 1}{11b^2 + 2b + 5}$ có $f'(b) = \frac{4(22b + 2)}{11b^2 + 2b + 5} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{11}$.

Nhận thấy $f(b)$ nhỏ nhất tại $b = -\frac{1}{11} \Rightarrow a = \frac{14}{11}, c = \frac{1}{11}$

Nên $a + 2b + 3c = \frac{14}{11} - \frac{2}{11} + \frac{3}{11} = \frac{15}{11}$

DẠNG 3

ĐỘ DÀI ĐƯỜNG THẲNG

TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

•

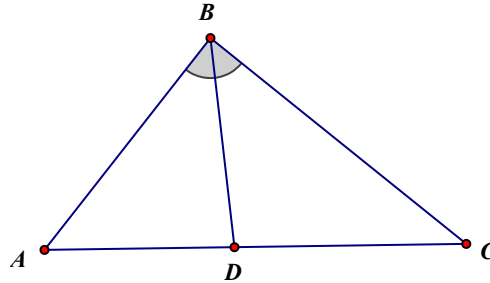
• $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$

• $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

- Cho tam giác ABC có D là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Khi đó ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$$



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

A. $OA = \sqrt{5}$

B. $OA = 5$

C. $OA = 3$

D. $OA = 9$

Lời giải

Chọn C

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Câu 65. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .

A. 26.

B. 22.

C. $\sqrt{26}$.

D. $\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} = (2; 3; -3) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(3; 1; 0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4; 2; 2)$.

B. $(2; 1; 1)$.

C. $(2; 0; -2)$.

D. $(1; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$

Gọi M là trung điểm của AB ta có:

Vậy $M(2; 1; 1)$.

Câu 67. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

- A. $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$. B. $B(-4; 9; 8)$. C. $B(5; 3; -7)$. D. $B(5; -3; -7)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $B(x_B; y_B; z_B)$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \\ -2 = \frac{3 + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}$$

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

Vậy $B(5; -3; -7)$.

Câu 68. Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3), B(-1; 2; 5), C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(0; 0; 3)$. B. $G(0; 0; 9)$. C. $G(-1; 0; 3)$. D. $G(0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

$$G \text{ của tam giác } ABC \text{ bằng: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 - 1 + 0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2 + 2 + 0}{3} = 0 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3 + 5 + 1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0; 0; 3)$$

Tọa độ trọng tâm

Câu 69. Cho bốn điểm $S(1, 2, 3); A(2, 2, 3); B(1, 3, 3); C(1, 2, 4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC$.

- A. $(5; 9; 13)$. B. $\left(\frac{5}{3}; 3; \frac{13}{3}\right)$. C. $\left(1; \frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$. D. $\left(\frac{5}{4}; \frac{9}{4}; \frac{13}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $G(x, y, z)$ là trọng tâm của hình chóp $SABC$ suy ra

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C + x_S}{4} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C + y_S}{4} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C + z_S}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+1+1+1}{4} = \frac{5}{4} \\ y = \frac{2+3+2+2}{4} = \frac{9}{4} \\ z = \frac{3+3+4+3}{4} = \frac{13}{4} \end{cases}$$

Ta có:

Câu 70. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\vec{CE} = 2\vec{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

- A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ B. $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ D. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\vec{CE} = (x-7; y-4; z+2)$, $2\vec{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z)$

$$\vec{CE} = 2\vec{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=2-2x \\ y-4=4-2y \\ z+2=-6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{8}{3} \\ z=-\frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, tọa độ điểm M là

- A. $\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ B. $(4;5;-9)$ C. $\left(\frac{3}{2}; -5; \frac{17}{2}\right)$ D. $(1;-7;12)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y; z)$. Vì M thuộc đoạn AB nên:

$$\vec{MA} = -2\vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2(2-x) \\ 1-y = -2(-3-y) \\ -2-z = -2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 72. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\vec{MA} = 3\vec{MB}$.

- A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. C. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. D. $M(4; -3; 8)$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{MA} = 3\vec{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - 3x_B}{1 - 3} = 4 \\ y_M = \frac{y_A - 3y_B}{1 - 3} = -3 \\ z_M = \frac{z_A - 3z_B}{1 - 3} = 8 \end{cases} \Rightarrow M(4; -3; 8)$$

Ta có

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\vec{AM} = 2\vec{MB}$.

- A. $M(0; 0; 3)$. B. $M(0; 0; -3)$. C. $M(-8; -4; 7)$. D. $M(8; 4; -7)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi điểm $M(x; y; z)$. Khi đó: $\vec{AM} = 2\vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 2(-2 - x) \\ y - 2 = 2(-1 - y) \\ z - 1 = 2(4 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$

Vậy $M(0; 0; 3)$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$. B. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$.
C. $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$. D. $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $D(x; 0; 0) \in Ox$

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Câu 75. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng

AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{AM}{BM} = 2$

C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{AM}{BM} = 3$

Lời giải

Chọn A

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$; $\vec{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$; $\vec{AM} = (x+2; -3; z-1)$ và

A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \vec{AM} = k \cdot \vec{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=7k \\ -3=3k \\ z-1=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-9 \\ -1=k \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$

$\vec{BM} = (-14; -6; -2)$; $\vec{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB.$

Câu 76. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$.

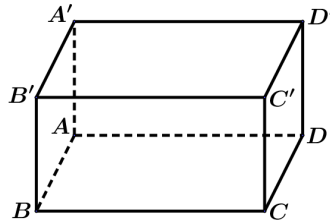
B. $2|a|$.

C. $3|a|$.

D. $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\vec{AB} = (a; 0; 0)$; $\vec{AD} = (0; 2a; 0)$; $\vec{AA'} = (0; 0; 2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'} \Leftrightarrow \vec{AC'} = (a; 2a; 2a)$.

Suy ra $AC = |\vec{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

Câu 77. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3; 0; 8)$, $D(-5; -4; 0)$. Biết đỉnh

A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\vec{CA} + \vec{CB}|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$.

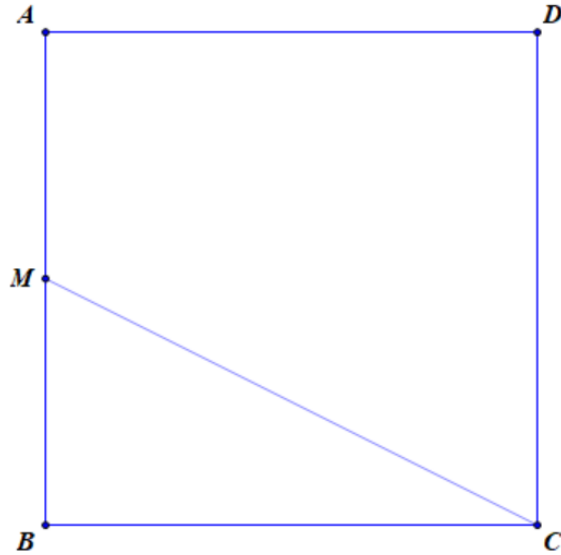
B. $6\sqrt{10}$.

C. $10\sqrt{6}$.

D. $5\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



$$\vec{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow BD = 12 \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow MC = 3\sqrt{10}$.

$$|\vec{CA} + \vec{CB}| = |2\vec{CM}| = 2CM = 6\sqrt{10}.$$

Câu 78. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a+2b+c$?

- A. 1. B. 3. C. 6. D. -9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} \vec{AB} = (-1; 2; -3) \\ \vec{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B .

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a+2b+c=3.$$

Câu 79. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OA} = 2i + 2j + 2k$, $B(-2; 2; 0)$ và $C(4; 1; -1)$.

Trên mặt phẳng (Oxz) , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A , B , C .

- A. $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$. B. $N\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$. C. $P\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$. D. $Q\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A(2; 2; 2)$ và $PA = PB = PC = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

Câu 80. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

A. 5.

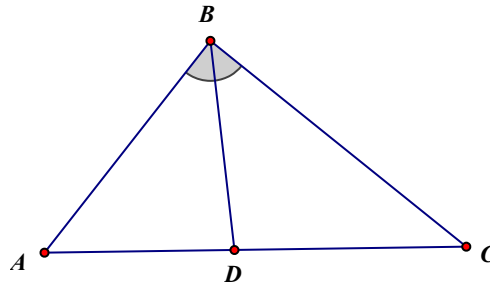
B. 4.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x; y; z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\vec{DA} = -\frac{1}{2}\vec{DC}$ (*)

Ta có $\vec{DA} = (1-x; 2-y; -1-z)$ và $\vec{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$.

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a+b+2c=5$$

Do đó

Câu 81. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a - b + c$ bằng

A. 1

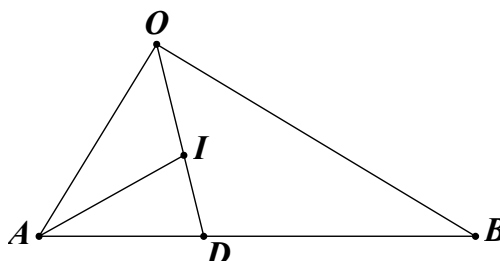
B. 3

C. 2

D. 0

Lời giải

Chọn D



Ta có $\vec{OA} = (1; 2; -2)$, $\vec{OB} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, do đó $OA = 3$, $OB = 4$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O , ta có $\vec{OD} = -\frac{OA}{OB} \cdot \vec{OB} = -\frac{OA}{OB} \cdot \vec{OB}$, suy ra

$$\vec{OD} = -\frac{3}{4} \vec{OB} \Rightarrow \vec{OD} = \frac{4\vec{OA} + 3\vec{OB}}{7} \quad D\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{7}; 0\right).$$

Ta có $\vec{AD} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}; 2\right) \Rightarrow AD = \frac{15}{7}$.

$$\vec{ID} = -\frac{AD}{AO} \cdot \vec{IO} = -\frac{5}{7} \vec{IO} \Rightarrow \vec{OI} = \frac{7}{12} \vec{OD} \Rightarrow D(1; 1; 0)$$

Do đó $a - b + c = 0$.

Câu 82. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 2; 1)$, $N\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

- A. $I(1; 1; 1)$. B. $I(0; 1; 1)$. C. $I(0; -1; -1)$. D. $I(1; 0; 1)$.

Lời giải

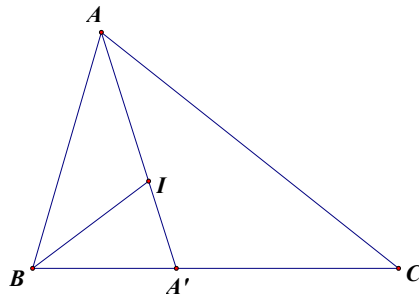
Chọn B

Ta có bài toán bài toán sau

Trong tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta có: $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$.

với $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$.

Thật vậy:



Gọi A' là chân đường phân giác trong kẻ từ A .

$$b\vec{BA'} = \frac{c}{b} \vec{AA'} \quad \text{và} \quad b\vec{BA'} + c\vec{CA'} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{IA} = \frac{c}{A'B} \vec{AA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \vec{AA'} = \frac{b+c}{a} \vec{AA'} \quad \text{và} \quad a\vec{IA} + (b+c)\vec{IA'} = \vec{0}$$

$$\text{và} \quad a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} + b\vec{BA'} + c\vec{CA'} = \vec{0} \quad \text{và} \quad a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0} \quad (\text{do (1)})$$

Áp dụng công thức trong tam giác OMN

$$\text{ta được} \quad OM \cdot \vec{IN} + ON \cdot \vec{IM} + MN \cdot \vec{IO} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} x_I = \frac{OM \cdot x_N + ON \cdot x_M + MN \cdot x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \frac{OM \cdot y_N + ON \cdot y_M + MN \cdot y_O}{OM + ON + MN} = 1 \\ z_I = \frac{OM \cdot z_N + ON \cdot z_M + MN \cdot z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm $I(0;1;1)$ là điểm cần tìm.

Câu 83. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

Do $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ$ nên các tam giác $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMA$ vuông tại M .

Khi đó $IM = \frac{AB}{2}; JM = \frac{BC}{2}; KM = \frac{AC}{2}$. Mặt khác $AB = BC = AC = 2\sqrt{2}$.

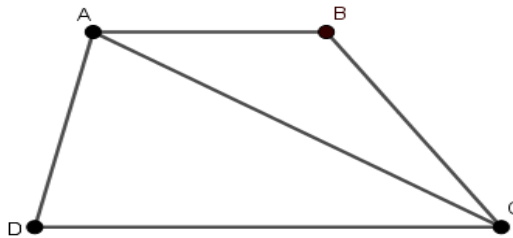
Vậy $MI = MJ = MK = \sqrt{2}$. Khi đó M thuộc trục của đường tròn ngoại tiếp đáy IJK và cách (IJK) một khoảng không đổi là $\sqrt{2}$. Khi đó có hai điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 84. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1), B(2;1;0), C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

- A. $D(-12;-1;3)$ B. $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$ C. $D(8;7;-1)$ D. $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$

$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1) \quad \overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1)$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}$$

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

Câu 85. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; -1)$, $C(6; 1; 0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a; b; c)$, tìm mệnh đề đúng?

- A. $a + b + c = 6$. B. $a + b + c = 5$. C. $a + b + c = 8$. D. $a + b + c = 7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$, $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên

$$\frac{1}{2} AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3} BC$$

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$.

$$\text{Giả sử } D(a; b; c) \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a - 1 = \frac{4}{3} \\ b - 2 = \frac{1}{3} \\ c - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 86. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC với $A(1; -3; 3)$, $B(2; -4; 5)$, $C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của nó.

A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì tọa độ điểm là $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

B. Tọa độ vector là $\overrightarrow{AB} = i - j - 2k$

C. $2024a + 2025b = 2025$

D. $a + b + c = -2$

Lời giải

A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì tọa độ điểm là $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$. ĐÚNG

B. Tọa độ vector là $\vec{AB} = i - j - 2k$ SAI

C. $2024a + 2025b = 2025$ ĐÚNG

D. $a + b + c = -2$ ĐÚNG

M là trung điểm đoạn thẳng AB nên $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; 4\right)$.

Tọa độ vector là $\vec{AB} = i - j + 2k$

$$G(1; c; 3) \text{ làm trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} 1 = \frac{1+2+a}{3} \\ c = \frac{-3-4-2}{3} \\ 3 = \frac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy

$$2024a + 2025b = 2025$$

$$a + b + c = -2$$

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$. Tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\vec{AM} = 3\vec{AB}$.

A. $x + 2y = 1$.

B. $3y + z = 1$.

C. $x + 2y - 2z = -15$.

D. $x + y + z = 11$.

Lời giải

A. $x + 2y = 1$. ĐÚNG

B. $3y + z = 1$. SAI

C. $x + 2y - 2z = -15$. ĐÚNG

D. $x + y + z = 11$. ĐÚNG

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $\vec{AM} = (x; y - 1; z + 2)$; $\vec{AB} = (3; -2; 3)$.

$$\vec{AM} = 3\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y - 1 = -6 \\ z + 2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}$$

Vậy

$$x + 2y = 1$$

$$3y + z = -8$$

$$x + 2y - 2z = -15$$

$$x + y + z = 11$$

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(x_G; y_G; z_G)$.

A. $x_G + y_G + z_G = 1$

B. $2x_G - y_G = 3$

C. $2x_G + y_G - 3z_G = -1$

D. $x_G - 2y_G - 3z_G = -6$

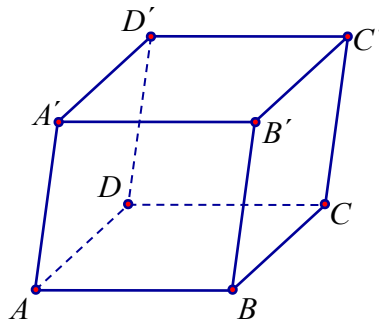
Lời giải

A. $x_G + y_G + z_G = 1$. **ĐÚNG**

B. $2x_G - y_G = 3$. **ĐÚNG**

C. $2x_G + y_G - 3z_G = -1$. **SAI**

D. $x_G - 2y_G - 3z_G = -6$. **SAI**



Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x; y - 3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x'; 3 - y'; -3 - z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 + 3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2)$$

G là trọng tâm tam giác ABC

$$x_G + y_G + z_G = 1$$

$$2x_G - y_G = 3$$

$$2x_G + y_G - 3z_G = 11$$

$$x_G - 2y_G - 3z_G = 6$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD' . Ta có $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Gọi $G(a; b; c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IG} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{DI} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{IG} = \left(a - \frac{3}{2}; b - \frac{3}{2}; c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \text{ Do đó: } \begin{cases} \frac{3}{2} = 3\left(a - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(b - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy $G(2; 1; -2)$.

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là $D(a; b; c)$.

A. $a + b = 3$.

B. $a + c = \frac{5}{3}$.

C. $a + b - 2c = 1$.

D. $a + b + c = 4$.

Lời giải

A. $a + b = 3$. **ĐÚNG**

B. $a + c = \frac{5}{3}$. **SAI**

C. $a + b - 2c = 1$. **ĐÚNG**

D. $a + b + c = 4$. **ĐÚNG**

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{26}; \overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{26}$

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

$$\text{Suy ra : } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \vec{DC} = -2\vec{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

$$a + b = 3.$$

$$a + c = \frac{1}{3}.$$

$$a + b - 2c = 1.$$

$$a + b + c = 4.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 90. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho: $A(1; -1; 1)$, $B(2; -3; 2)$, $C(4; -2; 2)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm của đoạn AB .

b) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

c) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{MC} = 3\vec{MB}$

Câu 91. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho: $A(1; -1; 1)$, $B(2; -3; 2)$, $C(4; -2; 2)$, $D(3; 0; 1)$, $E(1; 2; 3)$

a) Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính diện tích của nó.

b) Tính cos các góc của tam giác ABC

c) Tìm trên đường thẳng Oy điểm cách đều hai điểm A, B

d) Tìm tọa độ điểm M thỏa $\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$

Câu 92. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(4; -1; 2)$; $B(7; 3; 2)$.

a) Tìm tọa độ điểm $M \in Ox$ và cách đều hai điểm A, B .

b) Tìm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác ABM vuông cân tại A .

Câu 93. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; -3), B(0; 3; 7), C(2; 5; 0)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) Tính góc $\angle ABC$.

d) Tính diện tích ΔABC . Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC .

Câu 94. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(3; -4; 7), B(-5; 3; -2), C(1; 2; -3)$.

- a) Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành $\triangle ABC$.
- b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành
- c) Tìm tọa độ trọng tâm của $\triangle ABC$.
- d) Tính góc $\angle ABC$.
- e) Tính độ dài đường cao BH của $\triangle ABC$

Câu 95. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $A(1; 2; -1), B(-1; 1; 3), C(-1; -1; 2), D'(2; -2; -3)$

- a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng BD' và $B'D$.
- c) Tìm tọa độ trọng tâm của $\triangle AA'C$.

Câu 96. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng: $A(0; 2; 2), B(0; 1; 2), C(-1; 1; 1), C'(1; -2; -1)$

- a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng AC' và $A'C$.
- c) Tìm tọa độ trọng tâm của $\triangle B'DD'$.