

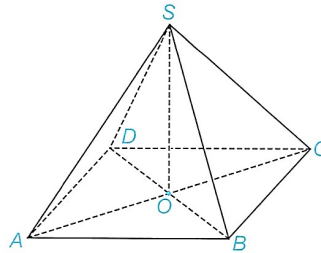
# BÀI 23. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

## CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

### PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

#### Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

**Câu 1.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $SA = SC$  và  $SB = SD$  (H.7.14).

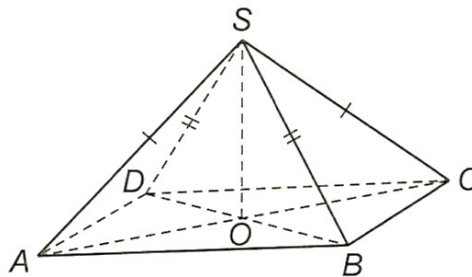


Hình 7.14

Chứng minh rằng  $SO \perp (ABCD)$ .

#### Lời giải

Vì  $SA = SC, SB = SD$  và  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC, BD$  nên  $O$  là trung điểm của  $AC, BD$   
 $\Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ .



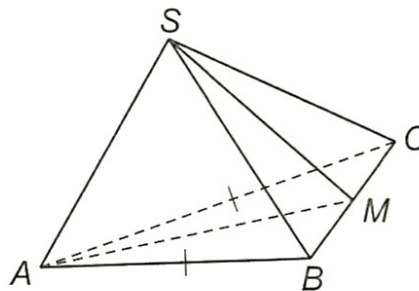
Hình 7.5

**Câu 2.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác cân tại  $A$  và  $SA \perp (ABC)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng:

- $BC \perp (SAM)$ ;
- Tam giác  $SBC$  cân tại  $S$ .

#### Lời giải

a) Vì  $BC \perp AM, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAM)$ .



Hình 7.6

b) Có  $BC \perp SM, M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $\Delta SBC$  cân tại  $S$ .

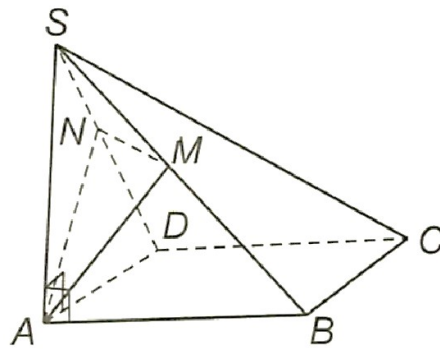
**Câu 3.** (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật và  $SA \perp (ABCD)$ .

Gọi  $M, N$  tương ứng là hình chiếu của  $A$  trên  $SB, SD$ . Chứng minh rằng:

$AM \perp (SBC), AN \perp (SCD), SC \perp (AMN)$ .

**Lời giải**

Vì  $BC \perp SA, BC \perp AB$  nên  $BC \perp (SAB)$



Hình 7.8

$\Rightarrow BC \perp AM$ , mà  $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$ .

Tương tự:  $AN \perp (SCD)$ .

Ta có  $AM \perp SC, AN \perp SC \Rightarrow SC \perp (AMN)$ .

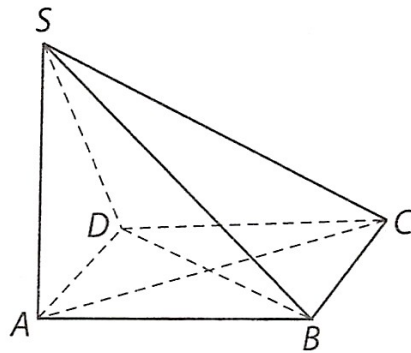
**Câu 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là một hình vuông và  $SA \perp (ABCD)$ . Chứng minh rằng:

a)  $BC \perp (SAB)$ ;

b)  $BD \perp (SAC)$ .

(H.7.4)

**Lời giải**



Hình 7.4

a) Vì  $SA \perp (ABCD)$  và  $BC \subset (ABCD)$  nên  $SA \perp BC$ , mà  $BC \perp AB$  và đường thẳng  $SA$  cắt đường thẳng  $AB$  nên  $BC \perp (SAB)$ .

b) Vì  $SA \perp (ABCD)$  và  $BD \subset (ABCD)$  nên  $SA \perp BD$ , mà  $BD \perp AC$  và đường thẳng  $SA$  cắt đường thẳng  $AC$  nên  $BD \perp (SAC)$ .

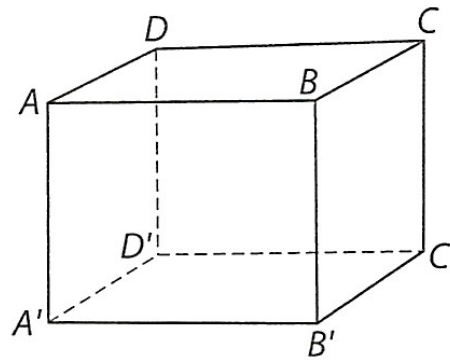
**Câu 5.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $AA' \perp (ABCD)$ . Chứng minh rằng:

a)  $AA' \perp (A'B'C'D')$ ;

b)  $BB' \perp (ABCD)$ .

**Lời giải**

(H.7.5)



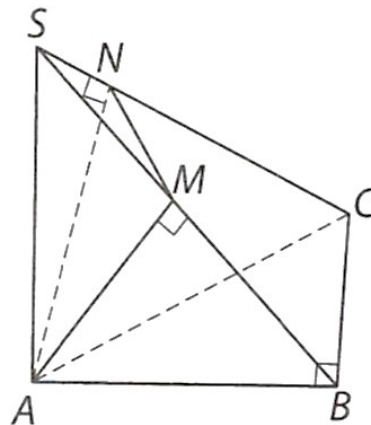
Hình 7.5

- a) Vì  $AA' \perp (ABCD)$  và  $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$  nên  $AA' \perp (A'B'C'D')$ .  
b) Vì  $AA' \perp (ABCD)$  và  $AA' \parallel BB'$  nên  $BB' \perp (ABCD)$ .

**Câu 6.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Kẻ  $AM$  vuông góc với  $SB$  tại  $M$  và  $AN$  vuông góc với  $SC$  tại  $N$ . Chứng minh rằng:

- a)  $BC \perp (SAB)$ ;  
b)  $AM \perp (SBC)$ ;  
c)  $SC \perp (AMN)$ .

**Lời giải**



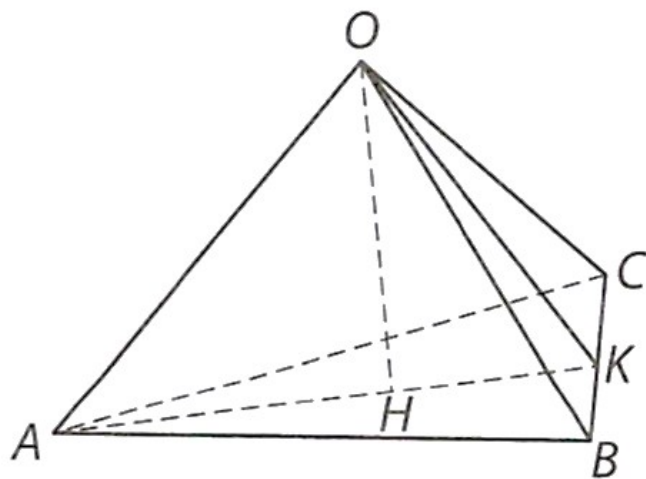
Hình 7.26

- a) Ta có:  $BC \perp AB$  và  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp BC$ , suy ra  $BC \perp (SAB)$ .  
b) Vì  $BC \perp (SAB)$  nên  $BC \perp AM$ , mà  $AM \perp SB$ , suy ra  $AM \perp (SBC)$ .  
c) Vì  $AM \perp (SBC)$  nên  $AM \perp SC$ , mà  $AN \perp SC$ , suy ra  $SC \perp (AMN)$ .

**Câu 7.** Cho tứ diện  $OABC$  có ba cạnh  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau. Gọi  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$ . Chứng minh rằng:

- a)  $BC \perp (OAH)$ ;  
b)  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ ;  
c)  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ .

**Lời giải**



Hình 7.27

a) Vì  $OA \perp OB, OA \perp OC$  nên  $OA \perp (OBC)$ , suy ra  $OA \perp BC$ .

Vì  $OH \perp (ABC)$  nên  $OH \perp BC$ , suy ra  $BC \perp (OAH)$ .

b) Vì  $BC \perp (OAH)$  nên  $BC \perp AH$ . Tương tự,  $CA \perp BH$ , do đó  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

c) Gọi  $K$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ , ta có:  $OK \perp BC$  và  $OA \perp OK$  nên  $OK$  là đường cao của tam giác vuông  $OBC$  và  $OH$  là đường cao của tam giác vuông  $OAK$ .

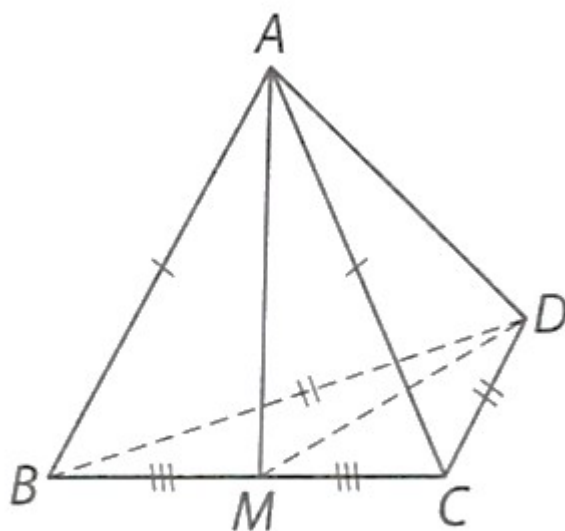
Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông  $OBC$  và  $OAK$ , ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} \quad \text{và} \quad \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

**Câu 8.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = AC$  và  $DB = DC$ . Chứng minh rằng  $AD \perp BC$ .

**Lời giải**



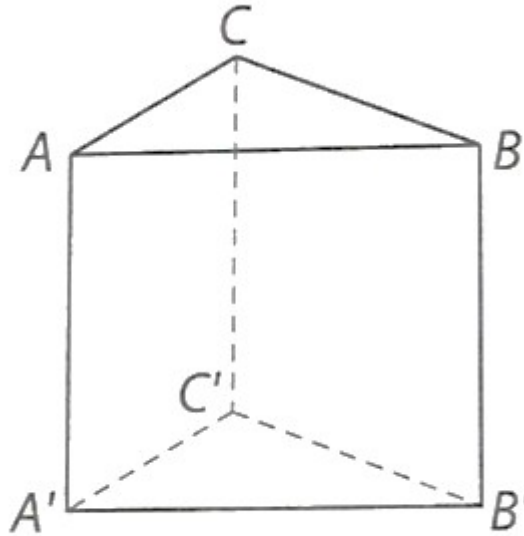
Hình 7.28

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , ta có:  $BC \perp AM, BC \perp MD$ . Do đó  $BC \perp (AMD)$ , suy ra  $BC \perp AD$ .

**Câu 9.** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC \cdot A'B'C'$  có  $AA'$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Chứng minh rằng:

- a)  $BB' \perp (A'BC')$ .  
 b)  $B'C' \perp (ABB'A')$ .

Lời giải



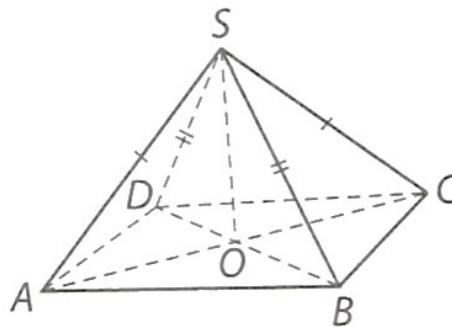
Hình 7.29

- a) Vì  $AA' \perp (ABC)$ ,  $AA' // BB'$  và  $(ABC) // (A'B'C')$  nên  $BB' \perp (A'B'C')$ .  
 b) Vì  $BC \perp AB, BC \perp BB'$  nên  $BC \perp (ABB'A')$ , mà  $BC // B'C'$ , suy ra  $B'C' \perp (ABB'A')$ .

**Câu 10.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$  và  $SA = SC$ ,  $SB = SD$ . Chứng minh rằng:

- a)  $SO \perp (ABCD)$ .  
 b)  $AC \perp (SBD)$  và  $BD \perp (SAC)$ .

Lời giải



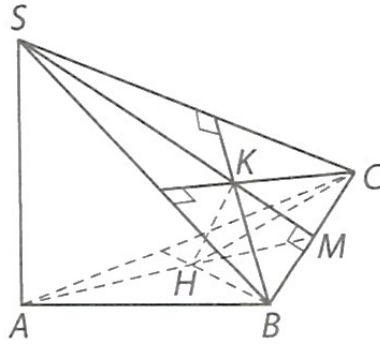
Hình 7.30

- a) Vì  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$  nên  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ , suy ra  $SO \perp AC, SO \perp BD$ . Do đó  $SO \perp (ABCD)$ .  
 b) Vì  $AC \perp BD, AC \perp SO$  nên  $AC \perp (SBD)$ . Tương tự, ta được  $BD \perp (SAC)$ .

**Câu 11.** Cho hình chóp  $S \cdot ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ , tam giác  $ABC$  nhọn. Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của tam giác  $ABC$  và  $SBC$ . Chứng minh rằng:

- a)  $BC \perp (SAH)$  và các đường thẳng  $AH, BC, SK$  đồng quy;  
 b)  $SB \perp (CHK)$  và  $HK \perp (SBC)$ .

Lời giải



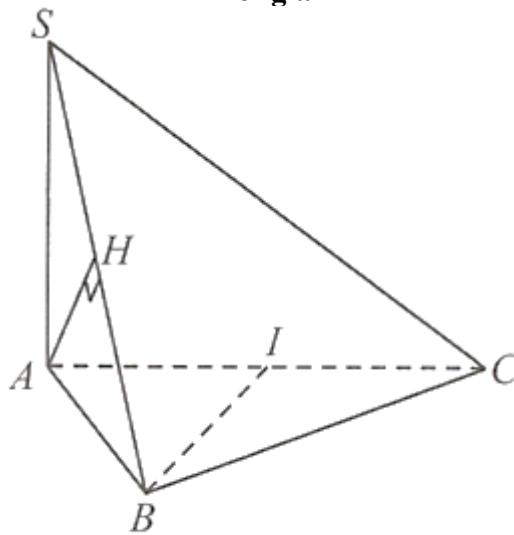
Hình 7.31

- a) Vì  $BC \perp SA, BC \perp AH$  nên  $BC \perp (SAH)$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AH$  và  $BC$ , ta có:  $BC \perp (SAM)$ , suy ra  $BC \perp SM$ , mà  $K$  là trọng tâm của tam giác  $SBC$  nên  $SM$  đi qua  $K$ . Do đó,  $SK, AH, BC$  đồng quy tại  $M$ .
- b) Vì  $SA \perp (ABC)$  nên  $SA \perp CH$ , mà  $CH \perp AB$ , suy ra  $CH \perp (SAB)$ . Do đó  $CH \perp SB$ , lại có  $SB \perp CK$  nên  $SB \perp (CHK)$ . Từ đó ta có  $SB \perp HK$ , tương tự, ta chứng minh được  $SC \perp (BHK)$ , suy ra  $SC \perp HK$ . Do đó  $HK \perp (SBC)$ .

**Câu 12.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $B$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Kẻ  $AH \perp SB (H \in SB)$ . Chứng minh rằng:

- $SA$  vuông góc với các cạnh đáy;
- $BC \perp (SAB)$ ;
- $BI \perp (SAC)$ , từ đó suy ra  $BI \perp SC$ ;
- $AH \perp (SBC)$ , từ đó suy ra  $AH \perp SC$ .

Lời giải



Hình 7

- Vì  $SA \perp (ABC)$  và  $AB, BC, CA$  cùng nằm trong  $(ABC)$  nên  $SA \perp AB, SA \perp BC, SA \perp CA$ .
- Ta có  $BC \perp AB$  (vì  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$ ) và  $BC \perp SA$  (chứng minh trên), suy ra  $BC \perp (SAB)$ .
- Do  $\Delta ABC$  vuông cân tại  $B$  và  $I$  là trung điểm của  $AC$  nên  $BI \perp AC$  (1).  
Ta có  $SA \perp (ABC)$  và  $BI \subset (ABC)$ , suy ra  $SA \perp BI$  (2).  
Từ (1) và (2) suy ra  $BI \perp (SAC)$ , suy ra  $BI \perp SC$ .
- Theo giả thiết ta có  $AH \perp SB$  (3).

Theo câu b) ta có  $BC \perp (SAB)$  và  $AH \subset (SAB)$ , suy ra  $BC \perp AH$  .(4)

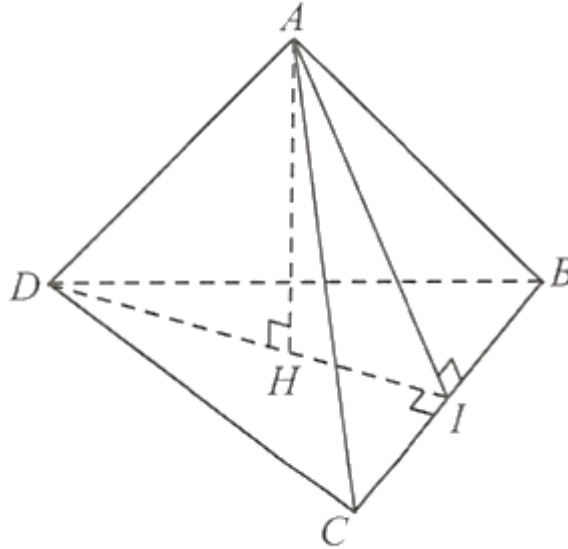
Từ (3) và (4) suy ra  $AH \perp (SBC)$ , suy ra  $AH \perp SC$ .

**Câu 13.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $ABC$  và  $BCD$  là các tam giác cân tại  $A$  và  $D$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ .

a) Chứng minh rằng  $BC \perp AD$ .

b) Kẻ  $AH$  là đường cao của tam giác  $ADI$ . Chứng minh rằng  $AH \perp (BCD)$ .

**Lời giải**



Hình 9

a) Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  và  $I$  là trung điểm của  $BC$  nên  $AI \perp BC$  .(1)

Tam giác  $DCB$  cân tại  $D$  và  $I$  là trung điểm của  $BC$  nên  $DI \perp BC$  .(2)

Từ (1) và (2) suy ra  $BC \perp (AID)$ , suy ra  $BC \perp AD$ .

b) Ta có  $AH \perp DI$  và  $AH \perp BC$  (vì  $BC \perp (ADI)$ ,  $AH \subset (ADI)$ ), suy ra  $AH \perp (BCD)$ .

**Câu 14.** Cho tứ diện  $SABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $SB = AB$  và  $SB \perp (ABC)$ . Gọi  $H, I, K$  lần lượt là trung điểm của  $SA, BC, AB$ . Chứng minh rằng:

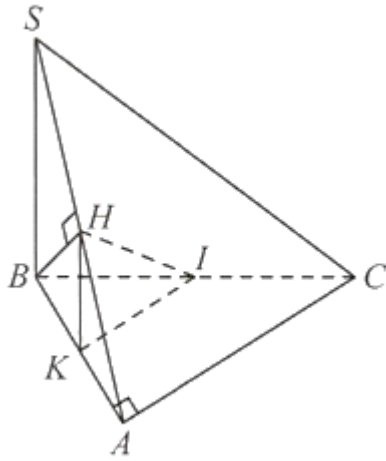
a)  $AC \perp (SAB)$ ;

b)  $BH \perp (SAC)$ ;

c)  $KI \perp SA$ ;

d)  $AB \perp IH$ .

**Lời giải**



Hình 10

a) Ta có  $AC \perp AB$  (vì  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ ) và  $AC \perp SB$  (vì  $SB \perp (ABC)$ ), suy ra  $AC \perp (SAB)$ .

b) Vì  $SB = AB$  nên  $\Delta SAB$  cân tại  $B$ . Mà  $H$  là trung điểm của  $SA$ , suy ra  $BH \perp SA$ .(1)

Ta cũng có  $AC \perp (SAB)$  và  $BH \subset (SAB)$ , suy ra  $AC \perp BH$ .(1)

Từ (1) và (2) suy ra  $BH \perp (SAC)$ .

c)  $\Delta ABC$  có  $K, I$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  nên  $KI$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$ , suy ra  $KI \parallel AC$ . Ta lại có  $AC \perp (SAB)$ , suy ra  $KI \perp (SAB)$ , suy ra  $KI \perp SA$ .

d)  $\Delta SAB$  có  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $SA, AB$  nên  $HK$  là đường trung bình của  $\Delta SAB$ , suy ra  $HK \parallel SB$ . Mặt khác  $SB \perp AB$ , suy ra  $HK \perp AB$ .(3)

Ta có  $KI \perp (SAB)$ , suy ra  $KI \perp AB$ .(4)

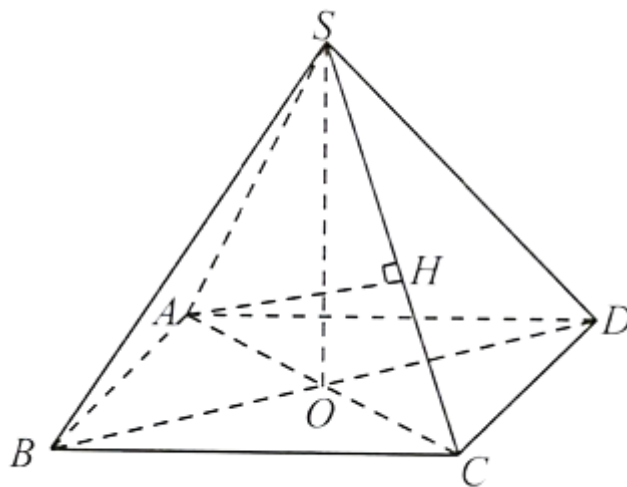
Từ (3) và (4) suy ra  $AB \perp (HIK)$ , suy ra  $AB \perp IH$ .

**Câu 15.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  có đáy là hình vuông tâm  $O$  cạnh  $a\sqrt{2}$ . Biết rằng  $SA = SB = SC = SD, SO = 2a\sqrt{2}$ .

a) Chứng minh rằng  $SO \perp (ABCD)$ .

b) Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh  $A$  của tam giác  $SAC$ .

**Lời giải**



Hình 1

a) Ta có  $SA = SC$ , suy ra  $\Delta SAC$  cân tại  $S$ , suy ra  $SO \perp AC$ .(1)

Ta có  $SB = SD$ , suy ra  $\Delta SBD$  cân tại  $S$ , suy ra  $SO \perp BD$ .(2)

Từ (1) và (2) suy ra  $SO \perp (ABCD)$ .

b) Ta có  $AC = 2a, OC = a$ ,

$$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = 3a.$$

Vẽ đường cao  $AH$  của tam giác  $SAC$ . Ta có:

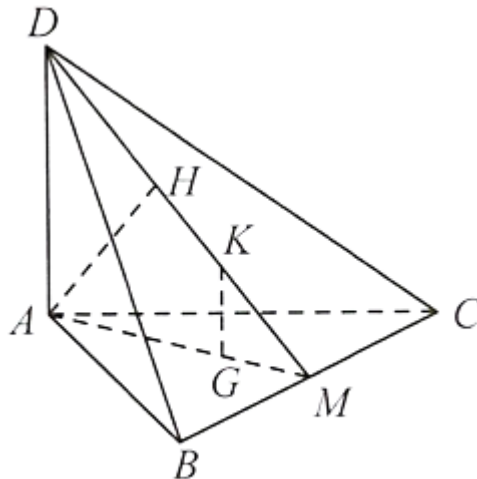
$$AH = \frac{SO \cdot AC}{SC} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot 2a}{3a} = \frac{4a\sqrt{2}}{3}.$$

**Câu 16.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $DA \perp (ABC), ABC$  là tam giác cân tại  $A$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Vẽ  $AH \perp MD$  tại  $H$ .

a) Chứng minh rằng  $AH \perp (BCD)$ .

b) Gọi  $G, K$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $DBC$ . Chứng minh rằng  $GK \perp (ABC)$ .

**Lời giải**



Hình 3

a) Ta có  $BC \perp DA, BC \perp AM$ , suy ra

$BC \perp (ADM)$ , suy ra  $BC \perp AH$ . Ta lại có  $AH \perp DM$ , suy ra  $AH \perp (BCD)$ .

$$\frac{MK}{MD} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$$

b) Ta có  $\frac{MK}{MD} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$ , suy ra  $GK \parallel AD$ .

Ta lại có  $AD \perp (ABC)$ , suy ra  $GK \perp (ABC)$ .

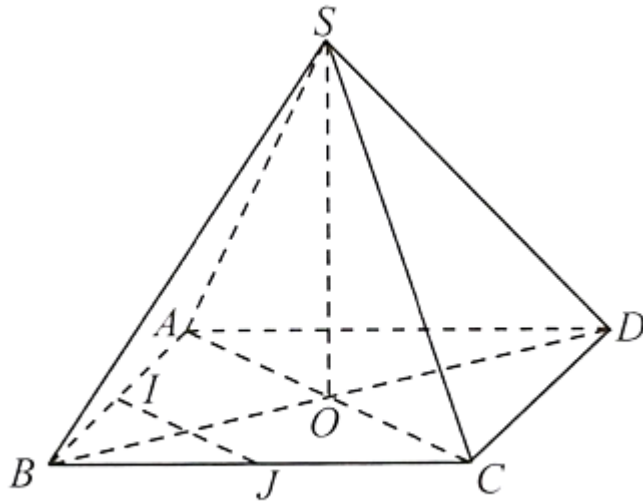
**Câu 17.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo,  $SA = SC, SB = SD$ .

a) Chứng minh rằng  $SO \perp (ABCD)$ .

b) Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BA, BC$ . Chứng minh rằng  $IJ \perp (SBD)$ .

c) Chứng minh rằng  $BD \perp (SAC)$ .

**Lời giải**



Hình 4

a) Ta có  $SA = SC$ , suy ra  $\Delta SAC$  cân tại  $S$ , suy ra  $SO \perp AC$ . (1)

Tương tự ta có  $SO \perp BD$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $SO \perp (ABCD)$ .

b) Ta có  $AC \perp BD$  và  $AC \perp SO$ , suy ra  $AC \perp (SBD)$ .

Ta có  $IJ$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$  nên suy ra  $IJ \parallel AC$ , suy ra  $IJ \perp (SBD)$ .

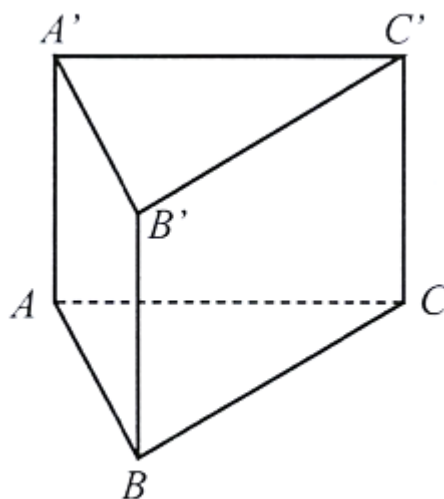
c) Ta có  $BD \perp AC$  và  $BD \perp SO$ , suy ra  $BD \perp (SAC)$ .

**Câu 18.** Cho hình lăng trụ  $ABC \cdot A'B'C'$  có  $AA' \perp (ABC)$  (Hình 7). Chứng minh rằng:

a)  $BB' \perp (A'B'C')$ ;

b)  $AA' \perp (A'B'C')$ .

Lời giải



Hình 7

a) Vì  $BB' \parallel AA'$  và  $AA' \perp (ABC)$  nên  $BB' \perp (A'B'C')$

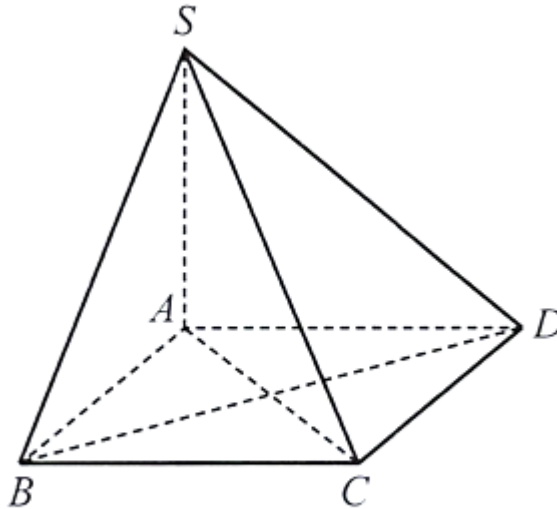
b) Vì  $(A'B'C') \parallel (ABC)$  và  $AA' \perp (ABC)$  nên  $AA' \perp (A'B'C')$ .

**Câu 19.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABCD)$ . Chứng minh rằng:

- a) Nếu  $ABCD$  là hình chữ nhật thì  $BC \perp (SAB)$ ;  
 a) Nếu  $ABCD$  là hình thoi thì  $SC \perp BD$ .

**Lời giải**

(Hình 8)



Hình 8

a) Vì  $SA \perp (ABCD)$  và  $BC \subset (ABCD)$  nên  $SA \perp BC$ .

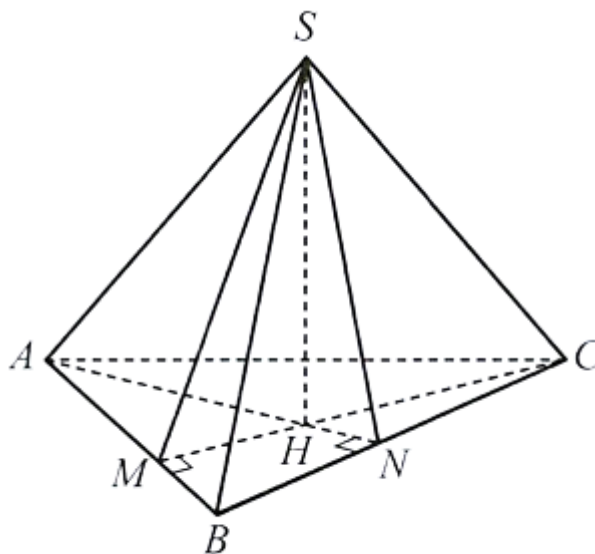
Mà  $BC \perp BA$  vì  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $BA$  cắt  $SA$  trong mặt phẳng  $(SAB)$ . Suy ra  $BC \perp (SAB)$ .

b) Vì  $ABCD$  là hình thoi nên  $BD \perp AC$ .

Vì  $SA \perp (ABCD)$  nên  $AC$  là hình chiếu của  $SC$  trên  $(ABCD)$ . Mà  $BD \perp AC$  nên theo định lí ba đường vuông góc, ta có  $BD \perp SC$ .

**Câu 20.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 90^\circ$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $SH \perp (ABC)$ .

**Lời giải**



Hình 55

Gọi  $AN, CM$  là hai đường cao của tam giác  $ABC$ . Khi đó,  $H$  là giao điểm của  $AN$  và  $CM$ .

Theo giả thiết,  $SA \perp SB, SA \perp SC$  mà  $SB, SC$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(SBC)$  nên  $SA \perp (SBC)$ . Mà  $BC \subset (SBC)$  nên  $SA \perp BC$ .

Ngoài ra,  $AH \perp BC$  và  $SA, AH$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(SAH)$  nên  $BC \perp (SAH)$ .

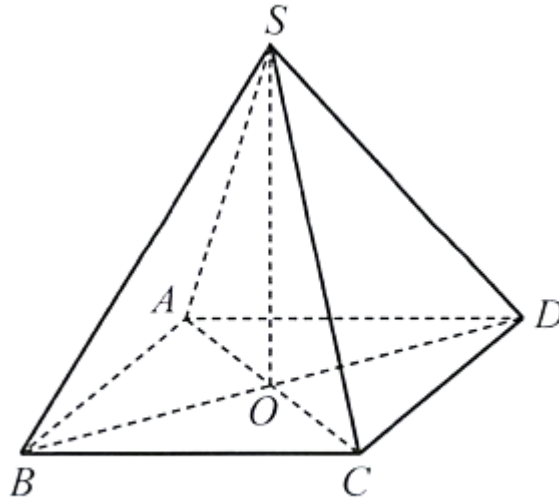
Mà  $SH \subset (SAH)$  nên  $BC \perp SH$ .

Tương tự, ta có:  $AB \perp SH$ .

Bên cạnh đó,  $AB, BC$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(ABC)$  nên  $SH \perp (ABC)$ .

**Câu 21.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình bình hành và  $SA = SC, SB = SD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh rằng  $SO \perp (ABCD)$ .

Lời giải



Hình 56

Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $O$  là trung điểm của  $AC, BD$ .

Xét tam giác  $SAC$  cân tại  $S$  có  $SO$  là đường trung tuyến, nên  $SO$  là đường cao, suy ra  $SO \perp AC$

Xét tam giác  $SBD$  cân tại  $S$  có  $SO$  là đường trung tuyến, nên  $SO$  là đường cao, suy ra  $SO \perp BD$

Mà  $AC, BD$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(ABCD)$ .

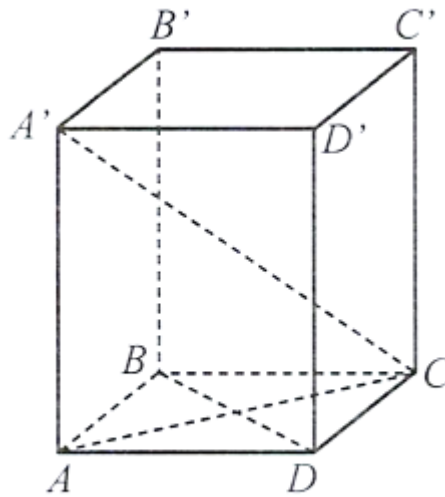
Do đó  $SO \perp (ABCD)$ .

**Câu 22.** Cho hình hộp  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  có  $ABCD$  là hình thoi,  $AA' \perp (ABCD)$ . Chứng minh rằng:

a)  $BB' \perp (A'B'C'D')$ ;

b)  $BD \perp A'C$ .

Lời giải

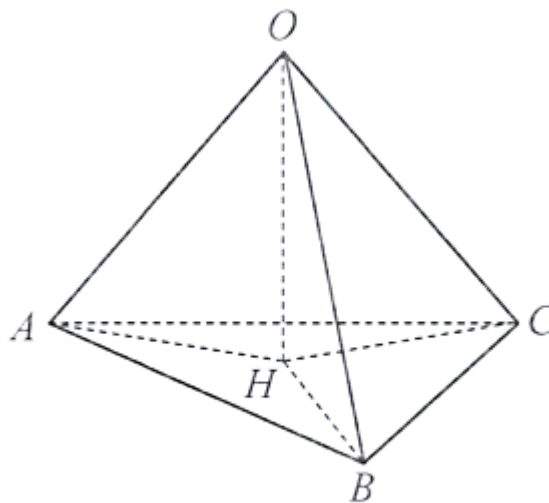


Hình 57

- a) Vì  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  là hình hộp nên  $AA' \parallel BB'$ . Mà  $AA' \perp (ABCD)$  nên  $BB' \perp (ABCD)$ . Ngoài ra, ta cũng có  $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$  nên  $BB' \perp (A'B'C'D')$ .
- b) Vì  $ABCD$  là hình thoi nên  $AC \perp BD$ . Do  $AA' \perp (ABCD)$  nên  $AC$  là hình chiếu của  $A'C'$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$ . Theo định lí ba đường vuông góc suy ra  $BD \perp A'C'$ .

**Câu 23.** Cho hình chóp  $O.ABC$  và điểm  $H$  không thuộc các đường thẳng  $AB, BC, CA$  sao cho  $\angle H A = \angle H B = \angle H C = 90^\circ$ . Chứng minh rằng  $H$  thuộc mặt phẳng  $(ABC)$ .

**Lời giải**

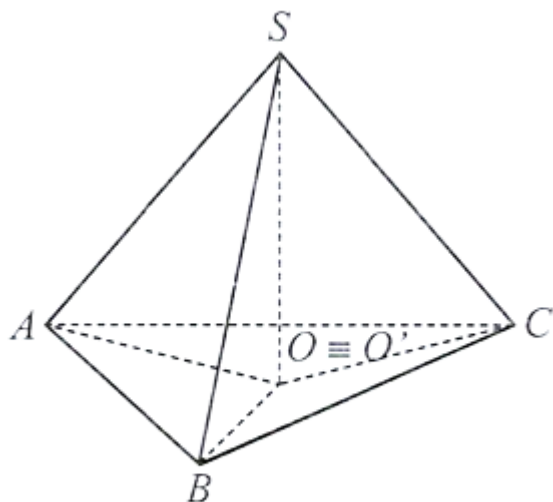


Hình 58

Vì  $H$  không thuộc các đường thẳng  $AB, BC, CA$  nên  $HA, HB, HC$  đôi một cắt nhau. Theo giả thiết,  $OH \perp HA, OH \perp HB$  mà  $HA, HB$  cắt nhau nên  $OH \perp (HAB)$ . Tương tự,  $OH \perp (HBC)$ . Vì  $(HAB)$  và  $(HBC)$  cùng đi qua  $H$  và vuông góc với  $OH$  nên hai mặt phẳng đó trùng nhau. Suy ra  $H$  thuộc mặt phẳng  $(ABC)$ .

**Câu 24.** Cho hình chóp  $S.ABC$  thỏa mãn  $SA = SB = SC$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $SO \perp (ABC)$ .

**Lời giải**



Hình 59

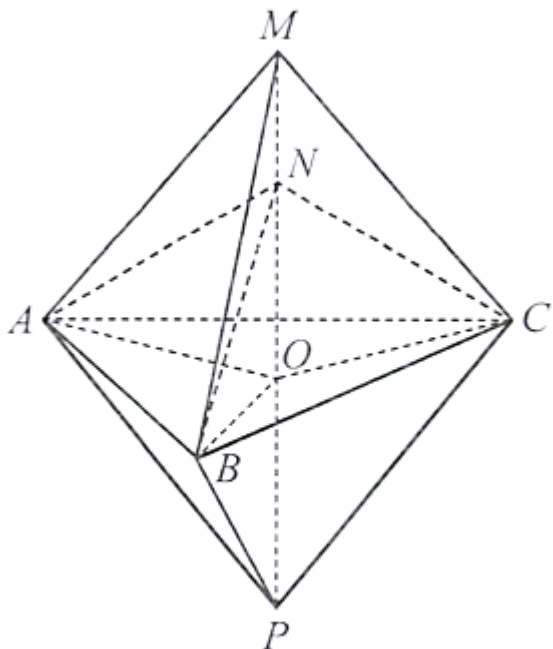
Gọi  $O'$  là hình chiếu của  $S$  trên  $(ABC)$ . Khi đó,  $SO' \perp (ABC)$ . Mà  $O'A, O'B, O'C$  đều nằm trên  $(ABC)$  nên  $SO' \perp OA, SO' \perp OB, SO' \perp OC$ .

Xét ba tam giác  $SO'A, SO'B, SO'C$  vuông tại  $O'$  có  $SA = SB = SC$  và  $SO'$  chung nên ba tam giác đó bằng nhau. Do đó,  $O'A = O'B = O'C$ .

Suy ra  $O'$  là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$  hay  $O' \equiv O$ . Vậy  $SO \perp (ABC)$ .

**Câu 25.** Cho tam giác  $ABC$  và các điểm  $M, N, P$  đôi một phân biệt thoả mãn  $MA = MB = MC, NA = NB = NC, PA = PB = PC$ . Chứng minh rằng  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Lời giải**



Hình 60

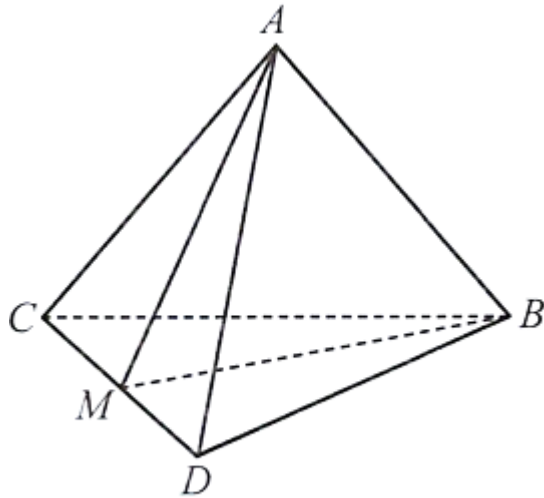
Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$ .

Giả sử ba điểm  $M, N, P$  đều không thuộc mặt phẳng  $(ABC)$ , áp dụng kết quả Bài 16 cho ba hình chóp  $M.ABC, N.ABC, P.ABC$  ta có  $MO \perp (ABC), NO \perp (ABC), PO \perp (ABC)$ . Do đó ba đường thẳng  $MO, NO, PO$  trùng nhau hay  $M, N, P$  thẳng hàng.

Giả sử trong ba điểm  $M, N, P$  có một điểm nằm trên  $(ABC)$ . Khi đó, theo giả thiết ta có điểm đó trùng  $O$ . Như vậy, cùng với kết quả trên ta có ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Câu 26.** Cho hình tứ diện đều  $ABCD$ . Chứng minh  $AB \perp CD$ .

**Lời giải**



Hình 61

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ .

Vì  $ABCD$  là hình tứ diện đều nên hai tam giác  $ACD$  và  $BCD$  là các tam giác đều.

Suy ra  $AM \perp CD, BM \perp CD$ .

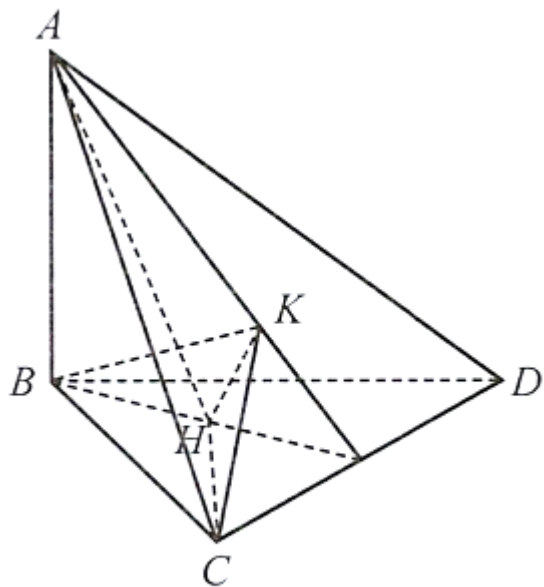
Mà  $AM, BM$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(ABM)$  nên  $CD \perp (ABM)$ . Ngoài ra,  $AB \subset (ABM)$ . Do đó, ta có  $AB \perp CD$ .

**Câu 27.** Cho hình tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp (BCD)$ , các tam giác  $BCD$  và  $ACD$  là những tam giác nhọn. Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $BCD, ACD$ . Chứng minh rằng:

a)  $AD \perp CH$ ;

b\*)  $HK \perp (ACD)$ .

**Lời giải**



Hình 62

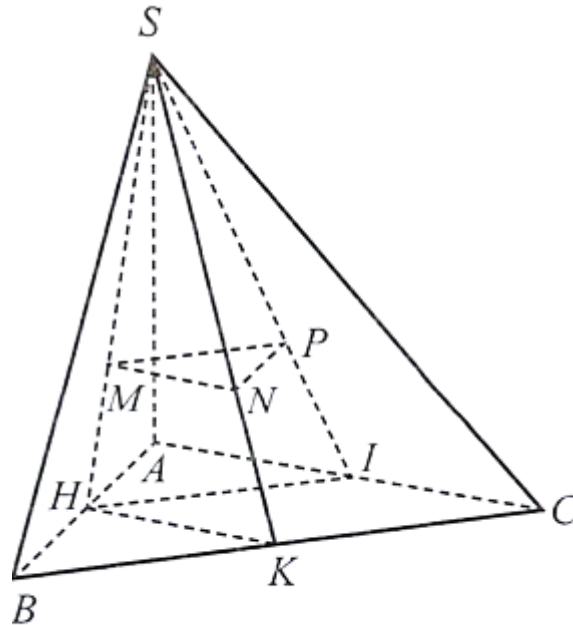
a) Vì  $AB \perp (BCD), CH \subset (BCD)$  nên  $AB \perp CH$ .

Do  $H$  là trực tâm của tam giác  $(BCD)$  nên  $CH \perp BD$ . Mà  $AB, BD$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(ABD)$  nên  $CH \perp (ABD)$ . Ngoài ra,  $AD \subset (ABD)$  nên  $AD \perp CH$ .

b\*) Vì  $K$  là trực tâm của tam giác  $(ACD)$  nên  $CK \perp AD$ . Mà  $CK, CH$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(CHK)$  nên  $AD \perp (CHK)$ . Ngoài ra,  $HK \subset (CHK)$  nên  $AD \perp HK$ . Áp dụng kết quả của Ví dụ 7 trang 93, ta có  $CD \perp HK$ . Bên cạnh đó,  $AC, CD$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(ACD)$  nên  $HK \perp (ACD)$ .

**Câu 28.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trọng tâm của ba tam giác  $SAB, SBC, SCA$ . Chứng minh rằng  $SA \perp (MNP)$ .

Lời giải



Hình 63

Gọi  $H, K, I$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Theo giả thiết ta có:

$$\frac{SM}{SH} = \frac{SN}{SK} = \frac{SP}{SI} = \frac{2}{3}$$

Do đó, trong tam giác  $SHK$  có  $MN \parallel HK$ , trong tam giác  $SHI$  có  $MP \parallel HI$ . Mà  $HK \subset (ABC), HI \subset (ABC)$  nên  $MN \parallel (ABC), MP \parallel (ABC)$ .

Ngoài ra,  $MN, MP$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(MNP)$  nên  $(MNP) \parallel (ABC)$ . Mà  $SA \perp (ABC)$ . Vậy  $SA \perp (MNP)$ .

## Dạng 2. Ứng dụng

**Câu 29. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Khi làm cột treo quần áo, ta có thể tạo hai thanh đế thẳng đặt dưới sàn nhà và dựng cột treo vuông góc với hai thanh đế đó (H.7.15). Hãy giải thích vì sao bằng cách đó ta có được cột treo vuông góc với sàn nhà.



Hình 7.15

**Lời giải**

Điều này được giải thích bởi tính chất của đường thẳng và góc vuông. Một đường thẳng là đường đi qua hai điểm bất kỳ trên không gian và tạo thành một góc 180 độ. Trong khi đó, một góc vuông là một góc có độ lớn là 90 độ. Vì vậy, nếu ta đặt cột treo lên sao cho nó vuông góc với đường thẳng trên sàn nhà, thì chắc chắn cột treo sẽ đứng vuông góc với sàn nhà. Bằng cách này, ta có thể đảm bảo rằng cột treo sẽ được đặt đúng vị trí và đứng thẳng đứng góc với sàn nhà, giúp cho quá trình sử dụng cột treo quần áo được dễ dàng hơn và tiện lợi hơn.

**Câu 30. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$  sao cho các đường thẳng  $AB$  và  $AC$  cùng vuông góc với một mặt phẳng  $(P)$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

**Lời giải**

Các đường thẳng  $AB, AC$  cùng vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ . Mặt khác, qua điểm  $A$  có duy nhất đường thẳng vuông góc với  $(P)$ . Do đó hai đường thẳng  $AB, AC$  trùng nhau. Vậy  $A, B, C$  thẳng hàng.

**Câu 31. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Một chiếc bàn có các chân cùng vuông góc với mặt phẳng chứa mặt bàn và mặt phẳng chứa mặt sàn. Hỏi hai mặt phẳng đó có song song với nhau hay không? Vì sao?

**Lời giải**

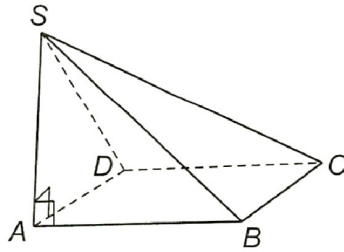
Hai mặt phẳng đó song song vì hai mặt phẳng đó phân biệt và cùng vuông góc với một đường thẳng, đường thẳng đó là đường thẳng chứa một trong các chân bàn.

**Câu 32. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật và  $SA \perp (ABCD)$ .

Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp  $S.ABCD$  là các tam giác vuông.

**Lời giải**

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD, SA \perp BC, SA \perp CD$ .



Hình 7.7

Mặt khác,  $BC \perp AB, CD \perp AD \Rightarrow BC \perp (SAB), CD \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SB, CD \perp SD$ .

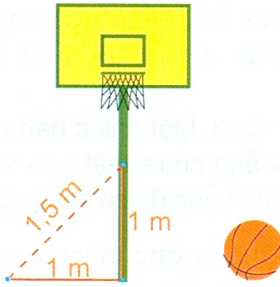
Vậy các mặt bên  $SAD, SDC, SBC, SAB$  là các tam giác vuông.

**Câu 33. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

**Lời giải**

Quả dọi vuông góc với mặt phẳng nước.

**Câu 34. (SGK - KNTT 11 - Tập 2)** Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột  $1m$  đến một điểm trên cột, cách chân cột  $1m$  được kết quả là  $1,5m$  (H.7.27). Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?



Hình 7.27

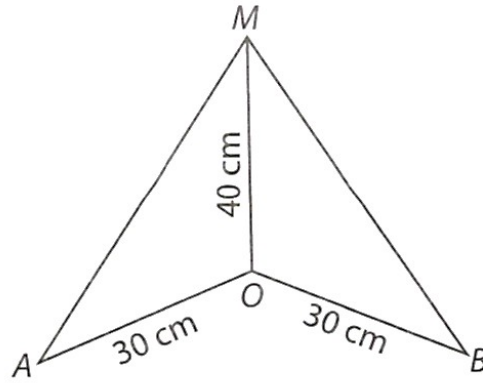
**Lời giải**

Đo chính xác thì cột không vuông góc với mặt sân vì nếu vuông góc với mặt sân thì theo định lý Pythagore, cạnh huyền bằng  $\sqrt{2}m$ , không phải  $1,5m$ .

**Câu 35.** Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi  $O$  là điểm đặt chân cột trên mặt sân và  $M$  là điểm trên cột cách chân cột  $40cm$ . Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm  $A$  và  $B$  đều cách  $O$  là  $30cm$  ( $A, B, O$  không thẳng hàng). Người ta đo độ dài  $MA$  và  $MB$  đều bằng  $50cm$ . Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

**Lời giải**

(H.7.6)



Hình 7.6

Ta có:  $50^2 = 40^2 + 30^2$  nên  $MA^2 = MO^2 + OA^2$  và  $MB^2 = MO^2 + OB^2$ . Do đó, tam giác  $MOA$  và tam giác  $MOB$  vuông tại  $O$ , hay  $MO \perp OA$ ,  $MO \perp OB$ . Suy ra  $MO \perp (OAB)$ . Vậy chiếc cột vuông góc với mặt sân.

**Câu 36.** Một cây cột được dựng trên một sàn phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sàn hay không? Vì sao?

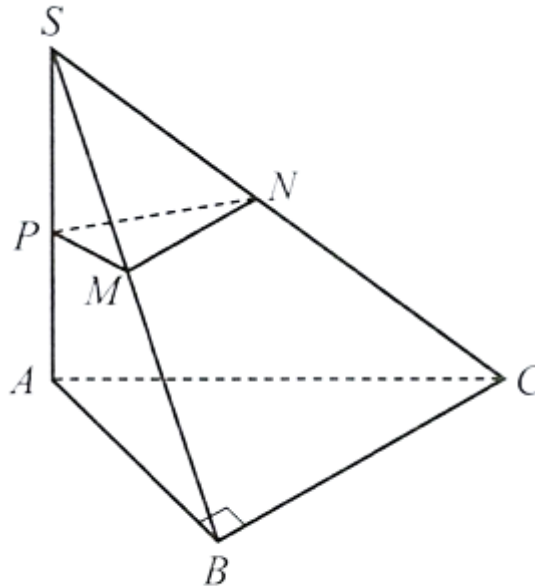
**Lời giải**

Vì dây dọi song song với cây cột và dây dọi vuông góc với mặt phẳng sàn nên cây cột vuông góc với mặt phẳng sàn.

**Câu 37.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA \perp (ABC), BC \perp AB$ . Lấy hai điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SC$  và điểm  $P$  nằm trên cạnh  $SA$ . Chứng minh rằng tam giác  $MNP$  là tam giác vuông.

**Lời giải**

(Hình 9)



Hình 9

Vì  $SA \perp (ABC)$  mà  $BC \subset (ABC)$  nên  $SA \perp BC$ .

Mà  $BC \perp AB, AB$  và  $SA$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(SAB)$ . Suy ra  $BC \perp (SAB)$ .

Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SC$  nên  $MN \parallel BC$ . Suy ra  $MN \perp (SAB)$ .

Mà  $PM \subset (SAB)$  nên  $MN \perp PM$ .

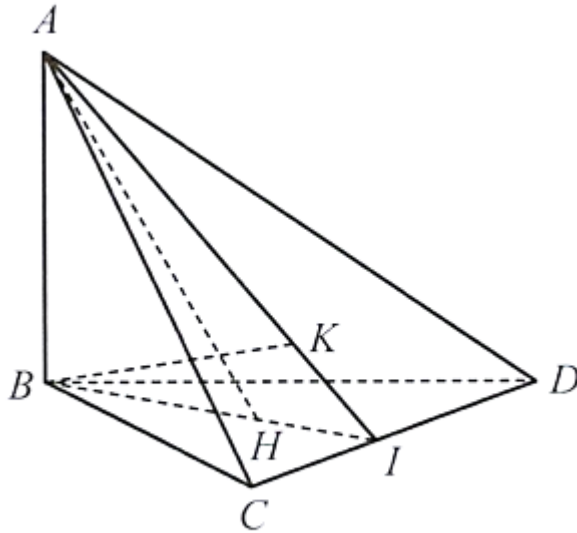
Vậy tam giác  $MNP$  vuông tại  $M$ .

**Câu 38.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp (BCD)$ , các tam giác  $BCD$  và  $ACD$  là những tam giác nhọn. Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $BCD, ACD$ . Chứng minh rằng:

- $CD \perp (ABH)$  và  $CD \perp (ABK)$ ;
- Bốn điểm  $A, B, H, K$  cùng thuộc một mặt phẳng.
- Ba đường thẳng  $AK, BH, CD$  cùng đi qua một điểm.

**Lời giải**

(Hình 12)



Hình 12

a) Vì  $AB \perp (BCD)$  và  $CD \subset (BCD)$  nên  $AB \perp CD$ . Mà  $BH \perp CD$  vì  $H$  là trực tâm của tam giác  $BCD$  và  $AB, BH$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(ABH)$  nên  $CD \perp (ABH)$ .

Tương tự ta chứng minh được  $CD \perp (ABK)$ .

b) Vì hai mặt phẳng  $(ABH)$  và  $(ABK)$  cùng đi qua điểm  $A$  và vuông góc với  $CD$  nên hai mặt phẳng này trùng nhau. Vậy bốn điểm  $A, B, H, K$  cùng thuộc một mặt phẳng.

c) Trong mặt phẳng  $(BCD)$ , gọi  $I$  là giao điểm của  $BH$  và  $CD$ . Khi đó, ba điểm  $A, K, I$  đều thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng  $(ABHK)$  và  $(ACD)$ . Suy ra  $A, K, I$  thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng  $AK, BH, CD$  cùng đi qua một điểm.

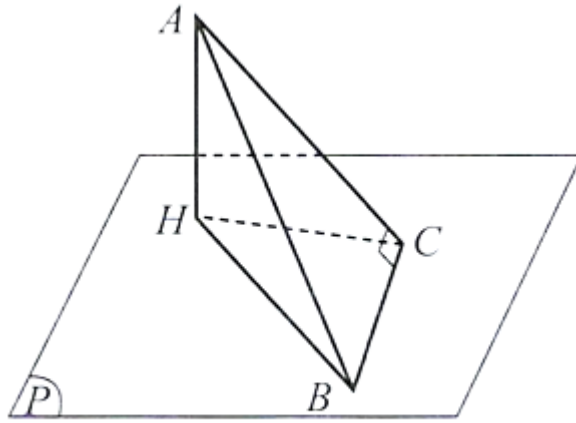
**Câu 39.** Cho hình chóp  $S \cdot ABCD$  thỏa mãn  $SA = SB = SC = SD$ . Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của tứ giác  $ABCD$ .

**Lời giải**

Gọi  $O$  là hình chiếu của  $S$  trên  $(ABCD)$ . Chứng minh tương tự Bài 16, ta có  $OA = OB = OC = OD$ . Suy ra  $O$  là tâm đường tròn đi qua bốn đỉnh tứ giác  $ABCD$ .

**Câu 40.** Cho mặt phẳng  $(P)$  và hai điểm  $A, B$  sao cho  $B$  thuộc  $(P)$  và  $A$  không thuộc  $(P)$ . Điểm  $C$  chuyển động trên mặt phẳng  $(P)$  thỏa mãn  $\angle ACB = 90^\circ$ . Chứng minh rằng  $C$  chuyển động trên một đường tròn cố định trong  $(P)$ .

**Lời giải**

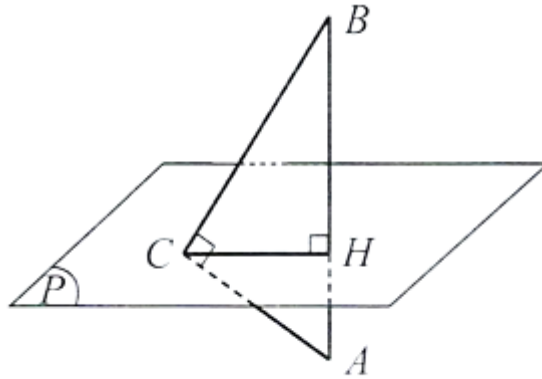


Hình 64

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $(P)$ . Khi đó  $H$  cố định và  $HC$  là hình chiếu của  $AC$  trên  $(P)$ . Vì  $BC \perp AC$  nên theo Định lý ba đường vuông góc ta có  $BC \perp HC$ . Do đó  $C$  chuyển động trên đường tròn đường kính  $HB$  cố định nằm trong  $(P)$ .

**Câu 41.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(P)$  sao cho  $(P) \perp AB$  và  $(P)$  cắt đoạn thẳng  $AB$  tại điểm  $H$  thỏa mãn  $HA = 4\text{cm}, HB = 9\text{cm}$ . Điểm  $C$  chuyển động trong mặt phẳng  $(P)$  thỏa mãn  $\angle ACB = 90^\circ$ . Chứng minh rằng điểm  $C$  thuộc đường tròn tâm  $H$  bán kính  $6\text{cm}$  trong mặt phẳng  $(P)$ .

Lời giải



Hình 65

Vì  $AC \perp CB$  nên  $A, B, C$  không thẳng hàng. Do  $AB \perp (P), HC \subset (P)$  nên  $AB \perp HC$ . Ta có  $\triangle HBC$  đồng dạng  $\triangle HCA$  nên  $HC^2 = HA \cdot HB$ , suy ra  $HC = \sqrt{4 \cdot 9} = 6(\text{cm})$ . Vậy  $C$  thuộc đường tròn tâm  $H$  bán kính  $6\text{cm}$  trong  $(P)$ .