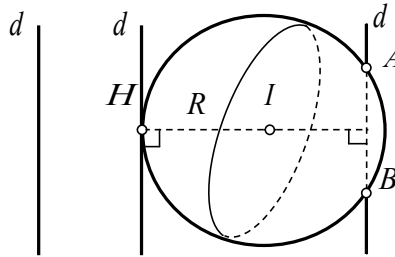


CHỦ ĐỀ 4

BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ . Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R .



- ▢ Nếu $d(I, \Delta) > R : \Delta$ không cắt (S) .
- ▢ Nếu $d(I, \Delta) = R : \Delta$ tiếp xúc với (S) tại H .
- ▢ Nếu $d(I, \Delta) < R : \Delta$ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B .
- ▢ $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
- ▢ $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

DẠNG 1

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT CẦU

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

A.3.

B.0.

C.1

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ đi qua $M = (-2; 0; 3)$ và có VTCP $u = (-1; 1; -1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 2; -3)$ và bán kính $R=9$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (3; 2; -6)$ và $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MI} \right] = (-4; -9; -5)$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \vec{MI} \right] \right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{366}}{3}$$

Vì $d(I, \Delta) < R$ nên Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Số điểm chung của Δ và (S) là:

- A. 0. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Δ đi qua $M = (0; 1; 2)$ và có VTCP $\vec{u} = (2; 1; -1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 0; -2)$ và bán kính $R = 2$

Ta có $\vec{MI} = (1; -1; -4)$ và $\left[\vec{u}, \vec{MI} \right] = (-5; 7; -3)$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \vec{MI} \right] \right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{498}}{6}$$

Vì $d(I, \Delta) > R$ nên Δ không cắt mặt cầu (S) .

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$. Giá trị của m để đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S) là:

- A. $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$ B. $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$
C. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$ D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2+5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{15}{2} \\ m < \frac{5}{2} \end{cases}$$

Để Δ không cắt mặt cầu (S) thì (1) vô nghiệm, hay (1) có

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường thẳng

$\Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+mt \\ z = -2t \end{cases}$. Giá trị của m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) là:

A. $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$

B. $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$

C. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$

D. $m \in \mathbb{R}$

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{15}{2} \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Để Δ tiếp xúc mặt cầu (S) thì (1) có nghiệm kép, hay (1) có

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường thẳng

$\Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+mt \\ z = -2t \end{cases}$. Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là:

A. $m \in \mathbb{R}$

B. $m > \frac{15}{2}$ hoặc $m < \frac{5}{2}$

C. $m = \frac{15}{2}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$

D. $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 = 0 \quad (1)$$

Để Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt, hay (1) có

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$$

DẠNG 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẺ

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{10}$
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$ D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$

Lời giải

Chọn D

Gọi M là hình chiếu của $I(1; -2; 3)$ lên Oy , ta có: $I(0; -2; 0)$.

$IM = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10} \Rightarrow R = d(I, Oy) = IM = \sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2; 3; -1)$ sao cho mặt cầu cắt đường thẳng

(d) $\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = t \\ z = -25 - 2t \end{cases}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$ là:

- A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 280$ B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 289$
 C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$ D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng (d) đi qua $M(11; 0; -25)$ và có VTCP $u = (2; 1; -2)$

$$IH = d(I, AB) = \frac{\left| \begin{vmatrix} u & MI \end{vmatrix} \right|}{|u|} = 15 \quad R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2} \right)^2} = 17$$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Có:

Vậy phương trình mặt cầu: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

- Câu 8.** Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+9=0$ tại điểm $H(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng
- A. 2. B. -1. C. 1. D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$\vec{n}_P = (1; -2; 2) \text{ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng } OH \Rightarrow OH: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(t; -2t; 2t)$$

$$H \in (P) \Rightarrow t - 2(-2t) + 2 \cdot 2t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 2; -2) \Rightarrow a+b+c = -1$$

- Câu 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I , tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính của (S) bằng
- A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $H(1+2t; -t; t)$ là hình chiếu của I trên đường thẳng d .

Có $\vec{IH} = (2t; -t; t-2)$; vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

Vì H là hình chiếu vuông góc của I trên d nên $\vec{IH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{IH} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Leftrightarrow 2t \cdot 2 + (-t) \cdot (-1) + (t-2) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{IH} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{3} \right) \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = IH = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

- Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy . Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) ?

- A. $M(-1; -2; 1)$ B. $N(1; 2; -1)$ C. $P(-5; 2; -7)$ D. $Q(5; -2; 7)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm I thuộc đường thẳng d nên có tọa độ dạng: $I(1+2t; -t; -2+t)$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oy nên $d(I, Oy) = R \Leftrightarrow \sqrt{(1+2t)^2 + (-2+t)^2} = 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5t^2 + 5} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta có $I(5; -2; 0)$ (Loại).

Với $t = -2$ ta có $I(-3; 2; -4)$ (Thỏa mãn).

Nên mặt cầu (S) có phương trình là: $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 25$.

Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt cầu, nhận thấy điểm

$N(1; 2; -1)$ thỏa mãn.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2)$ và $B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = \sqrt{3}$

B. $R = 2$

C. $R = 1$

D. $R = \sqrt{6}$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; 2; 1)$

$$d(I; (P)) = \frac{|3+2+1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(3; 2; 1)$ và bán kính $R' = \frac{AB}{2} = 3\sqrt{2}$

Ta có $H \in (S)$. Mặt khác $H \in (P)$ nên $H \in (C) = (S) \cap (P)$

Bán kính của đường tròn (C) là $R = \sqrt{(R')^2 - d^2(I; (P))} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng

$d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36.$

B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9.$

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9.$

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36.$

Lời giải

Chọn B

$$(P) \cap Oz = A(0;0;3)$$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+6y+z-3=0 \\ \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y+z-3=0 \\ 2x-y-10=0 \\ y+2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow B(4;-2;7).$$

Gọi I là trung điểm của

$$AB \Rightarrow I(2;-1;5) \Rightarrow IA = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9.$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0$, $(Q): x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): (x+2)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 1.$

B. $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 6.$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}.$

D. $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 8.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I \in (d) \Rightarrow I(2t; 3+t; 2+t)$.

$$I \in (P) \Rightarrow (P): 2t - 2(3+t) + 2(2+t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2; 4; 3)$$

$$(Q) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên } R = d(I, (Q)) = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

$$\text{Vậy } (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}.$$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là:

A. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{4}.$

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; 1; -2)$ và có VTCP $u(1; 2; 1)$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (0; -1; 2)$ và $\left[u, \overrightarrow{MI} \right] = (5; -2; -1)$

$$IH = d(I, AB) = \frac{\left| \left[u, \overrightarrow{MI} \right] \right|}{|u|} = \sqrt{5}$$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d). Có:

Xét tam giác IAB , có $IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm A , tiếp xúc với d .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$

Đường thẳng (d) đi qua $I(-1; 2; -3)$ và có VTCP $u(2; 1; -1)$ $\Rightarrow d(A, d) = \frac{\left| \left[u, \overrightarrow{AI} \right] \right|}{|u|} = 5\sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $M(4; 1; 6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm M , tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Lập phương trình của mặt cầu (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.

d đi qua $N(-5; 7; 0)$ và có VTCP $u(2; -2; 1)$; $\overrightarrow{MN} = (-9; 6; -6)$.

Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ M đến đường thẳng d $\Rightarrow MH = d(M, d) = 3$.

Bán kính mặt cầu (S) : $R^2 = MH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 18$.

//PT mặt cầu (S) : $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H . Tìm tọa độ điểm H .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $H(3;0;2)$

Tọa độ điểm H là hình chiếu của điểm I trên mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Tọa độ điểm H là giao điểm của d và (P) , ta có:

$$2(1+2t) - 2(2-2t) - (3-t) - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $H(3;0;2)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $u = (1; -1; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Tìm vector chỉ phương của d .

Trả lời:

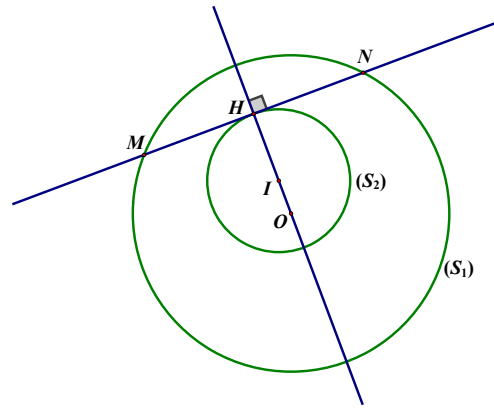
Lời giải

Đáp án: $u = (1; 1; 0)$

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1 = 5$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R_2 = 2$.

Có $OI = 1 < R_1 - R_2$ nên (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1) .



Giả sử d tiếp xúc với (S_2) tại H và cắt mặt cầu (S_1) tại M, N . Gọi K là trung điểm MN .

Khi đó $IH = R_2 = 2$ và $OH \geq OK$.

Theo giả thiết $MN = 8 \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow OK = \sqrt{R_1^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Có $OI = 1, IH = 2 \Rightarrow OK = OI + IH \geq OH \geq OK$. Do đó $OH = OK$, suy ra $H \equiv K$, tức d vuông góc với đường thẳng OI .

Đường thẳng d cần tìm vuông góc với véc tơ $u = (1; -1; 0)$ và vuông góc với $\vec{OI} = (0; 0; 1)$ nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u_3} = [\vec{OI}, u] = (1; 1; 0)$.

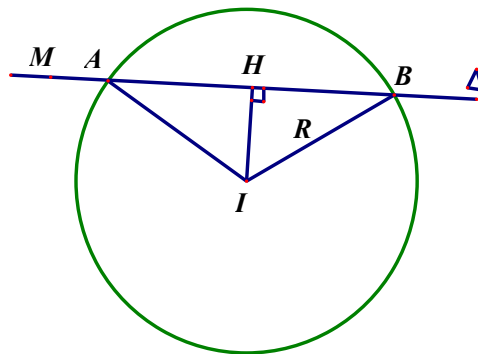
Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ (m là tham số) và

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 8$. Tìm giá trị của m .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = -12$



Gọi H là trung điểm đoạn thẳng $AB \Rightarrow IH \perp AB, HA = 4$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$, bán kính $R = \sqrt{13 - m}, (m < 13)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(4; 3; 3)$ và có 1 véc tơ chỉ phương $u = (2; 1; 2)$.

$$\vec{IM} = (6; 0; 3) \Rightarrow [\vec{IM}, \vec{u}] = (-3; -6; 6) \Rightarrow IH = d(I, \Delta) = \frac{|\vec{IM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3$$

Ta có:

$$Ta \text{ có: } R^2 = IH^2 + HA^2 \Leftrightarrow 13 - m = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow m = -12$$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): z + 2 = 0$, $K(0; 0; -2)$, đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Lập phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K , bán kính $r = \sqrt{5}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Viết lại phương trình của đường thẳng d dưới dạng tham số:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Gọi I là tâm của mặt cầu cần lập. Vì $I \in d$ nên giả sử $I(t; t; t)$. Có $\vec{IK} = (-t; -t; -2-t)$.

Thiết diện của mặt cầu và mặt phẳng (P) là đường tròn tâm K nên ta có $\vec{IK} \perp (P)$. Suy ra $\vec{IK}$ và

$$\vec{n} = (0; 0; 1) \text{ cùng phương. Do đó tồn tại số thực } k \text{ để}$$

$$\vec{IK} = kn \Leftrightarrow \begin{cases} -t = k \cdot 0 \\ -t = k \cdot 0 \\ -2-t = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

Suy ra $I(0; 0; 0)$. Tính được $d(I, (P)) = 2$.

Gọi R là bán kính mặt cầu. Ta có: $R = \sqrt{r^2 + [d(I, (P))]^2} = 3$.

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

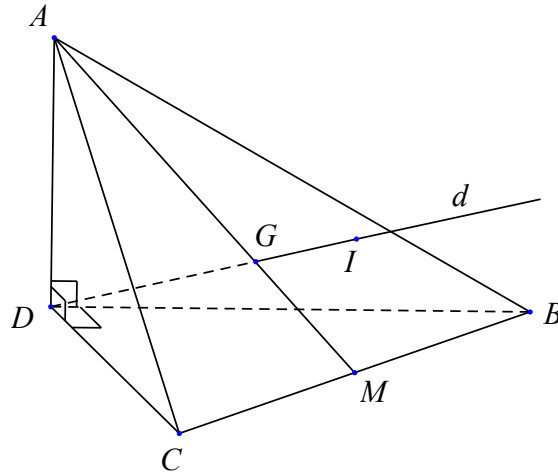
Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Gọi

D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $S = -1$



Gọi d là trục của ΔABC , ta có $(ABC): x + y + z + 2 = 0$.

$$d: \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{2}{3} + t \\ z = -\frac{2}{3} + t \end{cases}$$

Do ΔABC đều nên d đi qua trọng tâm $G\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và có VTCP $u = (1; 1; 1)$, suy ra

Ta thấy $\Delta DAB = \Delta DBC = \Delta DCA$, suy ra $DA = DB = DC \Rightarrow D \in d$ nên giả sử $D\left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right)$.

Ta có $\vec{AD} = \left(\frac{4}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right); \vec{BD} = \left(-\frac{2}{3} + t; \frac{4}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right); \vec{CD} = \left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; \frac{4}{3} + t\right)$

$$\begin{cases} \vec{AD} \cdot \vec{BD} = 0 \\ \vec{AD} \cdot \vec{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \Rightarrow D\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right) \\ t = \frac{2}{3} \Rightarrow D(0; 0; 0) \text{ (loại)} \end{cases}$$

Có $I \in d \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t; -\frac{2}{3} + t\right)$, do tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm I nên

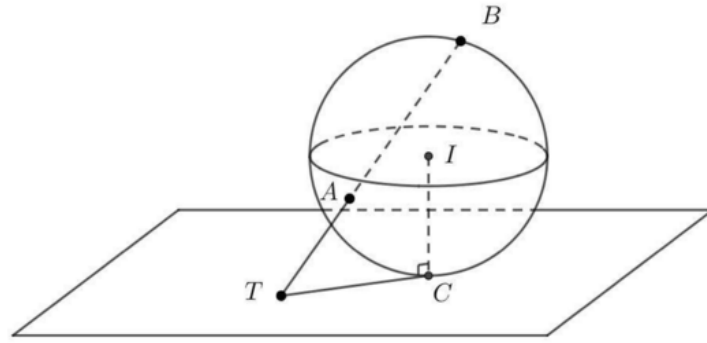
$$IA = ID \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow S = -1$$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$, $A(0; 0; 4), B(3; 1; 2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r . Tính bán kính r của đường tròn đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.



Ta có $\vec{AB}(3;1;-2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Phương trình tham số của đường thẳng AB là
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

Giả sử AB cắt (P) tại $T(3t; t; 4 - 2t)$. Do $T \in (P): 2x + y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-7}{3}$.

Khi đó

$$T\left(-7; \frac{-7}{3}; \frac{26}{3}\right); \vec{TA}\left(7; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right) \Rightarrow TA = \frac{7\sqrt{14}}{3}; \vec{TB}\left(10; \frac{10}{3}; -\frac{20}{3}\right) \Rightarrow TB = \frac{10\sqrt{14}}{3}$$

Ta có $TC^2 = TA \cdot TB = \frac{980}{9} \Rightarrow TC = \frac{14\sqrt{5}}{3}$

Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và cách điểm T cố định một khoảng $\frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

Cách 2:

Ta có $\frac{TA}{TB} = \frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{7}{10}; AB = \sqrt{14}$

Giả sử AB cắt (P) tại T . Suy ra A nằm giữa B và T (vì A, B cùng phía so với (P)).

Khi đó ta có

$$\begin{cases} TB - TA = \sqrt{14} \\ TA = \frac{7}{10}TB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TA = \frac{7\sqrt{14}}{3} \\ TB = \frac{10\sqrt{14}}{3} \end{cases} \Rightarrow TC^2 = TA \cdot TB = \frac{980}{9} \Rightarrow TC = \frac{14\sqrt{5}}{3}$$

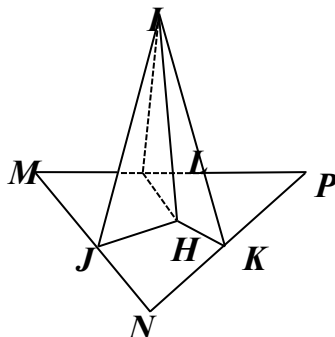
Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6; 0; 0)$, $N(0; 6; 0)$, $P(0; 0; 6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0$ cắt

nhau theo đường tròn (C) . Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN , NP , PM ?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: Vô số.



Nếu điểm $A(x; y; z)$ thuộc (C) thì

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y - z = 0$$

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) chứa đường tròn (C) là $3x - 2y - z = 0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $x + y + z - 6 = 0$.

Gọi I là tâm mặt cầu thỏa bài toán, H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (MNP) , J , K , L lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng MN , NP , PM . Ta có $IJ = IK = IL \Rightarrow HJ = HK = HL$.

Suy ra I thuộc đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) .

Hình chóp $O.MNP$ là hình chóp đều nên đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP và vuông góc với mặt phẳng (MNP) cũng chính là đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (MNP) .

Phương trình đường thẳng d là $x = y = z$.

Dễ thấy $d \subset (\alpha)$ suy ra mọi điểm thuộc d đều là tâm của một mặt cầu thỏa bài toán. Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN , NP , PM .

Câu 24. Trong không gian cho mặt phẳng $(P): x - z + 6 = 0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z + 7 = 0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu

(S_1) , (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

Trả lời:

Lời giải

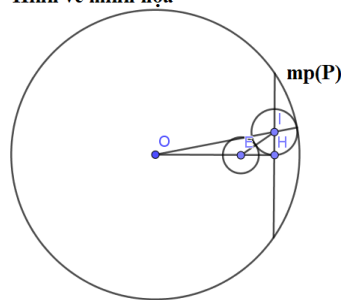
Đáp án: $\frac{7}{9}\pi$

Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1 = 5$. Mặt cầu (S) có tâm $E(-2;0;2)$ bán kính $R_2 = 1$.

Ta có $d(O, (P)) = \frac{6}{\sqrt{2}} < R_1$ và $d(E, (P)) = \sqrt{2} > R_2$, $OE = 2\sqrt{2}$, $OE + R_2 < R_1$ nên mặt cầu (S_2) nằm trong mặt cầu (S_1) . Như vậy mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với cả (S_1) và (S_2) thì (S) tiếp xúc trong mặt cầu (S_1) và tiếp xúc ngoài với (S_2) . Gọi R là bán kính của (S) khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} OI + R = R_1 \\ EI - R = R_2 \end{cases} \Rightarrow OI + EI = R_1 + R_2 \Rightarrow OI + EI = 6$$

Hình vẽ minh họa



Nhận xét: $\vec{OE} = (-2; 0; 2)$ nên OE vuông góc với $(P): x - z + 6 = 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P) , đặt $IH = x$, điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có $OI + EI = 6$

$$\Leftrightarrow \sqrt{OH^2 + HI^2} + \sqrt{EH^2 + HI^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{18 + x^2} + \sqrt{2 + x^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Vậy điểm I thuộc đường tròn tâm H bán kính $r = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn

là: $S = \pi r^2 = \frac{7\pi}{9}$

DẠNG 3

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

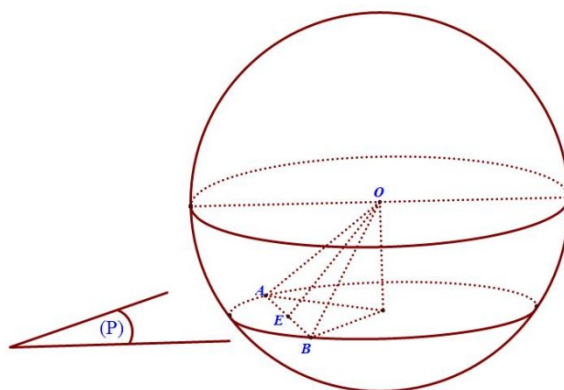
B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R=2$. Tam giác OAB là tam giác đều có cạnh bằng 2. Gọi

M là trung điểm AB ta có $OM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, mặt khác $\overrightarrow{OE}(1;1;1) \Rightarrow OE = \sqrt{3}$. Vậy điểm M trùng điểm E . Gọi u là vector chỉ phương của Δ ta có: $u \perp \overrightarrow{OE}$ và $u \perp n$ (với $n(1;-3;5)$ là vector pháp tuyến của (P) vì $\Delta \subset (P)$).

$[n, \overrightarrow{OE}] = (-8; 4; 4)$, chọn $\vec{u} = -\frac{1}{4}[n, \overrightarrow{OE}] = (2; -1; -1)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua E , có vector chỉ phương $u(2; -1; -1)$ có phương trình là:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$

Câu 26. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z = 0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H . Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Có $A(1;1;1), B(2;2;1) \Rightarrow$ Phương trình AB:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Gọi K là giao điểm của AB và $(P) \Rightarrow K(-1; -1; 1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H .

$\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow KH^2 = \overline{KA} \cdot \overline{KB} = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$ không đổi

$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

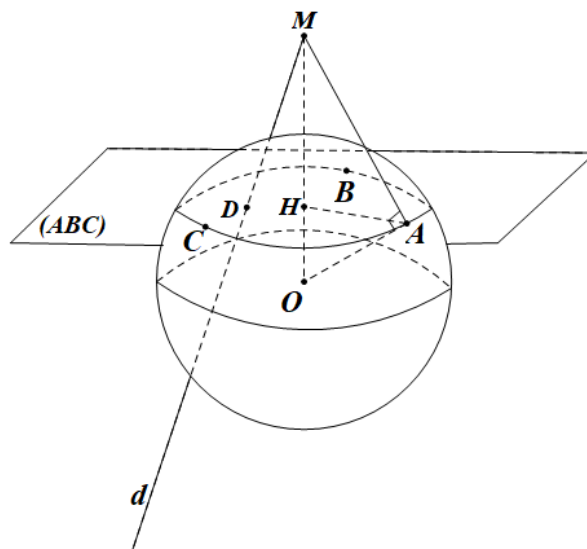
$$M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \text{ Ba}$$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm M phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

- A. 30. B. 26. C. 20. D. 21.

Lời giải

Chọn B



$$M(x_0; y_0; z_0) \in d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 4 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

* Ta có:

* Mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow$ tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = 3$.

* MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu $\Rightarrow MO \perp (ABC)$.

$\Rightarrow (ABC)$ đi qua $D(1; 1; 2)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}(x_0; y_0; z_0)$ có phương trình dạng:
 $x_0(x - 1) + y_0(y - 1) + z_0(z - 2) = 0$

* MA là tiếp tuyến của mặt cầu tại $A \Rightarrow \Delta MOA$ vuông tại $A \Rightarrow OH \cdot OM = OA^2 = R^2 = 9$.

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC) ($OH + OM = HM$), ta có:

$$d(O; (ABC)) = OH = \frac{|x_0 - y_0 - 2z_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} = \frac{|x_0 + y_0 + z_0 + z_0|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} = \frac{|z_0 + 4|}{OM} \Rightarrow OH \cdot OM = |z_0 + 4|$$

$$\Rightarrow |z_0 + 4| = 9 \Leftrightarrow z_0 = 5 \vee z_0 = -13$$

* Với $z_0 = 5 \Rightarrow M(0; -1; 5) \Rightarrow T = 26$ nhận do: $OM = \sqrt{26}; OH = \frac{|z_0 + 4|}{OM} = \frac{9}{\sqrt{26}}$;

$$pt(ABC): -y + 5z - 9 = 0 \Rightarrow MH = d(M; (ABC)) = \frac{17}{\sqrt{26}}$$

$$\Rightarrow OH + HM = OM$$

* Với $z_0 = -13 \Rightarrow M(6; 11; -13) \Rightarrow$ loại do: $OM = \sqrt{326}; OH = \frac{9}{\sqrt{326}}$;

$$(ABC): 6x + 11y - 13z + 9 = 0 \Rightarrow MH = d(M; (ABC)) = \frac{335}{\sqrt{326}}$$

$$\Rightarrow OH + HM \neq OM$$

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và

đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$

B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$

C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$

D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = 1$.

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (1; 1; -1)$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d , ta có $K(t; 2+t; -t) \Rightarrow \overline{IK} = (t-1; 2+t; -t+1)$.

Vì $IK \perp d$ nên $\overline{u_d} \cdot \overline{IK} = 0 \Leftrightarrow t-1+2+t-(-t+1)=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow \overline{IK} = (-1; 2; 1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng IK là
$$\begin{cases} x = 1-t' \\ y = 2t' \\ z = -1+t' \end{cases}$$

Khi đó, trung điểm H của TT' nằm trên IK nên $H(1-t'; 2t'; -1+t') \Rightarrow \overline{IH} = (-t'; 2t'; t')$. Mặt khác, ta có:

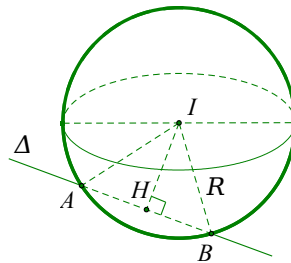
$$\overline{IH} \cdot \overline{IK} = |\overline{IT}|^2 \Leftrightarrow \overline{IH} \cdot \overline{IK} = 1 \Leftrightarrow t'+4t'+t'=1 \Leftrightarrow t'=\frac{1}{6} \Rightarrow H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right).$$

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2$. Phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2-t \\ z = 1-t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -3+t \\ z = 5+t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D



$(S): x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow$ Tâm $I(0;0;0)$; bán kính $R=2$.

$(P): x-3y+5z-3=0 \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của $(P): n_P = (1; -3; 5)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta \Rightarrow AH=BH=\frac{AB}{2}=1$.

Xét $\triangle IAH$ vuông tại $H \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Mặt khác ta có $\overline{IE} = (1;1;1) \Rightarrow IE = \sqrt{3} = IH \Rightarrow H \equiv E \Rightarrow IE \perp \Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;1;1)$; vuông góc với IE và chứa trong (P) nên:

Vectơ chỉ phương của $\Delta: n_\Delta = [n_P; \overline{IE}] = (-8; 4; 4)$.

$\Rightarrow$ vectơ $u = (2; -1; -1)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ .

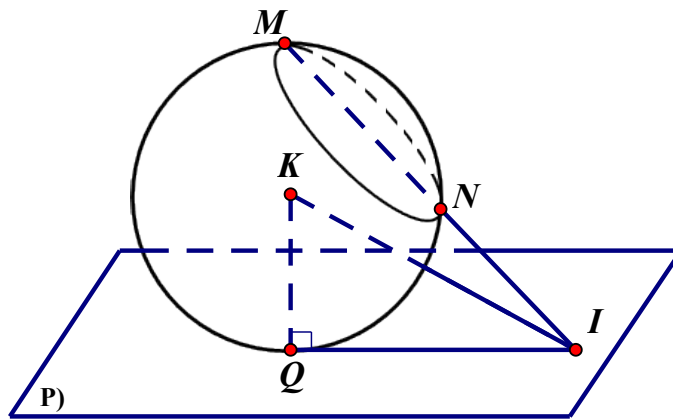
Phương trình đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $M(1; 1; 1)$, $N(-3; -3; -3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q . Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

- A. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$. B. $R = 6$. C. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$. D. $R = 4$.

Lời giải

Chọn B



$$MN: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

* Đường thẳng MN có phương trình là:

* Gọi $I = MN \cap (P)$ khi đó tọa độ điểm I ứng với t thỏa mãn:

$$1 + t + 1 + t - 1 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow I(3; 3; 3) \Rightarrow IM = 2\sqrt{3}, IN = 6\sqrt{3}$$

* Do mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với đường thẳng IQ tại điểm Q nên ta có:

$$IQ^2 = IM \cdot IN = KI^2 - R^2 \Rightarrow IQ^2 = IM \cdot IN = 36 \Leftrightarrow IQ = 6$$

Vậy Q luôn thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = 6$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và mặt cầu

$(S): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-2} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z + 1}{2}$. Cho các phát biểu sau đây:

I. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

II. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

III. Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

IV. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại một điểm.

Số phát biểu đúng là:

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 0)$, bán kính $R=3$.

$$d: \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Phương trình tham số của đường thẳng

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow 9t^2 + 2t - 6 = 0 \quad (1)$$

Xét hệ phương trình

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt nên d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt.

$$d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + 0 + 3|}{3} = \frac{11}{3} > R \Rightarrow (P) \text{ và } (S) \text{ không có điểm chung.}$$

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Xét hệ phương trình $2x - 2y + z + 3 = 0$. d cắt (P) tại một điểm.

Vậy có 3 phát biểu đúng.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3^2$, mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ và điểm $N(1; 0; -4)$ thuộc (P) . Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong (P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=4$. Gọi $u(1; b; c)$, $(c > 0)$ là một vectơ chỉ phương của Δ , tổng $b+c$ bằng

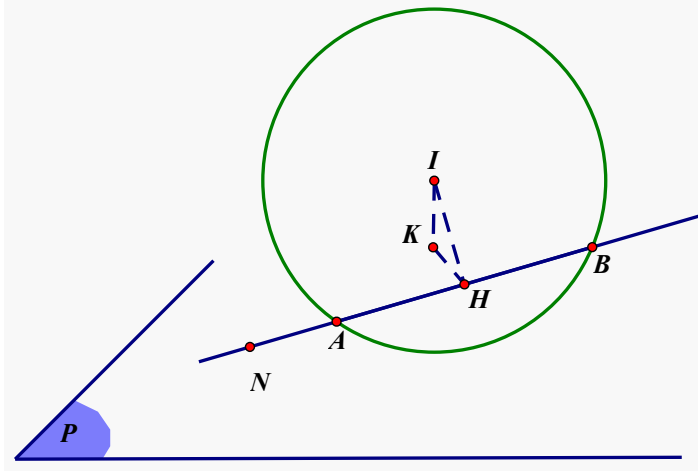
A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. 45.

Lời giải



Chọn D

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ bán kính $R=3$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

Suy ra H là trung điểm của đoạn AB nên $AH = 2 \Rightarrow d(I, \Delta) = IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5}$ và

$$IK = d(I, (P)) = \frac{|1 - 2 + 1 + 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} IK \perp (P) \\ \Delta \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow IK \perp \Delta$$

Ta có $\Delta \subset (P)$ mà $IH \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp KH$

$$\text{hay } KH = d(K, \Delta) \text{ và } KH = \sqrt{IH^2 - IK^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Do } IK \perp (P) \text{ nên phương trình tham số đường thẳng } IK: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow K(1+t; 2-t; 1+t)$$

$$\text{Mà } K \in (P) \Rightarrow 1+t - 2+t + 1+t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow K(0; 3; 0)$$

$$KH = d(K, \Delta) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{KN}, \vec{u} \right] \right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{(4b-3c)^2 + (-c-4)^2 + (b+3)^3}}{\sqrt{1+b^2+c^2}} = \sqrt{2}$$

Từ đây ta có (*)

$$\text{Mặt khác ta có } \Delta \subset (P) \Rightarrow u \perp \vec{n}_P \Rightarrow u \cdot \vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow 1 - b + c = 0 \Leftrightarrow b = c + 1$$

Thay vào (*) ta được

$$\sqrt{(c+4)^2 + (-c-4)^2 + (c+4)^3} = \sqrt{2} \sqrt{1+(c+1)^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow 3c^2 - 24c + 48 = 4c^2 + 4c + 4$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 20c - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 22(N) \\ c = -2(L) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } b = 23 \Rightarrow b + c = 45$$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 14$ và mặt phẳng $(\alpha): x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α) , cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) . Vector nào sau đây là vector chỉ phương của Δ ?

- A. $u = (4; -2; 1)$. B. $v = (2; 0; -1)$. C. $\vec{m} = (-3; 1; 0)$. D. $n = (1; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.

Ta có $d(I, (\alpha)) = \sqrt{14} = R \Rightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với (S) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(\alpha) \Rightarrow H(1; 0; 2)$

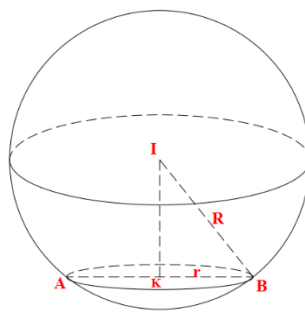
Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A(a; 0; 0)$ và $\vec{AH} = (a-1; 0; -2)$

Đường thẳng Δ nằm trong (α) , cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) nên $\vec{AH} \perp \vec{n}_\alpha$. Tức là $a-1+0-4=0 \Leftrightarrow a=5 \Rightarrow \vec{AH} = (4; 0; -2)$ cùng phương với $v = (2; 0; -1)$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

- A. $K(3; -2; 1)$, $r=10$. B. $K(-1; 2; 3)$, $r=8$. C. $K(1; -2; 3)$, $r=8$. D. $K(1; 2; 3)$, $r=6$.

Lời giải



• Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$; $R=10$.

• Khoảng cách từ I đến (P) là $IK = d(I; (P)) = \frac{|6+4-1+9|}{3} = 6$.

- Đường thẳng qua $I(3; -2; 1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ khi đó Tọa độ

tâm K là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-1; 2; 3)$

- Bán kính: $r = \sqrt{R^2 - IK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B . Tính OA biết $AB = 4$.

- A.** $OA = \sqrt{11}$ **B.** $OA = 5$ **C.** $OA = 3$ **D.** $OA = \sqrt{6}$

Lời giải

Chọn A

$$d(I; (P)) = \frac{|5 - 2(-3) + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 6$$

Khoảng cách từ điểm I đến mp(P) là:

AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B, do đó ta có:

$$IA = \sqrt{IB^2 + AB^2} = \sqrt{R^2 + AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4^2} = 6 = d(I; (P)) \Rightarrow A \text{ là hình chiếu của I lên } (P)$$

Đường thẳng IA đi qua $I(5; -3; 5)$ có VTCP $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; -2; 2)$ có phương trình $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

$$\text{Có } A = IA \cap (P) \Rightarrow 5 + t - 2(-3 - 2t) + 2(5 + 2t) - 3 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow A(3; 1; 1) \Rightarrow OA = \sqrt{11}$$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc

$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

- A.** 30 **B.** 26 **C.** 20 **D.** 21

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính R . Gọi $M(1 + t_0; 1 + 2t_0; 2 - 3t_0) \in d$.

Giả sử $T(x; y; z) \in (S)$ là một tiếp điểm của tiếp tuyến MT với mặt cầu (S) . Khi đó $OT^2 + MT^2 = OM^2$
 $\Leftrightarrow 9 + [x - (1 + t_0)]^2 + [y - (1 + 2t_0)]^2 + [z - (2 - 3t_0)]^2 = (1 + t_0)^2 + (1 + 2t_0)^2 + (2 - 3t_0)^2$
 $\Leftrightarrow (1 + t_0)x + (1 + 2t_0)y + (2 - 3t_0)z - 9 = 0$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $(1 + t_0)x + (1 + 2t_0)y + (2 - 3t_0)z - 9 = 0$

Do $D(1; 1; 2) \in (ABC)$ nên $1 + t_0 + 1 + 2t_0 + 2 \cdot (2 - 3t_0) - 9 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1 \Rightarrow M(0; -1; 5)$

Vậy $T = 0^2 + (-1)^2 + 5^2 = 26$

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(0; 0; 3), B(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 8 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (α) sao cho tam giác ABC đều?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. Vô số.

Lời giải

Gọi (P) mặt phẳng trung trực của AB , khi đó phương trình của (P) là: $x + z - 1 = 0$.

Ta có $\vec{n_P} = (1; 0; 1), \vec{n_\alpha} = (2; -1; 2)$ nên $\left[\vec{n_P}, \vec{n_\alpha} \right] = (1; 0; -1)$

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (α) . Chọn $\vec{u_d} = (1; 0; -1)$

và điểm $M(1; 10; 0) \in d$ nên phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 10 \\ z = -t \end{cases}$

Do tam giác ABC đều nên $CA = CB$ hay C thuộc mặt phẳng trung trực của AB mà $C \in (\alpha)$ nên $C \in (P) \cap (\alpha) = d$ suy ra tọa độ C có dạng $C(1 + t; 10; -t)$.

Do $\triangle ABC$ đều nên $AC = AB$, thay tọa độ các điểm ta có:

$$\sqrt{(1 + t - 0)^2 + (10 - 0)^2 + (-t - 3)^2} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (1 - 3)^2} \Leftrightarrow t^2 + 4t + 51 = 0(*)$$

Do phương trình $(*)$ vô nghiệm nên không tồn tại điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 3; 9)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ

diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

- A. 39. B. $12\sqrt{3}$. C. 18. D. $28\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

+) Đặt $M(a; 0; 0)$ và $N(0; 0; b)$

Nhận xét: (S) tiếp xúc (Oxz) mà $MN \subset (Oxz)$ tiếp xúc (S)

$\Rightarrow MN$ tiếp xúc (S) tại tiếp điểm của (S) và $(Oxz) \Rightarrow A(1;0;9)$

$$+) \begin{cases} \overline{AM} = (a-1; 0; -9) \\ \overline{AN} = (-1; 0; b-9) \end{cases} \Rightarrow \frac{a-1}{-1} = \frac{-9}{b-9} \Rightarrow (a-1)(b-9)=9$$

+) Khi đó $OIMN$ có $\triangle OMN$ vuông tại O , $(IMN) \perp (OMN)$ (do $IA \subset (IMN)$, $IA \perp (OMN)$)

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$ bằng $\frac{13}{2}$

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot MN = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4 \cdot \frac{13}{2}} \Leftrightarrow IM \cdot IN = 39 \quad (1)$$

Suy ra:

$$\text{Mà } IM = \sqrt{(a-1)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 90}$$

$$IN = \sqrt{1^2 + 3^2 + (b-9)^2} = \sqrt{10 + \frac{81}{(a-1)^2}}$$

Thay vào (1) ta được: $\left[(a-1)^2 + 90 \right] \left[10 + \frac{81}{(a-1)^2} \right] = 1521 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 27$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AM = \sqrt{(a-1)^2 + 81} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \\ AN = \sqrt{1 + (b-9)^2} = \sqrt{1+3} = 2 \end{cases} \Rightarrow AM \cdot AN = 12\sqrt{3}$$

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4;1;2)$ bán kính bằng 2. Gọi $M; N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox; Oy$ sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

- A. $6\sqrt{2}$ B. 14 C. 8 D. $9\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A.

Cách 1:

Ta có: $d(I, (Oxy)) = 2$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4;1;0)$, đồng thời đường thẳng MN tiếp xúc với (S) cũng tại điểm $A(4;1;0)$ do $MN \subset (Oxy)$

Gọi $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $m, n > 0$

$$\text{Do } A \in MN \text{ nên } \overline{AM} = k \overline{AN} \Rightarrow \begin{cases} m-4 = -4k \\ -1 = k(n-1) \end{cases} \Rightarrow (m-4)(n-1) = 4 \Leftrightarrow m = \frac{4n}{n-1}, n-1 \neq 0$$

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $OI : 4x + y + 2z - \frac{21}{2} = 0$

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $OM : x = \frac{m}{2}$

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn $ON : y = \frac{n}{2}$

Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là $J\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}; \frac{-n^2 + 6n - 21}{4n - 4}\right)$

Theo giả thuyết cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$ nên $OJ = \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow OJ^2 = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n^2}{(n-1)^2} + \frac{n^2}{4} + \frac{(n^2 - 6n + 21)^2}{16(n-1)^2} = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow n^4 - 4n^3 - 10n^2 + 28n + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

Vì $n > 0$ nên chọn $n = 1 + 2\sqrt{2}$, suy ra $m = 4 + \sqrt{2}$

Khi đó $AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Dễ thấy mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4;1;0)$, đồng thời đường thẳng MN tiếp xúc với (S) cũng tại điểm $A(4;1;0)$ do $MN \subset (Oxy)$

Gọi $M(a;0;0)$; $N(0;b;0)$.

Do $A \in MN$ nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN} \Rightarrow \begin{cases} a - 4 = -4k \\ -1 = k(b - 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1$.

Gọi J là trung điểm $MN \Rightarrow J\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$ và $I(4;1;2)$ thuộc đường thẳng Δ vuông góc với (Oxy) tại điểm

$$J. \text{ Phương trình } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là điểm $K\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; t\right)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1 \\ OK = \frac{7}{2} \\ IK = \frac{7}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1 \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \\ \left(\frac{a}{2} - 4 \right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 1 \right)^2 + (t - 2)^2 = \frac{49}{4} \end{array} \right.$$

Theo giả thiết ta có hệ:

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{4b}{b-1} \\ 4a + b + 4t - 21 = 0 \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{4b}{b-1} \\ t = \frac{b^2 - 6b + 21}{4(b-1)} \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{4} + \frac{4b^2}{(b-1)^2} + \frac{(b^2 - 6b + 21)^2}{16(b-1)^2} = \frac{49}{4} \Leftrightarrow 4b^2 + 64 \left(1 + \frac{1}{b-1} \right)^2 + \left(b - 5 + \frac{16}{b-1} \right)^2 = 196$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 + 64 + \frac{128}{b-1} + \frac{64}{(b-1)^2} + (b-5)^2 + 32(b-5) \cdot \frac{1}{b-1} + \frac{256}{(b-1)^2} = 196$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 10b + 25 + \frac{320}{(b-1)^2} + 32(b-5+4) \cdot \frac{1}{b-1} = 132 \Leftrightarrow (b-1)^2 + \frac{64}{(b-1)^2} = 16$$

$$\Leftrightarrow \left[(b-1)^2 - 8 \right]^2 = 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 8 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 1 - 2\sqrt{2} \\ b = 1 + 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Với $b = 1 - 2\sqrt{2}$ ta được $a = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

Với $b = 1 + 2\sqrt{2}$ ta được $a = 4 + \sqrt{2} \Rightarrow AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

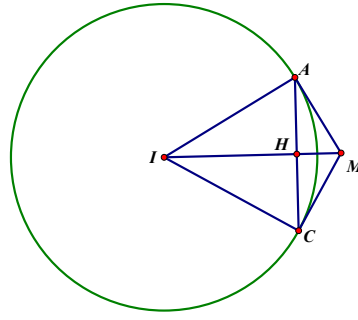
Câu 40. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và

đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Điểm $M(a; b; c), (a > 0)$ nằm trên đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) và $\angle AMB = 60^\circ$, $\angle BMC = 60^\circ$, $\angle CMA = 120^\circ$. Tính $a^3 + b^3 + c^3$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 13} = 3\sqrt{3}$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (ABC) và mặt cầu (S) .

Đặt $MA = MB = MC = x$ khi đó $AB = x; BC = x\sqrt{2}; CA = x\sqrt{3}$ do đó tam giác ABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn (C) và H, I, M thẳng hàng.

Vì $\angle AMC = 120^\circ$ nên tam giác AIC đều do đó $x\sqrt{3} = R \Leftrightarrow x = 3$ suy ra $IM = 2AM = 2x = 6$.

Lại có $M \in d$ nên $M(-1+t; -2+t; 1+t), (t > 1)$ mà $IM = 6$ nên $(t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}$$

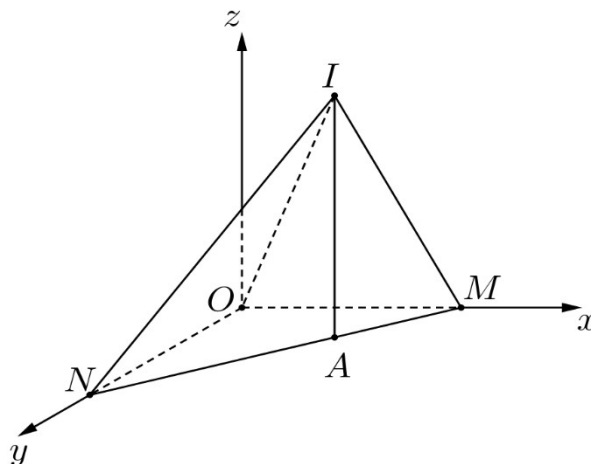
Mà $a > 0$ nên $t = \frac{4}{3}$ suy ra $H\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ nên $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{112}{9}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1; 4; 2)$, bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , tính giá trị $AM \cdot AN$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$



Gọi $M(a;0;0) \in Ox$, $N(0;b;0) \in Oy$

Ta có $d(I; (Oxy)) = 2 = R$ nên (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(1;4;0)$ và MN cũng đi qua A .

Lại có $\overrightarrow{AM} = (a-1; -4; 0)$, $\overrightarrow{AN} = (-1; b-4; 0)$ và 3 điểm A, M, N thẳng hàng nên ta được:

$$\frac{a-1}{-1} = \frac{-4}{b-4} \Leftrightarrow (a-1)(b-4) = 4 \quad (1)$$

Tứ diện $OIMN$ có $IA \perp (OMN)$ và $\triangle OMN$ vuông tại O nên nếu gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ thì $J \in (IMN)$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$.

Ta có $S_{\triangle IMN} = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4r}$ (với $r = \frac{7}{2}$ bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$).

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} IA \cdot MN = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4 \cdot \frac{7}{2}} \Leftrightarrow IM \cdot IN = 7IA \Leftrightarrow IM \cdot IN = 14$$

$$\Leftrightarrow [(a-1)^2 + 20][(b-4)^2 + 5] = 196 \quad (2)$$

Đặt $\begin{cases} m = a-1 \\ n = b-4 \end{cases}$

$$\begin{cases} mn = 4 \\ (m^2 + 20)(n^2 + 5) = 196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{4}{m} \\ (m^2 + 20)\left(\frac{16}{m^2} + 5\right) = 196 \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ

Từ (4) ta được: $(m^2 + 20)(16 + 5m^2) = 196m^2$

$$\Leftrightarrow 5m^4 - 80m^2 + 320 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \sqrt{2} \\ n = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} a = 1 + 2\sqrt{2}, b = 4 + \sqrt{2} \\ a = 1 - 2\sqrt{2}, b = 4 - \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy $AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) tâm $I(9;3;1)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc 2 trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , Tính giá trị $AM \cdot AN$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $AM \cdot AN = 12\sqrt{3}$

$I(9; 3; 1) \Rightarrow d(I(Oxz)) = 3 = R \Rightarrow (S)$ tiếp xúc với (Oxz) .

Gọi $M(a; 0; 0) \in Ox$

$N(0; 0; b) \in Oz$

MN tiếp xúc với (S) tại A nên A là hình chiếu của I lên (Oxz) .

Suy ra $A(9; 0; 1)$.

Gọi K là trung điểm $MN \Rightarrow K\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{b}{2}\right)$.

Gọi H là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN \Rightarrow OH = \frac{13}{2} \Rightarrow HK \perp MN$.

Gọi T là trung điểm $OM \Rightarrow \left. \begin{array}{l} OM \perp KT \\ OM \perp HT \end{array} \right\} \Rightarrow OM \perp (KHT) \Rightarrow OM \perp HK \Rightarrow HK \perp (OMN)$

Mà $IA \perp (OMN) \Rightarrow HK \parallel IA$.

Ta có $\vec{AI} = (0; 3; 0)$

$\vec{KH} = \left(x_H - \frac{a}{2}; y_H - 0; z_H - \frac{b}{2}\right)$.

$\vec{AI}$ cùng phương $\vec{KH}$ nên $\begin{cases} x_H = \frac{a}{2} \\ y_H = c \ (c \neq 0) \\ z_H = \frac{b}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow H\left(\frac{a}{2}; c; \frac{b}{2}\right)$

$$OH = \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} + c^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{169}{4} \quad (1)$$

$$HI = OH = \frac{13}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2} - 9\right)^2 + (c - 3)^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 = \frac{169}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2}{4} + c^2 + \frac{b^2}{4} = \left(\frac{a}{2} - 9\right)^2 + (c - 3)^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2$

$$\Rightarrow 9a + b + 6c = 91 \quad (3)$$

$\vec{AM} = (a - 9; 0; -1)$

$\vec{AN} = (-9; 0; b - 1)$

$$A, M, N \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{a-9}{-9} = \frac{-1}{b-1}$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(b-1)=9$$

$$\Leftrightarrow ab - a - 9b + 9 = 9$$

$$\Leftrightarrow ab - a - 9b = 0$$

$$\Leftrightarrow a(b-1) = ab$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{9b}{b-1}$$

$$(3) \Rightarrow 9 \cdot \frac{9b}{b-1} + b + 6c = 91$$

Từ

$$\frac{81b}{b-1} + b + 6c = 91$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + 80b}{b-1} + 6c = 91 \Leftrightarrow 6c = 91 - \frac{b^2 + 80b}{b-1} = \frac{-b^2 + 11b - 91}{b-1}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-b^2 + 11b - 91}{6(b-1)}$$

$$\text{Ta có } a^2 + 4c^2 + b^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9b}{b-1} \right)^2 + 4 \left(\frac{-b^2 + 11b - 91}{6(b-1)} \right)^2 + b^2 = 169$$

$$\Leftrightarrow 9.81b^2 + (b^4 + 121b^2 + 8281 - 22b^3 + 182b^2 - 2002b) + 9b^2(b-1)^2 = 169.9.(b-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 729b^2 + b^4 + 121b^2 + 8281 - 22b^3 + 182b^2 - 2002b + 9b^4 - 18b^3 + 9b^2 = 1521b^2 - 3042b + 1521$$

$$\Leftrightarrow 10b^4 - 40b^3 - 480b^2 + 1040b + 6760 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=1+3\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{9(1+3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} = 9+\sqrt{3} \\ b=1-3\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{9(1-3\sqrt{3})}{-3\sqrt{3}} = 9-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$+ \text{ Trường hợp 1: } a=9+\sqrt{3}; b=1+3\sqrt{3} \Rightarrow \overline{AM} = (\sqrt{3}; 0; -1) \Rightarrow AM = 2$$

$$\Rightarrow \overline{AN} = (-9; 0; 3\sqrt{3}) \Rightarrow AN = \sqrt{108}$$

$$AM \cdot AN = 2 \cdot \sqrt{108} = 12\sqrt{3}$$

$$+ \text{ Trường hợp 2: } a=9-\sqrt{3}; b=1-3\sqrt{3} \Rightarrow \overline{AM} = (-\sqrt{3}; 0; -1) \Rightarrow AM = 2$$

$$\Rightarrow \overline{AN} = (-9; 0; -3\sqrt{3}) \Rightarrow AN = \sqrt{108}$$

$$AM \cdot AN = 2 \cdot \sqrt{108} = 12\sqrt{3}$$

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu: $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 + (m+2)x + 2my - 2mz - m - 3 = 0$. Biết rằng với mọi số thực m thì (S_m) luôn chứa một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Mặt cầu (S_m) có tâm $I\left(-\frac{m+2}{2}; -m; m\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{9m^2 + 8m + 16}}{2}$.

Với m_1, m_2 tùy ý và khác nhau, ta được hai phương trình mặt cầu tương ứng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + (m_1 + 2)x + 2m_1y - 2m_1z - m_1 - 3 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + (m_2 + 2)x + 2m_2y - 2m_2z - m_2 - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, ta được:

$$(m_1 - m_2)x + 2(m_1 - m_2)y - 2(m_1 - m_2)z - (m_1 - m_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_1 - m_2)(x + 2y - 2z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 2z - 1 = 0 \quad (3)$$

Dễ thấy (3) là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Họ mặt cầu (S_m) có giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) cố định có phương trình: $x + 2y - 2z - 1 = 0$.

$$d = d[I, (P)] = \frac{\left| -\frac{m+2}{2} - 2m - 2m - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9m - 4|}{6}$$

Mặt khác, đặt

$$\Rightarrow r^2 = R^2 - d^2 = \frac{9m^2 + 8m + 16}{4} - \frac{(-9m - 4)^2}{36} = \frac{32}{9} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Vậy $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

$$\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ , điểm $M(1; 2; -1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 14z + 64 = 0$. Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt

đường thẳng Δ tại A , cắt mặt cầu tại B sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Lập phương trình mặt phẳng trung trực đoạn AB .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $2x - 4y - 4z - 43 = 0$

Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A suy ra tọa độ $A(3+a; -1-a; -2+a)$.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\vec{AM} = \pm \vec{AB}$$

Trường hợp 1:

$$3\vec{AM} = \vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2-a) = x-3-a \\ 3(3+a) = y+1+a \\ 3(1-a) = z+2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3-2a \\ y = 8+2a \\ z = 1-2a \end{cases} \text{ suy ra } B(-3-2a; 8+2a; 1-2a)$$

Do $B \in (S)$ nên

$$(-3-2a)^2 + (8+2a)^2 + (1-2a)^2 - 4(-3-2a) + 10(8+2a) + 14(1-2a) + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 + 40a + 244 = 0, \text{ phương trình vô nghiệm}$$

Trường hợp 2:

$$3\vec{AM} = -\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2-a) = -(x-3-a) \\ 3(3+a) = -(y+1+a) \\ 3(1-a) = -(z+2-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9+4a \\ y = -10-4a \\ z = -5+4a \end{cases}$$

Suy ra $B(9+4a; -10-4a; -5+4a)$

Do $B \in (S)$ nên

$$(9+4a)^2 + (-10-4a)^2 + (-5+4a)^2 - 4(9+4a) + 10(-10-4a) + 14(-5+4a) + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 48a^2 + 112a + 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Điểm B có hoành độ là số nguyên nên $B(5; -6; -9)$; $A(2; 0; -3)$.

AB đi qua trung điểm $I\left(\frac{7}{2}; -3; -6\right)$ và có một véc tơ pháp tuyến

Mặt phẳng trung trực đoạn

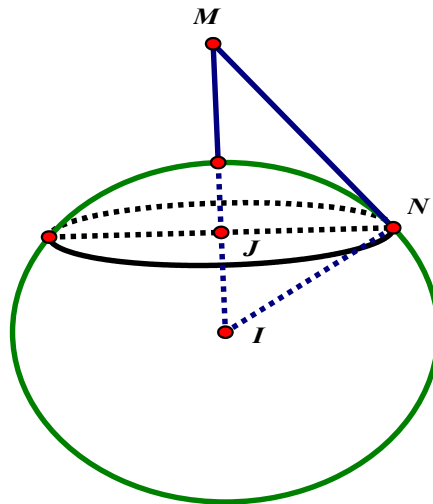
$$n = (-1; 2; 2) \text{ nên có phương trình } \left(x - \frac{7}{2}\right) - 2(y+3) - 2(z+6) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y - 4z - 43 = 0$$

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$, điểm $M(7;1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N . Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a,b,c)$. Gọi $k=2a-5b+10c$, tính giá trị của k .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $k=50$



Mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$ có tâm $I(-3;2;5)$, bán kính $R=6$.

Có $IM = \sqrt{25+16+4} = 3\sqrt{5} > 6 = R$, nên M thuộc miền ngoài của mặt cầu (S) .

Có MN tiếp xúc mặt cầu (S) tại N , nên $MN \perp IN$ tại N .

Gọi J là điểm chiếu của N lên MI .

Có $IN^2 = IJ \cdot IM$. Suy ra $IJ = \frac{IN^2}{IM} = \frac{36}{3\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ (không đổi), I cố định.

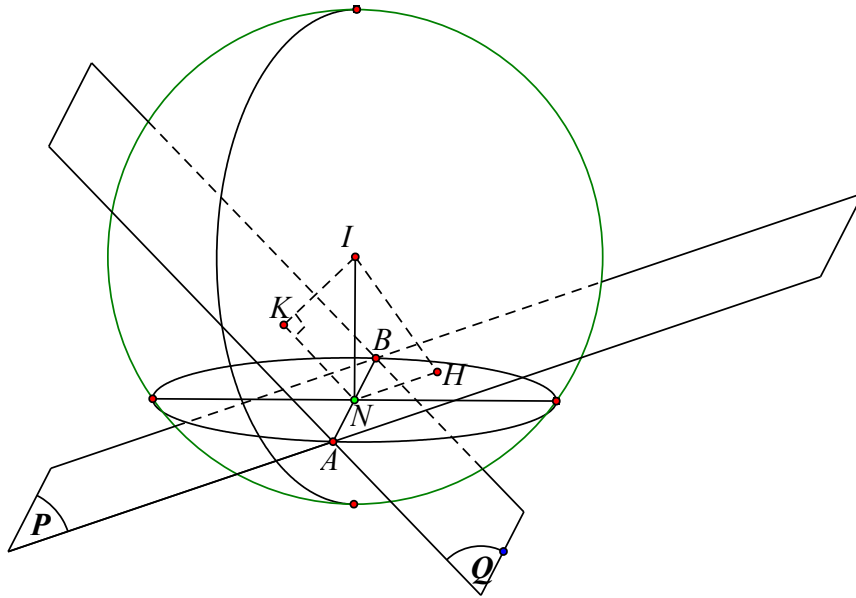
Suy ra N thuộc (P) cố định và mặt cầu (S) , nên N thuộc đường tròn (C) tâm J .

Gọi $N(x;y;z)$, có $\frac{IJ}{IM} = \frac{IJ}{IM} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} x+3=8 \\ y-2=-\frac{4}{5} \\ z-5=-\frac{2}{5} \end{cases}$
 $\Rightarrow N\left(5; \frac{6}{5}; \frac{23}{5}\right)$, $k=2a-5b+10c=50$. Vậy $k=50$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 7 = 0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + (1-2m)y + 4mz - 4 = 0$ và

Lời giải

Đáp án: $r = \sqrt{\frac{142}{15}}$



Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -2; 1)$, bán kính $R = 4$.

Đường thẳng $M(x; y) \in d_m$ thỏa
$$\begin{cases} x + (1 - 2m)y + 4mz - 4 = 0 \\ 2x + my - (2m + 1)z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + y - 2z - 20 = 0$$
 nên các giao điểm của (S) và d_m thuộc đường tròn giao tuyến giữa (S) và $(P): 5x + y - 2z - 20 = 0$.

$$d(I, (P)) = \frac{14}{\sqrt{30}} \quad \text{nên} \quad r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{4^2 - \frac{14^2}{30}} = \sqrt{\frac{142}{15}}$$