# CÁCH TÍNH SAI SỐ VÀ XỬ LÍ SỐ LIỆU

## I. Cơ sở lí thuyết

### 1. Định nghĩa phép tính về sai số

**Các khái niệm**

a. Phép đo trực tiếp: Đo một đại lượng vật lí có nghĩa là so sánh nó với một đại lượng cùng loại mà ta chọn làm đơn vị

b. Phép đo gián tiếp: Trường hợp giá trị của đại lượng cần đo được tính từ giá trị của các phép đo trực tiếp khác thông qua biểu thức toán học, thì phép đo đó là phép đo gián tiếp

**Phân loại sai số**

Khi đo một đại lượng vật lí, dù đo trực tiếp hay gián tiếp, bao giờ ta cũng mắc phải sai số. Người ta chia thành hai loại sai số như sau:

*a. Sai số hệ thống:*

Sai số hệ thống xuất hiện do sai sót của dụng cụ đo hoặc do phương pháp lí thuyết chưa hoàn chỉnh, chưa tính đến các yếu tố ảnh hưởng đến kết quả đo. Sai số hệ thống thường làm cho kết quả đo lệch về một phía so với giá trị thực của đại lượng cần đo. Sai số hệ thống có thể loại trừ được bằng cách kiểm tra, điều chỉnh lại các dụng cụ đo, hoàn chỉnh phương pháp lí thuyết đo, hoặc đưa vào các số hiệu chỉnh.

*b. Sai số ngẫu nhiên:*

Sai số ngẫu nhiên sinh ra do nhiều nguyên nhân, ví dụ do hạn chế của giác quan người làm thí nghiệm, do sự thay đổi ngẫu nhiên không lường trước được của các yếu tố gây ảnh hưởng đến kết quả đo. Sai số ngẫu nhiên làm cho kết quả đo lệch về cả hai phía so với giá trị thực của đại lượng cần đo. Sai số ngẫu nhiên không thể loại trừ được. Trong phép đo cần phải đánh giá sai số ngẫu nhiên.

### 2. Phương pháp xác định sai số của phép đo trực tiếp

*a) Phương pháp chung xác định giá trị trung bình và sai số ngẫu nhiên*

Giả sử đại lượng cần đo A được đo *n* lần. Kết quả đo lần lượt là $A_1, A_2, ... A_n$. Đại lượng

$$\overline{A} = \frac{A_1 + A_2 + .... + A_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n} \quad (1)$$

được gọi là giá trị trung bình của đại lượng A trong *n* lần đo. Số lần đo càng lớn, giá trị trung bình $\overline{A}$ càng gần với giá trị thực A. Các đại lượng:

$$\Delta A_1 = \left|\overline{A} - A_1\right|$$
$$\Delta A_2 = \left|\overline{A} - A_2\right|$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta A_n = \left|\overline{A} - A\right|_n$$

được gọi là sai số tuyệt đối trong mỗi lần đo riêng lẻ. Để đánh giá sai số của phép đo đại lượng A, người ta dùng sai số toàn phương trung bình. Theo lí thuyết xác suất, sai số toàn phương trung bình là: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta A_i)^2}{n(n-1)}}$ (2)

và kết quả đo đại lượng A được viết: $A = \overline{A} \pm \sigma$ (3)

Như vậy, giá trị thực của đại lượng A với một xác suất nhất định sẽ nằm trong khoảng từ $A - \sigma$ đến $A + \sigma$, nghĩa là:

$\overline{A}$ - $\sigma$ $\leq A \leq$ $\overline{A} + \sigma$

Khoảng [($\overline{A}$ -$\sigma$),($\overline{A} + \sigma$)] gọi là khoảng tin cậy. Sai số toàn phương trung bình $\sigma$ chỉ được dùng với các phép đo đòi hỏi độ chính xác cao và số lần đo *n* lớn. Nếu đo đại lượng A từ 5 đến 10 lần, thì ta dùng sai số tuyệt đối trung bình số học $\Delta A$ (sai số ngẫu nhiên) được định nghĩa như sau:

$$\Delta A = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|(\Delta A_i)\right|}{n} \quad (4)$$

Kết quả đo lúc này được viết dưới dạng: $A = \overline{A} \pm \Delta A$ (5)

Ngoài sai số tuyệt đối, người ta còn sử dụng sai số tỉ đối được định nghĩa như sau:

$$\delta = \frac{\Delta A}{\overline{A}}.100\% \quad (6)$$

Kết quả đo được viết như sau: $A = \overline{A} \pm \delta\%$ (7)

➢ ***Như vậy, cách viết kết quả phép đo trực tiếp như sau:***

- Tính giá trị trung bình $\overline{A}$ theo công thức (1)
- Tính các sai số $\Delta A$ theo công thức (4) hoặc (6).
- Kết quả đo được viết như (5) hoặc (7).

Ví dụ: Đo đường kính viên bi 4 lần, ta có kết quả sau:

$$d_1 = 8{,}75mm \quad \Delta d_1 = 0{,}00mm$$
$$d_2 = 8{,}76mm \quad \Delta d_2 = -0{,}01mm$$
$$d_3 = 8{,}74mm \quad \Delta d_3 = 0{,}01mm$$

$$d_4 = 8{,}77mm \quad \Delta d_4 = -0{,}02mm$$

Giá trị trung bình của đường kính viên bi là:

$$\overline{d} = \frac{8{,}75 + 8{,}76 + 8{,}74 + 8{,}77}{4} = 8{,}75mm$$

Sai số tuyệt đối trung bình tính được là

$$\Delta d = \frac{0{,}00 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}02}{4} = 0{,}01mm$$

Kết quả: $d = 8{,}75 \pm 0{,}01mm$

*b) Cách xác định sai số dụng cụ*

● Mỗi dụng cụ có một độ chính xác nhất định. Nếu dùng dụng cụ này để đo một đại lượng vật lí nào đó thì đương nhiên sai số nhận được không thể vượt quá độ chính xác của dụng cụ đó. Nói cách khác, sai số của phép đo không thể nhỏ hơn sai số dụng cụ.

● Tuy nhiên cũng vì một lí do nào đó, phép đo chỉ được tiến hành một lần hoặc độ nhạy của dụng cụ đo không cao, kết quả của các lần đo riêng lẻ trùng nhau. Trong trường hợp đó, ta phải dựa vào độ nhạy của dụng cụ để xác định sai số. Sai số $\Delta A$ thường được lấy bằng nửa giá trị của độ chia nhỏ nhất của dụng cụ.

● Khi đo các đại lượng điện bằng các dụng cụ chỉ thị kim, sai số được xác định theo cấp chính xác của dụng cụ.

*Ví dụ:* Vôn kế có cấp chính xác là 2. Nếu dùng thang đo 200V để đo hiệu điện thế thì sai số mắc phải là $\Delta U = 2\%.200 = 4V$.

Nếu kim chỉ thị vị trí 150 V thì kết quả đo sẽ là: $U = 150 \pm 4V$

● Khi đo các đại lượng điện bằng các đồng hồ đo hiện số, cần phải lựa chọn thang đo thích hợp.

- Nếu các con số hiển thị trên mặt đồng hồ là ổn định (con số cuối cùng bên phải không bị thay đổi) thì sai số của phép đo có thể lấy giá trị bằng tích của cấp chính xác và con số hiển thị.

*Ví dụ:* đồng hồ hiện số có ghi cấp sai số 1.0% rdg (kí hiệu quốc tế cho dụng cụ đo hiện số), giá trị điện áp hiển thị trên mặt đồng hồ là: U = 218 V

thì có thể lấy sai số dụng cụ là:

$$\Delta U = 1\%.218 = 2{,}18 \text{ V}$$

Làm tròn số ta có $U = 218{,}0 \pm 2{,}2$ V

- Nếu các con số cuối cùng không hiển thị ổn định (nhảy số), thì sai số của phép đo phải kể thêm sai số ngẫu nhiên trong khi đo.

*Ví dụ:* khi đọc giá trị hiển thị của điện áp bằng đồng hồ nêu trên, con số cuối cùng không ổn định (nhảy số): 215 V, 216 V, 217 V, 218 V, 219 V (số hàng đơn vị không ổn định). Trong trường hợp này lấy giá trị trung bình U = 217 V. Sai số phép đo cần phải kể thêm sai số ngẫu nhiên trong quá trình đo $\Delta U_n = 2$ V. Do vậy:

$$U = 217,0 \pm 2,2 \pm 2 = 217,0 \pm 4,2 \text{ V}$$

***Chú ý:***

- *Nhiều loại đồng hồ hiện số có độ chính các cao, do đó sai số phép đo chỉ cần chú ý tới thành phần sai số ngẫu nhiên.*
- *Trường hợp tổng quát, sai số của phép đo gồm hai thành phần: sai số ngẫu nhiên với cách tính như trên và sai số hệ thống (do dụng cụ đo)*

**3. Phương pháp xác định sai số gián tiếp**

*a) Phương pháp chung*

Giả sử đại lượng cần đo A phụ thuộc vào các đại lượng x, y, z theo hàm số $A = f(x, y, z)$ Trong đó x, y, z là các đại lượng đo trực tiếp và có giá trị

$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$
$$y = \overline{y} \pm \Delta y$$
$$z = \overline{z} \pm \Delta z$$

Giá trị trung bình $\overline{A}$ được xác định bằng cách thay thế các giá trị x, y, z vào hàm trên, nghĩa là $\overline{A} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

*b) Cách xác định cụ thể*

Sai số $\Delta A$ được tính bằng phương pháp vi phân theo một trong hai cách sau:

**Cách 1 (Đọc thêm)**

Cách này sử dụng thuận tiện khi hàm $f(x, y, z)$ là một tổng hay một hiệu (không thể lấy logarit dễ dàng). Cách này gồm các bước sau:

a. Tính vi phân toàn phần của hàm $A = f(x, y, x)$, sau đó gộp các số hạng có chứa vi phân của cùng một biến số.

b. Lấy giá trị tuyệt đối của các biểu thức đứng trước dấu vi phân $d$ và thay dấu vi phân $d$ bằng dấu $\Delta$. Ta thu được $\Delta A$.

c. Tính sai số tỉ đối (nếu cần).

*Ví dụ:* Một vật ném xiên góc $\alpha$ có độ cao $h = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$

Trong đó: $v_0 = 39,2 \pm 0,2 m/s$

$\alpha = 30 \pm 1^0$

$t = 2,0 \pm 0,2 s$

$g = 9,8 m/s^2$

Ta có: $\overline{h} = 39,2.\sin 30^0.2 - 9,8.\frac{2^2}{2} = 19,6 m$

$$dh = v_0 \sin\alpha.dt + v_0 \cos\alpha.d\alpha + \sin\alpha.t.dv_0 - g.t.dt$$

$$= (v_{0.} \sin\alpha - gt).dt + v_0.t\cos\alpha.d\alpha + \sin\alpha.t.dv_0$$

$$\Delta h = \left|\mathrm{v_0.sin - gt}\right|.\Delta t + \left|\mathrm{v_0.t.cos}\right|.\Delta\alpha + \left|\sin\alpha.t\right|.\Delta v_0$$

$$= \left|39{,}2.\sin 30^0 - 9.8.2\right|.0{,}2 + \left|39{,}2.2.\cos 30^0\right|.\frac{2\pi}{360} + \left|\sin 30^0.2\right|.0{,}2 = 1{,}38m$$

Sử dụng quy ước viết kết quả ở IV ta có: $h = 19{,}6 \pm 1{,}4m$

**Cách 2 (Đọc thêm)**

Sử dụng thuận tiện khi hàm $f(x, y, z)$ là dạng tích, thương, lũy thừa.... Cách này cho phép tính sai số tỉ đối, gồm các bước:

a. Lấy logarit cơ số e của hàm $A = f(x, y, z)$

b. Tính vi phân toàn phần hàm $\ln A = \ln f(x, y, z)$, sau đó gộp các số hạng có chưa vi phân của cùng một biến số.

c. Lấy giá trị tuyệt đối của biểu thức đứng trước dấu vi phân *d* và chuyển dấu *d* thành $\Delta$ ta có $\delta = \frac{\Delta A}{A}$

d. Tính $\Delta A = A.\delta$

*Ví dụ:* Gia tốc trọng trường được xác định bằng biểu thức: $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$

ở đây: $l = 500 \pm 1mm$

$T = 1{,}45 \pm 0{,}05s$

$\overline{g} = 9{,}78 \pm 0{,}20m/s^2$

Khi đó: $\ln g = \ln(4\pi^2 l) - \ln(T^2)$

$$\frac{dg}{\overline{g}} = \frac{d(4\pi^2 l)}{4\pi^2 l} - \frac{d(T^2)}{T^2} \Leftrightarrow \frac{dg}{\overline{g}} = \frac{d(4\pi^2)}{4\pi^2 l} + \frac{4\pi^2 dl}{4\pi^2 l} - 2\frac{dT}{T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta g}{\overline{g}} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{\overline{T}} \Rightarrow \Delta g = \overline{g}\left(\frac{\Delta l}{\overline{l}} + \frac{2\Delta T}{\overline{T}}\right)$$

**Bài tập rèn luyện**

Hãy tính công thức sai số tuyệt đối và sai số tương đối của các đại lượng đo gián tiếp sau:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} \text{ với } \begin{cases} v_0 = \overline{v}_0 \pm \Delta v_0 \\ t = \overline{t} \pm \Delta t \\ a = \overline{a} \pm \Delta a \end{cases}$$

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2} \text{ với } \begin{cases} m = \overline{m} \pm \Delta m \\ h = \overline{h} \pm \Delta h \\ v = \overline{v} \pm \Delta v \\ g = \text{constant} \end{cases}$$

### 4. Cách viết kết quả

*a) Các chữ số có nghĩa*

Tất cả các chữ số từ trái sang phải, kể từ số khác không đầu tiên đều là chữ số có nghĩa.

Ví dụ: 0,014030 có 5 chữ số có nghĩa.

*b) Quy tắc làm tròn số*

- Nếu chữ số ở hàng bỏ đi có giá trị $< 5$ thì chữ số bên trái nó vẫn giữ nguyên.

Ví dụ: $0,0731 \rightarrow 0,07$

- Nếu chữ số ở hàng bỏ đi có giá trị $\geq 5$ thì chữ số bên trái nó tăng thêm một đơn vị .

Ví dụ: $2,83745 \rightarrow 2,84$

*c) Cách viết kết quả*

- Sai số tuyệt đối $\Delta A$ và sai số trung bình đều được làm tròn theo quy tắc trên

- ***Khi viết kết quả, giá trị trung bình được làm tròn đến chữ số cùng hàng với chữ số có nghĩa của sai số tuyệt đối.***

Ví dụ:

Không thể viết $m = 2,83745 \pm 0,0731g$

mà phải viết $m = 2,84 \pm 0,07g$

hoặc là ta tính $\delta = \left(\frac{0,07}{2,84}\right).100\% = 2,464 = 2,464\%$

Ta có thể viết $m = (2,84 \pm 2,5.2,84\%)\ g$ . Nếu sai số lấy đến 1 chữ số có nghĩa thì

$$m = (2,84 \pm 0,07)\ g$$

Chú ý rằng khi viết kết quả cuối cùng, sai số toàn phần sẽ bằng tổng sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống: $\Delta_{TP} = \Delta_{NN} + \Delta_{HT}$

Ví dụ: Khi dùng thước kẹp để đo đường kính một sợi dây nhỏ, giả sử ta đo 5 lần, sai số ngẫu nhiên tính được là $\Delta d = 0,05mm$. Thước kẹp có độ chính xác $\delta = 0,02mm$ thì sai số toàn phần sẽ là $\Delta_{TP} = 0,05 + 0,02 = 0,07mm$.

Nếu sai số ngẫu nhiên nhỏ hơn sai số hệ thống thì ta bỏ qua sai số ngẫu nhiên đó (vì không thể đo được kết quả chính xác hơn cả cấp chính xác của dụng cụ đo). Trong trường hợp phép đo chỉ thực hiện một lần thì sai số toàn phần được lấy chính là sai số hệ thống (do dụng cụ đo).

## II. Nội dung thực hành

**Một số ví dụ về xử lí số liệu thực hành thí nghiệm.**

**1. Thí nghiệm xác định gia tốc trọng trường g bằng con lắc đơn.**

❖ **Cơ sở lý thuyết :**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$$

❖ Tiến hành:

- Đo l bằng thước đo có độ chia nhỏ nhất là mm nên có $\Delta = 0,5mm$.
- Đo chu kỳ T bằng đồng hồ bấm giây có sai số 0,02s sau mỗi lần 10 dao động.
- Lấy $\pi^2 \approx 10$

Kết quả đo

| Lần đo | L (mm) | t | T |
|---|---|---|---|
| 1 | 500 | 15 | 1,5 |
| 2 | 501 | 14 | 1,4 |
| 3 | 409 | 15 | 1,5 |
| 4 | 408 | 16 | 1,6 |
| 5 | 502 | 15 | 1,5 |
| Trung bình | $\Delta l = 1,7mm$ | | $\Delta T = 0,06s$ |

Kết quả đo được l = 500,0 $\pm 1,7$ (mm) và T = 1,50 $\pm 0,06$ (s)

Sai số tỉ đối của g là

$$\delta = \frac{\Delta g}{\overline{g}}$$

Với $\overline{g} = \frac{40.\bar{l}}{\left(\overline{T}\right)^2} = \frac{40.0,5}{1,5^2} = 8,89s$

$$\delta = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T} = \frac{1,7}{500} + \frac{2.0,06}{1,5} = 0,0434$$

$$\Delta g = \delta.\overline{g} = 0,0434.8.89 = 0,39$$

Vậy kq: g = 8,89 $\pm 0,39$ m/$s^2$

**Kết luận:**

❖ Khi tính sai số trực tiếp ta tính sai số ngẫu nhiên là trung bình cộng của các sai số tuyệt đối $\Delta A_i$ và xác định sai số hệ thống do dụng cụ đo. Kết quả phép đo được viết là:

$$A = \overline{A} \pm (SST\text{D+SSHT}) = \overline{A} \pm \Delta A$$

Trong đó: + Sai số tuyệt đối (SSTD) xác định bằng CT: $\overline{\Delta A} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|(\Delta A_i)\right|}{n}$

+ Sai số hệ thống thường (SSHT) bằng nửa độ chia nhỏ nhất của thước đo hoặc với đồng hồ đo ổng định lấy kết quả đo nhân với cấp chính xác của dụng cụ

❖ Khi tính sai số gián tiếp của đại lượng C thông qua các đại lượng A, B

+ Trước hết ta tính sai số trực tiếp của A, B được $A = \overline{A} \pm \Delta A$ và $B = \overline{B} \pm \Delta B$.

+ Tính $\overline{C}$ qua $\overline{A}$ và $\overline{B}$ bằng công thức liên hệ giữa A, B và C

+ Tính $\delta$ theo các trường hợp:

- $\delta(A+B)=\Delta A+\Delta B$ ***Sai số của 1 tổng bằng tổng các sai số***

- $\dfrac{\delta(A.B)}{A.B}=\dfrac{\Delta A}{\overline{A}}+\dfrac{\Delta B}{\overline{B}}$ ***Sai số của 1 tích bằng tổng các sai số***

- $\dfrac{\delta(A:B)}{A:B}=\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}$ ***Sai số của 1 thương bằng tổng các sai số***

- $\dfrac{\delta(A^n)}{A^n}=n\dfrac{\Delta A}{A}$. ***Sai số của 1lũy thừa bằng tích các sai số***

- $\dfrac{\delta(\sqrt[n]{A})}{\sqrt[n]{A}}=\dfrac{1}{n}.\dfrac{\Delta A}{A}$.

Khi đó ta có $\Delta C=\delta.\overline{C}$ và kết quả được viết C = $\overline{C}\pm\Delta C$.

**Ví dụ:** Con lắc đơn có l = $0,8\pm0,06$(m), g = $9,8\pm0,4$ m/s$^2$.

Chu kỳ $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ có kết quả:

+ $\overline{T}=2\pi\sqrt{\dfrac{0,8}{9,8}}=1,795(s)$

+ $\delta_T=\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta l}{l}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{0,06}{0,8}+\dfrac{0,4}{9,8}\right)=0,06$

+ $\Delta T=\overline{T}.\delta_T=1,705.0,06=0,1$

Vậy $T=1,8\pm0,1(s)$

**2. Xác định bước sóng ánh sáng bằng thí nghiệm Y-âng.**

- Dùng thước đo có độ chia nhỏ nhất là mm đo L là bề rộng của n khoảng vân i ta được $i=\dfrac{L}{n}$.

- Đo khoảng cách D bằng thước đo mm

Áp dụng công thức $\lambda=\dfrac{ai}{D}=\dfrac{aL}{Dn}$. Với a = 0,2mm và $\Delta a=0,005mm$ và n=10

Tiến hành thí nghiệm thu được kết quả như bảng sau

| Lần đo | L (mm) | D(mm) |
|---|---|---|
| 1 | 5.00 | 1600 |
| 2 | 4.00 | 1605 |
| 3 | 4.00 | 1603 |
| 4 | 6.00 | 1598 |
| 5 | 5.00 | 1596 |
| Trung bình | | |

Được

L = $4,80\pm1,04$ (mm) và D = $1600\pm4$ (mm)

a = 0,2mm và $\Delta a=0,005mm$

$$\overline{\lambda} = \frac{a.\overline{L}}{\overline{D}.n} = \frac{2.4,8}{1600.10} = 6.10^{-4}mm = 0,6\mu m$$

$$\delta = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta L}{\overline{L}} + \frac{\Delta D}{\overline{D}} = \frac{0,005}{2} + \frac{1,04}{4,80} + \frac{4}{1600} = 0,22$$

$$\Delta\lambda = \delta.\overline{\lambda} = 6.10^{-4}.0,22 = 1,32.10^{-4}mm = 0,132\ \mu m$$

Vậy $\lambda = 0,6 \pm 0,1(\mu m)$

**3. Thí nghiệm đo vận tốc âm trong không khí.**

Kết quả thí nghiệm thu được f = $510 \pm 4(Hz)$, $\lambda = 65 \pm 2(cm)$

Hãy xác định kết quả thu được của vận tốc v?

**4. Xác định tổng trở đoạn mạch RLrC nối tiếp.**

Kết quả thí nghiệm thu được: $R = 50 \pm 5(\Omega); r = 20 \pm 3\Omega; \cos\varphi = 0,65 \pm 0,05$

Xác định kết quả thu được của tổng trở đoạn mạch?

------------------------------------

***Tài liệu còn nhiều sai sót, các bạn và các em có ý kiến đóng góp hoặc bổ xung xin gửi về mail: tranphong.vlvn@gmail.com***

Chúc các em thi tốt!