SỞ GD & ĐT TỈNH BÌNH ĐỊNH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

ĐỀ (GIỚI THIỆU) THI CHỌN HSG
VÙNG DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ
MÔN: TOÁN HỌC. LỚP 10
NĂM 2023

Thời gian làm bài: 180 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1 (4,0 điểm). Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(xy+f\left(x\right)\right)=xf\left(y\right)+f\left(x\right)$$

với mọi x,y là hai số thực.

Câu 2 (4,0 điểm). Xét bộ ba số thực a,b,c đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3a^2}{(b-c)^2}+\frac{3b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}$$

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H với các đường cao AD,BE,CF. Đường tròn đường kính BC cắt AD tại K. Đường tròn qua A,F, tiếp xúc cạnh BC tại P (P thuộc đoạn BC) và cắt đường tròn tâm C bán kính CK tại hai điểm M,N.

1/ Chứng minh các điểm M,N,E,H cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Gọi Q là điểm đối xứng với P qua B. Chứng minh rằng giao điểm của PE và QF thuộc đường tròn đường kính AH.

Câu 4 (4,0 điểm). Cho a,m là hai số nguyên dương tùy ý. Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $v_2\left(n!\right)\equiv a\left(\bmod m\right)$.

(Kí hiệu $v_2\left(n!\right)$ được định nghĩa như sau: Nếu $n!=2^b.A;\left(A,2\right)=1$ thì $v_2\left(n!\right)=b$)

Câu 5 (4,0 điểm). Cho tập hợp $A=\left\{1,2,...,2024\right\}$. Xét 24 tập hợp $A_1,A_2,...,A_{24}$ là các tập con của A trong đó mỗi tập hợp $A_i\left(i=\overline{1,24}\right)$ có đúng 1012 phần tử. Chứng minh rằng trong các tập $A_i\left(i=\overline{1,24}\right)$ luôn tìm được hai tập hợp có chung ít nhất 484 phần tử.

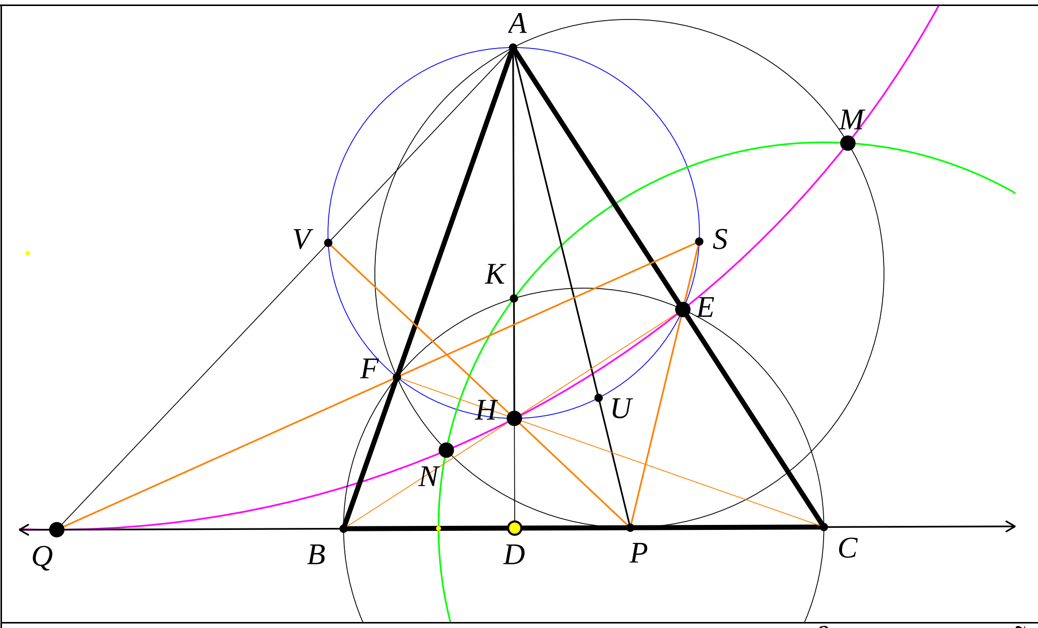
-------------------Hết-------------------

SỞ GD & ĐT TỈNH BÌNH ĐỊNH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

ĐÁP ÁN ĐỀ (GIỚI THIỆU) THI CHỌN HSG VÙNG DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2023
MÔN: TOÁN HỌC. LỚP 10

Câu	Nội dung	Điểm
1 **(4 điểm)**	Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $$f\left(xy+f\left(x\right)\right)=xf\left(y\right)+f\left(x\right)$$ với mọi x,y là hai số thực.	
	Chứng minh bổ đề: Nếu $f\left(a\right)=f\left(b\right)=c\neq 0$ thì $a=b.$ Với a,b,c như trên, áp dụng phương trình đã cho ta có $$\begin{cases} f\left(ab+c\right)=f\left(ab+f\left(a\right)\right)=af\left(b\right)+f\left(a\right)=ac+c \\ f\left(ab+c\right)=f\left(ba+f\left(b\right)\right)=bf\left(a\right)+f\left(b\right)=bc+c \end{cases}$$ Suy ra $ac=bc\Rightarrow a=b$ (vì c khác 0). Vậy BĐ được chứng minh.	0,5
	Trong phương trình hàm đã cho thay $x=0$, ta có $f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(0\right)$ (1) Từ (1) và áp dụng bổ đề suy ra $f\left(0\right)=0$ (2) Thật vậy, nếu $f\left(0\right)\neq 0$ thì từ (1) suy ra $f\left(f\left(0\right)\right)=f\left(0\right)\neq 0\Rightarrow f\left(0\right)=0$ (do bổ đề) (mâu thuẫn). Mâu thuẫn này chứng tỏ (2) đúng.	0,5
	Trong phương trình hàm ta chọn $y=0$ và sử dụng (2) ta có $$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}\quad (3)$$ Từ (3) và bổ đề suy ra $f\left(x\right)\in\left\{0,x\right\}$ với mỗi $x\in\mathbb{R}$ (4) 1) Trước hết dễ thấy $f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ là hai nghiệm hàm.	1,0
	2) Tiếp theo ta sẽ chứng minh không còn nghiệm hàm nào Thật vậy, giả sử có nghiệm hàm f có tính chất tồn tại $\exists x_0, f\left(x_0\right)\neq 0$ và $\exists y_0, f\left(y_0\right)\neq y_0$ Theo (2) suy ra $x_0\neq 0, y_0\neq 0$ Hơn nữa theo (4) thì $f\left(x_0\right)=x_0, f\left(y_0\right)=0$ (5) Trong phương trình hàm thay $x=x_0, y=y_0$ và áp dụng (5) ta có $f\left(x_0y_0+f\left(x_0\right)\right)=x_0f\left(y_0\right)+f\left(x_0\right)\Leftrightarrow f\left(x_0y_0+x_0\right)=f\left(x_0\right)=x_0\neq 0$ Áp dụng bổ đề $x_0y_0+x_0=x_0\Rightarrow x_0y_0=0$ (vô lý). Vậy $f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ là hai nghiệm hàm	2,0
2 **(4 điểm)**	Xét bộ ba số thực a,b,c đôi một khác nhau. Tìm gía trị nhỏ nhất của biểu thức $$P=\frac{3a^2}{(b-c)^2}+\frac{3b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}$$	
	Đặt $x=\dfrac{a}{b-c}, y=\dfrac{b}{c-a}, z=\dfrac{c}{a-b}$, khi đó, ta có $$x+1=\frac{a+b-c}{b-c}, y+1=\frac{b+c-a}{c-a}, z+1=\frac{c+a-b}{a-b}$$	1,0

	và $x-1=\dfrac{a-b+c}{b-c}, y-1=\dfrac{b-c+a}{c-a}, z-1=\dfrac{c-a+b}{a-b}$ Suy ra $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1) \Leftrightarrow xy+yz+zx=-1$ và $P=3(x^2+y^2)+z^2$.	
	Ta nhận thấy $P>0$ và biến z đặc biệt, chọn $$z=0 \Rightarrow P=3(x^2+y^2) \geq -6xy=6, \left(do\, xy=-1\right).$$ Nhưng theo yêu cầu xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức P, do đó, ta chỉ cần xét trường hợp $z \neq 0, 0<P<6$. Khi đó, ta viết lại P dưới dạng $$P=\frac{3(x^2+y^2)+z^2}{-xy-yz-zx}=\frac{3\alpha^2+3\beta^2+1}{-\alpha\beta-\alpha-\beta}, \left(\alpha=\frac{x}{z}, \beta=\frac{y}{z}\right)$$ $\Leftrightarrow 3\alpha^2+P(\beta+1)\alpha+3\beta^2+P\beta+1=0$ là phương trình bậc hai có nghiệm α, do đó $$\Delta_\alpha=\left[P(\beta+1)\right]^2-12(3\beta^2+P\beta+1) \geq 0$$ $$\Leftrightarrow (P^2-36)\beta^2+2(P^2-6P)\beta+P^2-12 \geq 0,$$	1,0
	có vế trái là một tam thức bậc hai có hệ số cao nhất âm $(0<P<6)$, bất phương trình có nghiệm β thì $\Delta'_\beta=(P^2-6P)^2-(P^2-36)(P^2-12) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow P^3-7P^2+36 \leq 0$ $\Leftrightarrow \left(P+2\right)\left(P-3\right)\left(P-6\right) \leq 0$ Ta đang xét $0<P<6 \Rightarrow 3 \leq P<6$; vậy $P \geq 3$.	1,0
	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $$\begin{cases} \beta=-\dfrac{P^2-6P}{P^2-36}=-\dfrac{1}{3} \\ \alpha=-\dfrac{P(1+\beta)}{6}=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, z=\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \\ x=y=\dfrac{\sqrt{5}}{5}, z=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$$ Từ đó, ta có: $\begin{cases} a=-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}b \\ c=-\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}b \\ c=-\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}b \end{cases}$. Vậy $\min P=3$.	1,0
3 **(4 điểm)**	Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H với các đường cao AD, BE, CF. Đường tròn đường kính BC cắt AD tại K. Đường tròn qua A, F, tiếp xúc cạnh BC tại P (P thuộc đoạn BC) và cắt đường tròn tâm C bán kính CK tại hai điểm M, N. 1/ Chứng minh các điểm M, N, E, H cùng nằm trên một đường tròn. 2/ Gọi Q là điểm đối xứng với P qua B. Chứng minh rằng giao điểm của PE và QF thuộc đường tròn đường kính AH.	

		
	1) Vì tam giác BKC vuông tại K có KD là đường cao nên $BK^2 = BD.BC$. Dễ thấy tứ giác $AFDC$ nội tiếp nên ta có $BD.BC = BF.BA$. Xét phương tích của điểm B đối với đường tròn tâm C, bán kính CK và đường tròn (AFC) ta có $\wp_{B/(C)} = BC^2 - CK^2 = BK^2 = BD.BC = BF.BA = \wp_{B/(PFA)}$ Do đó B thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn nói trên, hay B, M, N thẳng hàng.	1,0
	Bốn điểm M, N, F, A đồng viên và MN cắt FA tại B nên $BM.BN = BF.BA$. Mặt khác A, F, H, A đồng viên và AF cắt HE tại B nên $BF.BA = BH.BE$. Từ đó suy ra $BM.BN = BH.BE$ Suy ra bốn điểm M, N, H, E đồng viên.	1,0
	2) Đường tròn đường kính AH cắt PA, PH, PE lần lượt tại U, V, S, gọi Q' là giao điểm của FS và VA . Ta cần chứng minh Q trùng Q'. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $AESFHV$ ta có $C = AE \cap FH, P = ES \cap HV, Q' = SF \cap VA$ nên C, P, Q' thẳng hàng. Giả sử AD cắt đường tròn đường kính PQ' tại L. Dễ thấy hai tam giác BDH, ADC đồng dạng nên $DA.DH = DB.DC = DK^2$. Dễ thấy Q' là trực tâm tam giác AHP, do đó H cũng là trực tâm tam giác APQ' nên dễ chứng minh được hai tam giác vuông PDH và ADQ' đồng dạng, suy ra $DA.DH = DP.DQ' = DL^2$ Do đó $DK = DL$ suy ra K trùng L. Từ đó ta có $BL^2 = BK^2 = BD.BC = BA.BF = BP^2$ Do đó $BL = BP$. Mà tam giác $Q'LP$ vuông tại L nên từ đây suy ra B là tâm đường tròn đường kính PQ' do đó Q trùng Q'.	1,0 1,0
4 **(4 điểm)**	Cho a, m là hai số nguyên dương tùy ý. Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $v_2(n!) \equiv a \pmod m$. (kí hiệu $v_2(n!)$ được định nghĩa như sau: Nếu $n! = 2^b.A; (A,2) = 1$ thì $v_2(n!) = b$).	
	Giả sử $m = 2^l.m'; (m',2) = 1$. Theo định lí phần du trung hoa, tồn tại k sao cho $k \equiv a \pmod{m'}$ và $k \equiv -a \pmod{2^l}$.	1,5

	Xét các số *n* có dạng $n=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+...+2^{\alpha_k}$ trong đó α_i là các số tự nhiên. Theo công thức Legendre $v_2(n!)=n-s_2(n)=n-k=\sum_{i=1}^{k}(2^{\alpha_i}-1)$.	
	Ta chọn $\alpha_i\equiv 1(\text{mod}\,\varphi(m'))$ và $\alpha_i\ge l.$ Khi đó $\sum_{i=1}^{k}(2^{\alpha_i}-1)\equiv -k(\text{mod}\,2^l)$ (vì $\alpha_i\ge l$) và $\sum_{i=1}^{k}(2^{\alpha_i}-1)\equiv k(\text{mod}\,m')$ (vì định lí Euler)	1,5
	Từ đó suy ra $v_2(n!)\equiv a(\text{mod}\,m)$. Vì có vô số cách chọn $\alpha_i\equiv 1(\text{mod}\,\varphi(m'))$ nên tồn tại vô số *n*.	1,0
5 **(4 điểm)**	Cho tập hợp $A=\{1,2,...,2024\}$. Xét 24 tập hợp $A_1,A_2,...,A_{24}$ là các tập con của A trong đó mỗi tập hợp $A_i\left(i=\overline{1,24}\right)$ có đúng 1012 phần tử. Chứng minh rằng trong các tập $A_i\left(i=\overline{1,24}\right)$ luôn tìm được hai tập hợp có chung ít nhất 484 phần tử.	
	Với mỗi phần tử $x\in A$, gọi d_x là số tập hợp A_i chứa x. Khi đó $\sum_{x\in A}d_x=24\times 1012.$ Đặt $t=max\{\lvert A_i\cap A_j\rvert,1\le i<j\le 24\}$. Đếm số bộ $(x,\{A_i,A_j\})$, trong đó $x\in A$ và 2 tập A_i,A_j chứa phần tử x, theo 2 cách. Cách 1. Đếm x trước. Với mỗi $x\in A$ có $C_{d_x}^2$ cách chọn tập $\{A_i,A_j\}$, nên ta có $\sum_{x\in A}C_{d_x}^2$ cách chọn bộ $(x,\{A_i,A_j\})$. (quy ước nếu $d_x\le 1$ thì $C_{d_x}^2=0$). Cách 2. Đếm tập $\{A_i,A_j\}$ trước. Có C_{24}^2 cách chọn tập $\{A_i,A_j\}$, tương ứng có không quá t cách chọn x, nên có không quá tC_{24}^2 cách chọn bộ $(x,\{A_i,A_j\})$.	2,0
	Do đó $$\sum_{x\in A}C_{d_x}^2\le tC_{24}^2\Leftrightarrow\sum_{x\in A}\frac{d_x(d_x-1)}{2}\le t\frac{24\times 23}{2}\Leftrightarrow\sum_{x\in A}d_x^2-\sum_{x\in A}d_x\le 23\times 24\times t.\ (1)$$ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $$\sum_{x\in A}d_x^2\ge\frac{\left(\sum_{x\in A}d_x\right)^2}{2024}.\ (2)$$ Từ (1), (2) và kết hợp $\sum_{x\in A}d_x=24\times 1012$, suy ra $$\frac{(24\times 1012)^2}{2024}-24\times 1012\le 23\times 24\times t\Rightarrow t\ge 484.$$ Vậy luôn tồn tại hai tập hợp A_i,A_j có chung ít nhất 484 phần tử.	2,0

-------------------HẾT--------------------