

CHỦ ĐỀ 3

TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

Cho hàm số $y = f(x, m)$ với m là tham số, có tập xác định D .

- Hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in D$
- Hàm số $y = f(x, m)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in D$
- Hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \geq 0, \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \min y' \geq 0$
- Hàm số $y = f(x, m)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \leq 0, \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \max y' \leq 0$
- Hàm số đồng biến trên I thì nó phải xác định trên I .

DẠNG 1

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 2. Tổng các giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10)$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 2025$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 27.

B. 35.

C. 44.

D. 54.

Lời giải

Chọn C.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 2025$$

* Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

* Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' = 3x^2 - 6x + 3(m+2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ D' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 9 - 12(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1$$

* Vậy $m \geq -1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m \in [-10; 10]$ nên Tổng các giá trị nguyên của tham số là 44.

Câu 3. Biết giá trị tham số $m \in \left[a; \frac{b}{c} \right]$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì hàm số

$y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2}{c}$

A. $P = \frac{9}{4}$.

B. $P = \frac{13}{2}$.

C. $P = 4$.

D. $P = \frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

* Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} a = 3 > 0 \\ D' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ (2m-1)^2 - 3(2-m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{5}{4}$$

* Vậy $-1 \leq m \leq \frac{5}{4}$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $m \in \left[a; \frac{b}{c} \right]$ nên $\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{a^2 + b^2}{c} = \frac{13}{2}$

Câu 4. Biết giá trị tham số $m \in \left[\frac{a}{b}; c \right]$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì hàm số

$y = \frac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 2024$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a.b.c}$

A. $P = -\frac{14}{5}$.

B. $P = \frac{14}{5}$.

C. $P = -\frac{7}{3}$.

D. $P = \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

* Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Để hàm số (1) luôn tăng trên $\mathbb{R}$ thì $y' = (3-m)x^2 - 2(m+3)x + (m+2)^3 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* Trường hợp 1: $3-m=0 \Leftrightarrow m=3 \Rightarrow y' = -12x+5 \nlessert 0$ không thỏa

* Trường hợp 2: $3-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$

Để hàm số (1) luôn tăng trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3-m > 0 \\ \Delta' = (m+3)^2 - (3-m)(m+2) = 2m^2 + 5m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ -\frac{3}{2} \leq m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq -1$$

Do $m \in \left[\frac{a}{b}; c\right]$ nên $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a.b.c} = \frac{7}{3}$

Câu 5. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $(-\infty; 1]$

B. $(-\infty; 4]$

C. $(-\infty; 1)$

D. $(-\infty; 4)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có.

$$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0 \quad \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{(2; +\infty)} g(x) \quad \text{với } g(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Ta có.

$$g'(x) = 6x - 6$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	+	
$g(x)$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty; 4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 6. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5$$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

$$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}, \forall x \in (2; +\infty)$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2; +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow \text{hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (2; +\infty).$$

$$\text{Do đó } m \leq g(x), \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{12}.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases} \text{ (do } \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+m) = 1).$$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m)$ và $(m+1; +\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m = 1$.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{-3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 - (2m+15)x - m + 3$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn C.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = -3x^3 + 9x - 2m - 15 \leq 0 \forall x \in (0; +\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^3 - 9x + 15 \geq -2m \forall x \in (0; +\infty)$.

Xét hàm số: $g(x) = 3x^3 - 9x + 15$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = 9x^2 - 9$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} (l)$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	15	9	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m \leq 9 \Leftrightarrow m \geq -\frac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Câu 9. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m - 3)x^2 + m$ nghịch biến trên

khoảng $(1; 2)$ là $\left(-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p + q$ là?

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 2(2m - 3)x$.

Hàm số nghịch biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2} = g(x), \forall x \in (1; 2)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1; 2)$. $g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	1	2
g'	+	0
g	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$.

Vậy $p + q = 5 + 2 = 7$.

Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D = [2; +\infty)$ là

- A. $m \leq -1$. B. $m \geq 0$. C. $m < -1$. D. $-2 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2} \Rightarrow y' = m + \frac{m+1}{2\sqrt{x-2}}$, y' xác định trên khoảng $(2; +\infty)$.

Nhận xét: khi x nhận giá trị trên $(2; +\infty)$ thì $\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ nhận mọi giá trị trên $(0; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow (m+1)t + m \leq 0, \forall t \in (0; +\infty)$ (đặt $t = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \leq 0 \\ m + (m+1) \cdot 0 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$$

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. Vô số B. 3 C. 5 D. 4

Lời giải

Chọn B.

$y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1 < m < 3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \frac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có: $f'(x) = \frac{m^2 - 3m - 4}{(x-m)^2}$.

Hàm số $f(x) = \frac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ m \in (2; +\infty) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} -1 < m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \cup \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 < m \leq 2\}.$$

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 13.** Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- A. 3. B. 4. C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $y = \frac{x-2}{x-m} \Rightarrow y' = \frac{-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > -1 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

- Câu 14.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x+2m+12}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- A. 6. B. 5. C. 8. D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' = \frac{m^2 - m - 12}{(x+m)^2} < 0$ với $\forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 < 0 \\ x+m \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 4 \\ m \neq -x \end{cases}, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 4 \\ m \notin (-\infty; -1) \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 4.$

$\begin{cases} -1 \leq m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$.

- Câu 15.** Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \frac{2\sqrt{1-x}-14}{m-\sqrt{1-x}}$ đồng biến trên khoảng $(-15; -3)$. Số phần tử của tập S là
- A. 4. B. 3. C. 6. D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $t = \sqrt{1-x}$, $x \in (-15; -3) \Rightarrow t \in (2; 4)$ và $y_t = \frac{2t-14}{m-t}$.

Ta có $y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{2m-14}{(m-t)^2} \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \right)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-15; -3)$

$$\Leftrightarrow y'_x = \frac{2m-14}{(m-t)^2} \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \right) > 0, \quad \forall x \in (-15; -3), \quad \forall t \in (2; 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m-14}{(m-t)^2} < 0, \quad \forall t \in (2; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-14 < 0 \\ m-t \neq 0 \end{cases}, \quad \forall t \in (2; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \notin (2; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq m < 7 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \leq m < 7 \\ m \leq 2 \\ m \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow m = \{1; 2; 4; 5; 6\}$$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

- A. $m > 1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 1$. D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - m + 1}{(x-m)^2}$

Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' \geq 0, \quad \forall x \in D \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 \geq 0, \quad \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 0 \text{ (h)} \\ m-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Câu 17. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số

$y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x-m)^2} = \frac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \quad \forall x > 1$ và $m \leq 1$ (1)

Vì $\Delta_g' = 2(m+1)^2 \geq 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \leq x_2 \leq 1$

$$\begin{cases} 2g(1) = 2(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ \frac{5}{2} = m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,2$$

Điều kiện tương đương là

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

A. $m \geq \frac{1}{2}$.

B. $m < -\frac{14}{5}$.

C. $m \leq -\frac{14}{5}$.

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số xác định trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$y' = \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x + 2)^2}$$

* Ta có:

* Để hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x + 2)^2} \leq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow mx^2 + 4mx + 14 \leq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{-14}{x^2 + 4x} = g(x), \forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \geq \frac{1}{2}} g(x) = g(1) = -\frac{14}{5}$$

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \cos 2x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m > 4$.

B. $m < 2$.

C. $m \geq 1$

D. $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn D.

Phương pháp

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a; b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Cách giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -2\sin 2x + m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2\sin 2x + m \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m \geq 2\sin 2x \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 2$$

- Câu 20.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + m(\sin x + \cos x + m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?
- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y' = 3 + m(\cos x - \sin x)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Đặt $t = \cos x - \sin x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, thu được hàm $y'(t) = 3 + mt, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Khi đó điều kiện (1) trở thành:

$$y'(t) \geq 0, \forall t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-\sqrt{2}) \geq 0 \\ y'(\sqrt{2}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{2}m \geq 0 \\ 3 + \sqrt{2}m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Các giá trị nguyên của m nhận được là: -2, -1, 0, 1, 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

- Câu 21.** Cho hàm số sau $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - m + 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Đáp án: $-3 \leq m \leq 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \text{ (hn)} \\ m^2 + 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$

- Câu 22.** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Lời giải

Đáp án: $m \leq 2$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \quad m \leq 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2; +\infty)$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2; +\infty)$

$$f'(x) = 6x - 6, f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+
$f(x)$	↘		2	↗
				$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $m \leq 2$.

Vậy $m \in (-\infty; 2]$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

Lời giải

Đáp án: $m \leq -\frac{3}{4}$

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ thì $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9 \quad \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 4m \leq \min_{(-\infty; -1]} f(x), \quad f(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

Ta có $f'(x) = 6x + 12; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

Suy ra $\min_{(-\infty; 0]} f(x) = -3 \Rightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x - m + 2}{x + 1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định.

Lời giải

Đáp án: $m < 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{m-1}{(x+1)^2}$

Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m < 1$

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ giảm trên khoảng $(-\infty; 1)$?

Lời giải

Đáp án: $-2 < m \leq -1$

* Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; 1)$.

$$y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}, \quad x \neq -m$$

* Ta có:

* Để hàm đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$$

* Vậy thỏa yêu cầu bài toán thì: $-2 < m \leq -1$.

Câu 26. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+18}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 5)$.

Lời giải

Đáp án: $m \in [4; 5]$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{2} \right\}$.

Ta có $y = \frac{mx+18}{2x+m} \Rightarrow y' = \frac{m^2 - 36}{(2x+m)^2}$.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ -\frac{m}{2} \notin (-2; 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ -\frac{m}{2} \geq 5 \\ -\frac{m}{2} \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ m \leq -10 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m < 6$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m là $m \in [4; 5]$.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

Lời giải

Đáp án: có 14 số m nguyên

Đặt $t = \sqrt{6-x} \Rightarrow f(t) = \frac{(4-m)t+3}{t+m} \Rightarrow f'(x) = f'(t) \cdot t'(x)$.

Với $x \in (-8;5)$, ta có $t'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} < 0, \forall x \in (-8;5)$ và $x \in (-8;5) \Rightarrow t \in (1; \sqrt{14})$.

Từ đó ta suy ra hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8;5)$ khi hàm số $f(t) = \frac{(4-m)t+3}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; \sqrt{14})$.

$f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1; \sqrt{14}) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m - 3 < 0 \\ -m \leq 1 \\ -m^2 + 4m - 3 < 0 \\ -m \geq \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-1; 1) \cup (3; +\infty) \\ m \leq -\sqrt{14} \end{cases}$

Do $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -1; 0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Như vậy có 14 số m nguyên trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x-1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Đáp án: $m \leq 9$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $y' = \frac{2x^2 - 4x + 3 - m}{(x-1)^2} = \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Ta có: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2x^2 - 4x + 3$.

Đặt $g(x) = 2x^2 - 4x + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x - 4$

Hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x-1}$ đồng biến trên $(-\infty; -1) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in (-\infty; -1)} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x), \forall x \in (-\infty; -1]$ ta suy ra $m \leq 9$.

Vậy $m \leq 9$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x-1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

Đáp án: $m \leq 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{2x^2 - 4x + 3 - m}{(x-1)^2} = \frac{f(x)}{(x-1)^2}.$$

Ta có: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2x^2 - 4x + 3$. Đặt $g(x) = 2x^2 - 4x + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x - 4$

Hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x-1}$ đồng biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 2]} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x), \forall x \in (-\infty; -1]$ ta suy ra $m \leq 1$.

Vậy $m \leq 1$ thì hàm số đồng biến trên $(1; 2)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{m \sin x + 4}{\sin x + m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số

đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải

Đáp án: có 3 giá trị nguyên $m \in \{-1; 0; 1\}$

Đk: $\sin x \neq -m$.

$$f'(x) = \frac{(m^2 - 4)\cos x}{(\sin x + m)^2}$$

Ta có:

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x > 0, 0 < \sin x < 1$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x) < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{(m^2 - 4)\cos x}{(\sin x + m)^2} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \leq 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ 0 \leq m < 2 \end{cases}$$

Mà m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Đáp án: $m \leq 0$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$. Ta có hàm số $t = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \frac{2t - 1}{t - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

$$\Leftrightarrow f'(t) > 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \frac{-2m+1}{(t-m)^2} > 0, \forall t \in (0; 1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1 > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Vậy $m \leq 0$.

DẠNG 2

BIỆN LUẬN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ m

I. Biện luận số cực trị của hàm số

1. Biện luận số cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) (*)

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$ (1)

(*) **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$

+ Hàm số

(*) **không có cực trị** $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

+ Hàm số

2. Biện luận số cực trị của hàm trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = x(4ax^2 + 2b) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + 2b = 0 = g(x) \end{cases}$ (1)

• Hàm số (*) **có 3 cực trị** $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$

Khi đó: Hàm số có 2 cực tiểu, 1 cực đại khi $a > 0$.

Hàm số có 2 cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

• Hàm số có **1 cực trị** khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b > 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Khi đó: Hàm số chỉ có cực tiểu khi $a > 0$ (nghĩa là có cực tiểu mà không có cực đại).

Hàm số chỉ có cực đại khi $a < 0$ (nghĩa là có cực đại mà không có cực tiểu).

Chú ý: Hàm bậc 4 trùng phương:

- Luôn có ít nhất 1 cực trị.
- Nếu có 3 cực trị thì 3 cực trị này luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh thuộc trục Oy.

3. Biện luận số cực trị của hàm hữu tỉ: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ (*)

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$

$y' = \frac{adx^2 + 2acx + bc - cd}{(dx + e)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow adx^2 + 2acx + bc - cd = 0 = g(x)$ (1)

Ta có:

(*) **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \\ g\left(-\frac{e}{d}\right) \neq 0 \end{cases}$
+ Hàm số

(*) **không có cực trị** $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$
+ Hàm số

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

+ Giả sử (x_0, y_0) là điểm cực trị thì $y_0 = \frac{Q'(x_0)}{P'(x_0)}$.

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là:

$$y = \frac{Q'(x)}{P'(x)} = \frac{2ax + b}{d} = \frac{2a}{d}x + \frac{b}{d}$$

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

II. Tìm tham số m để hàm số có cực trị tại x_0

Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) < 0 \end{cases} \Rightarrow m$

Bài toán 3: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = x_0$ thì:
$$\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) > 0 \end{cases} \Rightarrow m$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ có cực trị tại $x = 1$.

A. $\begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$

C. $m = 1$

D. $m = -2$

Lời giải

Chọn A.

Phương pháp tự luận

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = -3(m^2 + 5m)x^2 + 12mx + 6 \Rightarrow y'' = -6(m^2 + 5m)x + 12m$

$$x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 - 3m + 6 = 0 \\ -6m^2 - 18m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \\ m \neq -3 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$$

* Hàm số đạt cực tiểu tại

Phương pháp trắc nghiệm

+ Chọn $m = -2 \Rightarrow y = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 6$

$$\Rightarrow y' = 18x^2 - 24x + 6$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 18x^2 - 24x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên thấy có cực trị tại $x = 1$. Loại **B, C**

+ Chọn $m = 1 \Rightarrow y = -6x^3 + 6x^2 + 6x - 6$

$$\Rightarrow y' = -18x^2 + 12x + 6$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -18x^2 + 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên thấy có cực trị tại $x = 1$.

Vậy Đáp A đúng

Câu 33. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?

- A. $m > 0$. B. $m \neq 0$. C. $m = 0$. D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn C.

$$y' = 3x^2 - 6x + m$$

$$y'' = 6x - 6$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi:
$$\begin{cases} y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + m = 0 \\ y''(2) = 6 \cdot 2 - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

- A. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$$y' = x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + 3m^2 + 1$$

$$y'' = 2x + 2(m^2 - m + 2)$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ khi:
$$\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m - 3 = 0 \\ m^2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $\begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$. C. $m = 1$. D. $m = -3$.

Lời giải

Chọn D.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2x + 2m}{(x + m)^4}$$

* Ta có:

* Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2+4m-3}{(2+m)^2}=0 \\ \frac{2m+4}{(2+m)^4}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=1 \\ m<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m=-3}$$

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m-1)x - 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m < \frac{1}{2}$.
B. Với mọi m , hàm số luôn có cực trị.
C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m \neq \frac{1}{2}$.
D. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.

Lời giải

Chọn C.

Phương pháp trắc nghiệm

Hàm số bậc 3 có cực đại, cực tiểu thì $b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (4m-1) > 0$
 $\Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$.

Câu 37. Với giá trị tham số $m \in (a;b) \setminus \{c\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$) thì hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 6$ có 2 cực trị. Giá trị biểu thức $P = a + b + c$ là:

- A. $P = -4$.
B. $P = 4$.
C. $P = -3$.
D. $P = -5$.

Lời giải

Chọn A.

$$y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m$$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m^2 + 2m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-3; 1) \setminus \{-2\} \Rightarrow P = a + b + c = -4$$

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m \in [-2020; 2020)$ để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ có cực trị?

- A. 2038.
B. 2020.
C. 2018.
D. 2021.

Lời giải

Chọn B.

$$* y' = 3mx^2 + 6mx - (m-1)$$

+ Khi $m = 0 \Rightarrow y' = 1 > 0 \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến $\Rightarrow m = 0$ không thỏa

+ Khi $m \neq 0 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3mx^2 + 6mx - (m - 1) = 0 \quad (1)$

$$\Delta' = 9m^2 + 3m(m - 1) = 12m^2 - 3m$$

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 12m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Hàm số có cực trị

Suy ra Có 2020 bao nhiêu giá trị nguyên âm

Câu 39. Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

A. $-\frac{16}{25}$.

B. -9 .

C. $-\frac{25}{9}$.

D. 1 .

Lời giải

Chọn A.

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2 - 3b > 0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x) = f'(x) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a \right) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9} \right)x + c - \frac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9} \right)x + c - \frac{1}{9}ab \quad (d)$.

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

Khi đó $P = abc + ab + c \Leftrightarrow P = 9c^2 + 10c \Leftrightarrow P = \left(3c + \frac{5}{3} \right)^2 - \frac{25}{9}$.

Suy ra $\min P = -\frac{25}{9}$.

Câu 40. Với giá trị tham số $m \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$) thì hàm số $y = mx^4 + (m - 1)x^2 + m$ chỉ có đúng một cực trị. Giá trị biểu thức là $P = 2a^{2019} + 3b^{2020}$:

A. $P = 2^{2019} + 3$.

B. $P = 2 + 3 \cdot 2^{2020}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 0$.

Lời giải

Chọn C.

Trường hợp 1: $m = 0$

Ta có hàm số: $y = -x^2$, hàm số này có 1 cực trị. Vậy $m = 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \neq 0$

$$y' = 4mx^3 + 2(m-1)x$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

Hàm số có đúng 1 cực trị

$$\text{Kết hợp TH1 và TH2, ta có: } \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \text{ thỏa mãn.}$$

$$P = 2a^{2019} + 3b^{2020} = 3$$

Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-1000; 2010)$ để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 điểm cực trị.

- A. 1000. B. 3010. C. 2010. **D. 999.**

Lời giải

Chọn D.

Để hàm số có ba cực trị thì trước hết hàm số phải là hàm số trùng phương tức $m \neq 0$.

$$\text{Ta có: } y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 4mx(x^2 + \frac{m^2 - 9}{2m})$$

$$\text{Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi: } y' \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \frac{m^2 - 9}{2m} < 0$$

$$\Leftrightarrow m(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy các giá trị cần tìm của } m \text{ là: } \begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{cases}$$

Có 999 giá trị nguyên.

Câu 42. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2mx + 5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị.

- A. $m^3 \geq 3$. B. $m \notin \mathbb{R}$. C. $m^2 \geq 3$. **D. $m < 3$.**

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-x^2 + 2x - (2m-5)}{(x-1)^2} = 0$$

Để hàm số có hai cực trị thì có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \neq 1$.

$$\hat{U} \quad g(x) = -x^2 + 2x - (2m-5) = 0 \quad (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \neq 1.$$

$$\hat{U} \begin{cases} -x^2 + 2x - (2m - 5) = 0 \text{ có nghiệm} \\ g(1) = 0 \end{cases} \quad \hat{U} \begin{cases} a = -1 \neq 0 \\ D' = -2m + 6 > 0 \\ -2m + 6 \neq 0 \end{cases} \quad \hat{U} m < 3.$$

Câu 43. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$ có cực đại và cực tiểu.
A. $1 \leq m \leq 2$. B. $1 \leq m < 2$. C. $1 < m \leq 2$. D. $1 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$$y' = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x - 1)^2} = 0 \quad \hat{U} \quad g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

có hai nghiệm phân

$$\hat{U} \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ D' = -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ g(1) = m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad 1 < m < 2$$

biệt $x_1, x_2 \neq 1$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 44. Tìm tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + 3x - 2$ không có cực trị.

Lời giải

Đáp án: 7

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D = \mathbb{R}$.

* Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 2(m-1)x + 3 = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{-2 \leq m \leq 4}$$

Suy ra tổng các giá trị nguyên là 7.

Câu 45. Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3x^2 - (m+1)x + 3m^2 - m + 2$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu.

Lời giải

Đáp án: $m \neq 1$.

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D = \mathbb{R}$.

Hàm số có cực đại và cực tiểu (2 cực trị) $\Leftrightarrow y' = 3(m-1)x^2 - 6x - (m+1) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = 9 + 3(m - 1)(m + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' = m^2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1$$

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = mx^4 - (m + 1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \end{cases}$

$$y' = 4mx^3 - 2(m + 1)x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(2mx^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 = m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m(m + 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \end{cases}$$

Hàm số có 3 điểm cực trị

$$y = \frac{x^2 + (m + 1)x + 2m + 1}{x + 1}$$

Câu 47. Cho hàm số:

a) Tìm tham số m để hàm số sau đây có 2 cực trị.

b) Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số.

Bài giải

Đáp án:

a) hàm số có 2 cực trị khi $\begin{cases} m^2 - 1 \\ m < 1 \end{cases}$

b) phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y = -2x + m + 1$ với $\begin{cases} m^2 - 1 \\ m < 1 \end{cases}$

Hàm số đã cho xác định trên: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$y' = \frac{x^2 + 2x - m}{(x + 1)^2}$$

Ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - m = 0 = g(x)$$

$$D = -1 + m$$

+ để hàm số có 2 cực trị thì: $\begin{cases} g(-1) \neq 0 \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 - m \neq 0 \\ -1 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow$ có 2 cực trị

$$y = \frac{x^2 + (m + 1)x + 2m + 1}{(x + 1)} = 2x + m + 1$$

* Ta có:

* phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y = -2x + m + 1$ với $\begin{cases} m^2 - 1 \\ m < 1 \end{cases}$

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$. Tìm tham số m để hàm số có 2 cực trị.

Bài giải

Đáp án: $m > -1$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + m}{(1-x)^2} = 0$$

Để hàm số có hai cực trị thì có hai nghiệm phân biệt $\neq 1$.

$$\hat{=} g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \quad (1) \quad \text{có hai nghiệm phân biệt } \neq 1.$$

$$\hat{=} \begin{cases} g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \quad \text{có} \quad \hat{=} \begin{cases} a = -1 \neq 0 \\ D_g' = 1 + m > 0 \\ 1 + m \neq 0 \end{cases} \quad \hat{=} m > -1$$

Câu 49. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

Bài giải

Đáp án: $m < \frac{3}{2}$

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\hat{=} y' = \frac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x+1)^2} = 0$$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu có 2 nghiệm phân biệt $\neq -1$

$$\hat{=} g(x) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0 \quad \text{có 2 nghiệm phân biệt } \neq -1. \quad \hat{=} \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ D_g' = 3 - 2m > 0 \\ g(-1) = 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \quad \hat{=} m < \frac{3}{2}$$

DẠNG 3

**TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC CỦA
BÀI TOÁN**

(liên quan hệ thức Vi -et)

HÀM SỐ BẬC 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

Cách 1: Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = \frac{y' \cdot y''}{18a}$.

Cách 2: Chia y cho y' ta được: $y = Q(x) \cdot y' + Ax + B$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y = Ax + B$

Câu 50. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

A. $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = 2 \end{cases}$

C. $m \in \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \setminus \{0\}$

D. $m = 2$

Lời giải

Chọn B.

Phương pháp tự luận

$$y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 + 2x_2 = 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \\ x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = \frac{2-m}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = \frac{2-m}{m} \\ \left(\frac{3m-4}{m}\right)\left(\frac{2-m}{m}\right) = \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Phương pháp trắc nghiệm

+ Chọn $m = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - 3x + \frac{1}{6}$

$\Rightarrow y' = x^2 - 3x$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ suy ra hàm số có hai cực trị

Và không thỏa $x_1 + 2x_2 = 1$. Loại A, C

$$+ \text{Chọn } m = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 4$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \text{ suy ra hàm số có hai cực trị}$$

Và có thỏa $x_1 + 2x_2 = 1$. Loại **D**

Vậy đáp B

+ Cách làm này là loại đáp án sai chứ không phải chọn đáp án đúng nhé các em !!!

+ Chọn giá trị m cho khéo để loại trừ đáp án càng nhiều càng tốt.

Câu 51. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

A. $m = \pm\sqrt{2}$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải

Chọn B.

Phương pháp tự luận

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$$

Hàm số luôn luôn có cực trị với mọi m

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (2m)^2 - 3(m^2 - 1) = 7 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Cách 2:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + (m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (m+1)^2 + (m-1)^2 - (m-1)(m+1) = 7 \\ \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CB} < x_{CT}$.

A. $m < 2$. **B.** $-2 < m < 0$. **C.** $-2 < m < 2$. **D.** $0 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D.

$$y' = mx^2 + 4x + m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$$

ycbt

Câu 53. Với các giá trị thực của tham số $m \in \left(\frac{a}{b}; +\infty\right) \setminus \{c\}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì

đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x + 2$ có hai điểm cực trị và hoành độ cực trị đều dương. Tính giá trị

biểu thức $P = \frac{a+b+c}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$

A. $P = -\frac{1}{2}$

B. $P = \frac{3}{5}$

C. $P = \frac{3}{2}$

D. $P = \frac{1}{4}$

A.

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = x^2 - 2mx + (2m - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2mx + (2m - 1) = 0$ (1)

* Để đồ thị hàm số có hai cực trị dương $\hat{U}$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = -\frac{b}{a} = 2m > 0 \\ P = \frac{c}{a} = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)^2 > 0 \\ m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$$

* Vậy $\begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$ là những giá trị cần tìm thỏa yêu cầu bài toán.

$$\Rightarrow P = \frac{a+b+c}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = \frac{3}{2}$$

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2019; 2019)$ thì đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1?

2018

B. 2020

C. 2019

D. 4038

A.

Lời giải

Chọn C.

- * Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
- * Hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

$$\Leftrightarrow y' = g(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1) = 0 \quad (1) \quad \text{có 2 nghiệm } x_1; x_2 \text{ thỏa } \begin{cases} x_1 < 1 < x_2 & (2) \\ x_1 < x_2 \leq 1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \Leftrightarrow a.g(\alpha) = -3.g'(1) < 0 \\ (3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3.g'(1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(3m^2 + m - 4) < 0 \\ \begin{cases} 9(m+1)^2 - 3(3m^2 + 7m - 1) > 0 \\ 3(3m^2 + m - 4) \geq 0 \\ m+1 < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases} -3m + 12 > 0 \\ (3m^2 + m - 4) \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases} m < 4 \\ m \leq -\frac{4}{3} \\ m \geq 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < m < 1 \\ m \leq -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m < 1} \end{cases}$$

Có 2019 giá trị nguyên

Câu 55. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ (với $a \in \mathbb{Z}$) thì đồ thị hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này cách đều trục tung Oy . Biết t thỏa mãn phương trình sau:

$$4t^2 + 3at + a^2 + 3a - 9 = 0. \text{ Tính giá trị của } t.$$

- A. $t = 3$ B. $t = \pm \frac{3}{2}$ C. $t = \frac{3}{2}$ D. $t = \pm 3$

Lời giải

Chọn B.

- * Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 6x^2 + 2mx - 12 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 \neq x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 + 72 > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R} \quad \text{hàm số luôn có 2 cực trị.}$$

* Hai điểm cực trị cách đều trục tung $\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ (do } x_1 \neq x_2) \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2m}{6} = 0 \Leftrightarrow \boxed{m = 0}$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{3}{2}$$

Câu 56. Với các giá trị thực của tham số $m = \frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B và hai điểm này cùng với điểm

$C\left(-1; -\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$

$$P = \frac{25}{4}$$

$$\text{B. } P = \frac{15}{4}$$

$$\text{C. } P = \frac{7}{2}$$

$$\text{D. } P = -\frac{5}{4}$$

A.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \quad (*). \text{ Khi đó hai điểm cực trị là } A(2; 9m), B(2m-4m^3+12m^2-3m+4)$$

$$\square \text{ABC nhận O làm trọng tâm} \square \begin{cases} 2+2m-1=0 \\ -4m^3+12m^2+6m+4-\frac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \quad (\text{thỏa } (*)).$$

Câu 57. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có hoành độ 2 cực trị cùng dấu.

$$\text{A. } -2 < m < 2$$

$$\text{B. } \frac{-15}{4} < m < 2$$

$$\text{C. } \frac{-21}{4} < m < 2$$

$$\text{D. } \frac{-17}{4} < m < 2$$

Lời giải

Chọn D.

$$y' = 3x^2 - 12x + 3(m+2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow y' = x^2 - 4x + (m+2) = 0$$

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Chia y cho y' ta được : $y = \frac{1}{3} y'(x-2) + (m-2)(2x+1)$

Điểm cực trị tương ứng : $A(x_1; (m-2)(2x_1+1))$ và $B(x_2; (m-2)(2x_2+1))$

Có : $y_1 \cdot y_2 = (m-2)^2 (4x_1x_2 + 2(x_1+x_2)+1)$

Với : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m+2 \end{cases}$ nên : $y_1 \cdot y_2 = (m-2)^2 (4m+17)$

Hai cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 (4m+17) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$

Kết hợp đk : $-\frac{17}{4} < m < 2$.

Câu 58. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y = -4x$ (d).

A. $m \in \{1\}$.

B. $m \in \{0; 1\}$.

C. $m \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

D. $m \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn A.

$$y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$$

Hàm số có 2 cực trị $m \neq \frac{1}{3}$

Bấm máy tính:

$$2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x - (6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)) \left(\frac{x}{3} + \frac{m-1}{6} \right) \xrightarrow{x \equiv m \equiv 1 \pmod{1000}}$$

$$1997001000 - 8994001i = (2 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^6 + 10^3) - (9 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^3 + 1)i =$$

$$= -(9m^2 - 6m + 1)x + 2m^3 - 3m^2 + m$$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y = -(9m^2 - 6m + 1)x + 2m^3 - 3m^2 + m$ (Δ)

$$\Delta \equiv d \Leftrightarrow \begin{cases} -(9m^2 - 6m + 1) = -4 \\ 2m^3 - 3m^2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 59. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ hoặc $m = b$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$) thì thị hàm số:

$$y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$$

có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam

giác vuông tại O. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a+b}{a^2+b^2}$.

A. $P = \frac{1}{2}$

B. $P = 1$

C. $P = 2$

D. $P = 0$

Lời giải

Chọn D.

$$y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$$

Lấy y chia y' ta được phương trình qua 2 điểm cực trị là: $y = 2m^2x - 2m^2 - 2$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(x_1; 2m^2x_1 - 2m^2 - 2); B(x_2; 2m^2x_2 - 2m^2 - 2)$

ΔOAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + (2m^2x_1 - 2m^2 - 2)(2m^2x_2 - 2m^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + 4m^4x_1x_2 - 4m^2(m^2 + 1)(x_1 + x_2) + 4(m^2 + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - m^2)(1 + 4m^4) + 4(m^2 + 1)(1 + m^2 - 2m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - m^2)(4m^4 + 4m^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 60. Với các giá trị thực của tham số $m = -\frac{a}{b}$ hoặc $m = \frac{c}{d}$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản) thì hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị

hàm số cách đều gốc tọa độ O . Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a+b+c+d}{a^2+b^2}$.

A. $P = \frac{6}{5}$

B. $P = \frac{5}{6}$

C. $P = \frac{4}{7}$

D. $P = \frac{7}{4}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1) = -3(x^2 - 2x - m^2 + 1)$

$g(x) = x^2 - 2x - m^2 + 1$ là tam thức bậc hai có $\Delta' = m^2$. Do đó: y có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. (1)

Khi đó y' có các nghiệm là: $1 \pm m \Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1 - m; -2 - 2m^3)$ và $B(1 + m; -2 + 2m^3)$

Ta có: $\overrightarrow{OA}(1 - m; -2 - 2m^3) \Rightarrow OA^2 = (1 - m)^2 + 4(1 + m^3)^2$

$$\overrightarrow{OB}(1 + m; -2 + 2m^3) \Rightarrow OB^2 = (1 + m)^2 + 4(1 - m^3)^2$$

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi:

$$OA=OB \Leftrightarrow OA^2=OB^2 \Leftrightarrow (1-m)^2+4(1+m^3)^2=(1+m)^2+4(1-m^3)^2$$

$$\Leftrightarrow -4m+16m^3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\Rightarrow P=\frac{a+b+c+d}{a^2+b^2}=\frac{6}{5}$$

Câu 61. Với các giá trị thực của tham số $m=-\frac{a\sqrt{2}}{b}$ hoặc $m=\frac{c\sqrt{2}}{d}$ (với $a,b,c,d \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$. Giá trị biểu thức $P=a^3+b^3+c^3+d^3$ là:

A. $P=8$

B. $P=28$

C. $P=10$

D. $P=18$

Lời giải

Chọn D.

$$y'=3x^2-6mx$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2m \end{cases} \text{ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì } m \neq 0.$$

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;4m^3); B(2m;0) \Rightarrow \overline{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m;2m^3)$.

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ là AB vuông góc với đường thẳng $(d): y=x$ và

$$I \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$P=a^3+b^3+c^3+d^3=18$$

Câu 62. Với các giá trị thực của tham số $m=a$ hoặc $m=-\frac{b}{c}$ (với $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{b}{c}$ phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A, B và thỏa mãn $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (tr

ong đó O là gốc tọa độ). Giá trị biểu thức $P=\frac{a+b+c}{abc}$ là:

A. $P=\frac{187}{28}$

B. $P=\frac{28}{187}$

C. $P=\frac{187}{29}$

D. $P=\frac{29}{187}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y' = m(3x^2 - 6x)$

Với mọi $m \neq 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3m - 3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -m - 3 \end{cases}$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0; 3m - 3); B(2; -m - 3)$.

Ta có: $2AB^2 - (OA^2 + OB^2) = 20 \Leftrightarrow 11m^2 + 6m - 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{17}{11} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{17}{11} \end{cases}$.

$$\Rightarrow P = \frac{a+b+c}{a.b.c} = \frac{29}{187}$$

Câu 63. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ hoặc $m = -\frac{b}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{b}{c}$ phân số tối giản) thì đường thẳng $\Delta: x + my + 3 = 0$ tạo với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$

(C) một góc α , biết $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Giá trị biểu thức $P = \frac{a+b+c}{a-b-c}$ là:

A. $P = -\frac{15}{11}$.

B. $P = \frac{15}{11}$.

C. $P = \frac{11}{15}$.

D. $P = -\frac{11}{15}$.

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng đi qua ĐCĐ, ĐCT là $\Delta_1: 2x + y = 0$ có VTPT $\vec{n}_1(2; 1)$

Đường thẳng đã cho $\Delta: x + my + 3 = 0$ có VTPT $\vec{n}_2(1; m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\Delta, \Delta_1) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|m+2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow 25(m^2 + 4m + 4) = 5 \cdot 16 \cdot (m^2 + 1) \Leftrightarrow 11m^2 - 20m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{2}{11} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \frac{a+b+c}{a-b-c} = -\frac{15}{11}$$

Câu 64. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa độ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

B. $\sqrt{10} + \sqrt{2}$.

C. $\sqrt{20} - \sqrt{10}$.

D. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có : $y' = 6x^2 - 18x + 12$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y(1) = 5 + m \\ x = 2 \Rightarrow y(2) = 4 + m \end{cases}$$

$A(1; 5 + m)$ và $B(2; 4 + m)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\overrightarrow{OA} = (1; 5 + m), \quad \overrightarrow{OB} = (2; 4 + m), \quad \overrightarrow{AB} = (1; -1)$$

OAB là 1 tam giác $\Leftrightarrow -4 - m \neq 2 \Leftrightarrow m \neq -6$

Chu vi của ΔOAB là: $2p = \sqrt{1 + (m + 5)^2} + \sqrt{4 + (m + 4)^2} + \sqrt{2}$

Sử dụng tính chất $|u| + |v| \geq |u + v|$ với $u = (1; -5 - m)$ và $v = (2; 4 + m)$

Từ đó ta có : $\sqrt{1 + (m + 5)^2} + \sqrt{4 + (m + 4)^2} + \sqrt{2} \geq \sqrt{3^2 + (-1)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{10} + \sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi u, v cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{-5 - m}{4 + m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{14}{3}$.

Vậy chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng $(\sqrt{10} + \sqrt{2})$ khi $m = -\frac{14}{3}$.

HÀM SỐ TRỪNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Câu 65. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. Không tồn tại m .

B. $m = 0$.

C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B.

$$y' = 4x^3 - 4(m+1)x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m - 1) = 0$$

Hàm số có điểm 3 cực trị $\Leftrightarrow m > -1$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là : $A(0; m^2)$, $B(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$, $C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Do tính chất đối xứng, ta có $\triangle ABC$ cân tại đỉnh A .

Vậy $\triangle ABC$ chỉ có thể vuông cân tại đỉnh $A \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow -(m+1) + (-m^2 - 2m - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có: $m = 0$ (thỏa mãn).

Lưu ý: Có thể làm theo cách khác:

+) **Cách 1:** Gọi M là trung điểm của BC , tìm tọa độ điểm M , $\triangle ABC$ vuông tại đỉnh A thì $2AM = BC$.

+) **Cách 2:** Sử dụng định lý Pitago $BC^2 = AB^2 + AC^2$

+) **Cách 3:** $\cos(\overline{BA}, \overline{BC}) = \cos 45^\circ$

+) Hoặc sử dụng công thức $\frac{b^3}{8a} + 1 = 0$

Câu 66. Với các giá trị thực của tham số $m = a$ hoặc $m = b$ (với $a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^+$) thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (C) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân. Giá trị biểu thức

$$P = \frac{3a^2 - b^2}{ab} \text{ là:}$$

A. $P = 0$

B. $P = -1$.

C. $P = 2$.

D. $P = -2$

Lời giải

Chọn D.

$$y' = 4x^3 - 4m^2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2) = 0$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là : $A(0; 1)$, $B(m; 1 - m^4)$, $C(-m; 1 - m^4)$

Do tính chất đối xứng, ta có $\triangle ABC$ cân tại đỉnh A .

$$A \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy $\triangle ABC$ chỉ có thể vuông cân tại đỉnh

Kết hợp điều kiện ta có: $m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Lưu ý: có thể sử dụng công thức $\frac{b^3}{8a} + 1 = 0$.

Câu 67. Với các giá trị thực của tham số $m = a + \frac{b\sqrt[3]{3}}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều. Giá trị biểu thức $P = 2^a + 3^b + 4^c$ là:

- A. $P = 11$. B. $P = 9$. C. $P = 21$. D. $P = 15$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y' = 4x^3 - 8(m-1)x = 4x(x^2 - 2(m-1))$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2(m-1) \end{cases} \text{ nên hàm số có 3 điểm cực trị khi } m > 1.$$

Với đk $m > 1$ đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$$A(0; 2m-1), B(\sqrt{2(m-1)}; -4m^2+10m-5), B(-\sqrt{2(m-1)}; -4m^2+10m-5).$$

Ta có:

$$AB^2 = AC^2 = 2(m-1) + 16(m-1)^4$$

$$BC^2 = 8(m-1)$$

Để 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác đều thì:

$$AB = AC = BC \Leftrightarrow AB^2 = AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(m-1) + 16(m-1)^4 = 8(m-1)$$

$$\Leftrightarrow 8(m-1)^4 - 3(m-1) = 0 \Leftrightarrow (m-1)[8(m-1)^3 - 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \end{cases}$$

So sánh với điều kiện ta có: $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ thỏa mãn.

$$\Rightarrow P = 2^a + 3^b + 4^c = 21$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 3 = 0 \Leftrightarrow -8(m-1)^3 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

Cách khác: áp dụng công thức

Câu 68. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$. Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm thì giá trị của tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m \in (-10; -5)$

B. $m \in (-5; 0)$

C. $m \in (0; 5)$

D. $m \in (5; 10)$

Lời giải

Chọn C.

$$y' = 4x^3 - 4mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} \text{ . Hàm số có 3 điểm cực trị } \Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$$A(0; m-1) ; B(\sqrt{m}; m^2 + m - 1) ; C(-\sqrt{m}; m^2 + m - 1)$$

Vì B, C đối xứng nhau qua trục tung nên $BC \perp OA$

Do đó O là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow OB \perp AC$ hay $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Với } \overrightarrow{OB} = (\sqrt{m}, m^2 + m - 1), \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m}, m^2)$$

$$\text{Từ đó : } -m + m^2(m^2 + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ là gtct .

Câu 69. Với các giá trị thực của tham số $m = -a$ hoặc $m = b$ (với $a, b \in \mathbb{Z}^+$) thì đồ thị hàm số:

$y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác

nội tiếp. Giá trị biểu thức $P = a^2 + 5ab + b^2$ là:

A. $P = 7$

B. $P = 2$

C. $P = 5$

D. $P = 3$

Lời giải

Chọn A.

$$y' = y = 4x^3 - 4m^2x$$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

$$\text{Khi đó 3 điểm cực trị là: } A(0; m^4 + 1), B(-m; 1), C(m; 1)$$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng , ta có:

A, O, I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

$$\text{Vậy } AB \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m^2 - m^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m = \pm 1$ (thỏa mãn).

$$P = a^2 + 5ab + b^2 = 7$$

Câu 70. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

- A. Không tồn tại m . B. $m = \sqrt[5]{2}$. C. $m = -\sqrt[5]{2}$. D. $m = \pm\sqrt[5]{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m \neq 0$

Áp dụng công thức $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|} \sqrt{-\frac{b}{2a}}$, ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{b^2}{4|a|} \sqrt{-\frac{b}{2a}} \Rightarrow 64 = \frac{64m^4}{4} \sqrt{\frac{8m^2}{2}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt[5]{2}$
(thỏa mãn).

Câu 71. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - (3m - 1)x^2 + 2m + 1$ có ba điểm cực trị.

Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. Không tồn tại m .

Lời giải

Chọn A.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > \frac{1}{3}$

Áp dụng công thức:

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$

Thay vào ta có phương trình:

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{-27m^3 + 75m^2 - m - 15}{4(3m - 1)}\right)y + \frac{-54m^4 + 75m^3 + 41 - 27m - 11}{4(3m - 1)} = 0 \quad (T)$$

$$D(7;3) \in (T) \Rightarrow 27m^4 - 78m^3 + 92m^2 - 336m + 99 = 0$$

Sử dụng chức năng SOLVE, tìm ra nghiệm duy nhất thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 72. Với các giá trị thực của tham số $m = \frac{a}{b}$ hoặc $m = \frac{c - \sqrt{2}}{d}$ hoặc $m = \frac{e + \sqrt{2}}{f}$ (với

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì đồ thị hàm số: $y = -x^4 + 2mx^2 - 4m + 1$ có ba điểm cực trị,

đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 hình thoi. Giá trị biểu thức
là:

- A. $P = \frac{1}{4}$. B. $P = \frac{3}{4}$ C. $P = \frac{1}{2}$ D. $P = \frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn B.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là: $A(0; 1 - 4m), B(-\sqrt{m}; m^2 - 4m + 1), C(\sqrt{m}; m^2 - 4m + 1)$

Tứ giác $OBAC$ đã có $OB = OC, AB = AC$. Vậy tứ giác $OBAC$ là hình thoi chỉ cần thêm điều kiện

$$OB = AC \Leftrightarrow m + (m^2 - 4m + 1)^2 = m + m^4 \Leftrightarrow (m^2 - 4m + 1)^2 - m^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 4m + 1 - m^2)(m^2 - 4m + 1 + m^2) = 0 \Leftrightarrow (1 - 4m)(2m^2 - 4m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ m = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2 + e^2 + f^2} = \frac{3}{4}$$

HÀM SỐ HỮU TỈ: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số phân thức:

$$y = f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

$$y_0 = \frac{Q'(x_0)}{P'(x_0)}$$

+ Giả sử (x_0, y_0) là điểm cực trị thì

+ Giả sử hàm số có cực đại và cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị ấy là:

$$y = \frac{Q'(x)}{P'(x)} = \frac{2ax + b}{d} = \frac{2a}{d}x + \frac{b}{d}$$

(Lấy đạo hàm tử chia đạo hàm mẫu $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị)

Câu 73. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$. Tìm m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10.

A. $m = 4$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = 2$

Lời giải

Chọn A.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + m}{(1 - x)^2} = 0$$

* Để hàm số có hai cực trị thì có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0$.

Đặt $g(x) = -x^2 + 2x + m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Delta > 0$.

$$\begin{cases} g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \quad \text{có hai nghiệm phân biệt} \quad \begin{cases} \Delta = 4 - 4m > 0 \\ 1 + m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \quad (2)$$

* Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1, x_2 , nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình (1).

* Theo định lý Viet: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2; P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -m$ (3)

* Theo định lý Viet:

* Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có:

$$y_1 = \frac{2x_1 + m}{-1} = -2x_1 - m; y_2 = -2x_2 - m \quad (\text{thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị})$$

$$y = \frac{(x^2 + mx)'}{(1-x)'} = \frac{2x + m}{-1} = -2x - m$$

[thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị:]

* Theo đề bài, ta có: $MN = 10 \hat{=} MN^2 = 100 \hat{=} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 100 \quad (4)$

* Thay (3) vào (4), ta được: $(x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2 = 100 \hat{=} (x_2 - x_1)^2 = 20$

$$\hat{=} (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 20 \hat{=} 4 + 4m = 20 \Rightarrow m = 4$$

* So lại với (2) $\Rightarrow m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 74. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$. Gọi $A; B$ là hai điểm cực trị, định m để diện tích $DOAB$ bằng 2. Với m vừa tìm được, tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB .

- A. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$ C. $m = -1$ D. $m = 2$

Lời giải

Chọn B.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; "x^1 - 1 \quad y' = 0 \hat{=} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m+1 \\ x = -2 \Rightarrow y = m-3 \end{cases}$$

* Ta có: Cho $A(0; m+1); B(-2; m-3)$
Do đó hai điểm cực trị là

$$\begin{aligned} OA &= (x_A - x_O; y_A - y_O) = (0; m+1) \Rightarrow OA = \sqrt{(0)^2 + (m+1)^2} = |m+1| \\ OB &= (x_B - x_O; y_B - y_O) = (-2; m-3) \Rightarrow OB = \sqrt{(-2)^2 + (m-3)^2} = \sqrt{m^2 - 6m + 13} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{DABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(OA \cdot OB)^2 - (OA \cdot OB)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(m+1)^2 (m^2 - 6m + 13) - (m-1)(m-3)} = |m+1|$$

$$S_{DABC} = 2 \hat{=} |m+1| = 2 \hat{=} \begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$$

* Mà

$$y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$$

Câu 75. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách từ hai điểm ấy đến đường thẳng $D: x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

A. $m = -\frac{1}{2}$

B. $m = 1$

C. $m = -1$

D. $m = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D.

* Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x+1)^2} = 0$$

* Để hàm số có cực đại và cực tiểu có 2 nghiệm phân biệt $\Delta > 0$

$$\begin{cases} \Delta = 1^2 - 0 > 0 \\ \Delta' = 3 - 2m > 0 \\ g(-1) = 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m < \frac{3}{2} \quad (1)$$

* Gọi x_1, x_2 là nghiệm của $g(x) = 0$, đó chính là hoành độ cực trị. Khi đó, phương trình đường thẳng nối

$$y = \frac{(x^2 + 2mx + 2)'}{(x+1)'} = \frac{2x + 2m}{1} = 2x + 2m$$

hai điểm cực trị là:

⊢ Hai điểm cực trị của đồ thị là: $A(x_1; 2x_1 + 2m); B(x_2; 2x_2 + 2m)$

* Theo định lý Viét: $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = -2m$

$$\text{Theo đề: } d(A, D) = d(B, D) \Leftrightarrow \frac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_2 + y_2 + 2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2|$$

$$\Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 = (3x_2 + 2m + 2)^2 \Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 - (3x_2 + 2m + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(3(x_1 + x_2) + 4m + 4) = 0 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 4m + 4 = 0, (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

$$\Leftrightarrow 3(-2) + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \quad (1) \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}} \text{ thỏa yêu cầu bài toán.}$$

$$y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$$

Câu 76. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành.

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \cup (-1; +\infty)$

C. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \cup (0; +\infty)$

D. $m \in (-1; +\infty)$

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\hat{U} \quad y' = \frac{mx^2 - 2mx - 5m - 1}{(x-1)^2} = 0$$

* Để hàm số có 2 cực trị có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$.

$$\hat{U} \quad g(x) = mx^2 - 2mx - 5m - 1 = 0 \quad \text{có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \neq 1.$$

$$\hat{U} \quad \begin{cases} a = m - 1 > 0 \\ D' = m^2 + m(5m + 1) > 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} m < -\frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} m < -\frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$y = \frac{(mx^2 + 3mx + 2m + 1)'}{(x-1)'} = 2mx + 3m$$

* Phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị:

* Để 2 điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành $Ox \quad \hat{U} \quad y(x_1) \cdot y(x_2) < 0$

$$\hat{U} \quad (2mx_1 + 3m)(2mx_2 + 3m) < 0 \quad \hat{U} \quad 4m^2 x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$\hat{U} \quad 4m(-2m - 1) < 0 \quad \hat{U} \quad \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases}$$

* Kết hợp với (*) $\Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{1}{6} \right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 77. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2mx + 5}{x-1}$. Tìm tham số thực m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời hai điểm cực trị này nằm về hai phía so với đường thẳng $D: y = 2x$.

A. $m < -2$

B. $m > 2\sqrt{6}$

C. $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$

D. $-\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$

Lời giải

Chọn C.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-x^2 + 2x - (2m - 5)}{(x-1)^2} = 0$$

* Để hàm số có hai cực trị thì có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$.

$$\hat{U} \quad g(x) = -x^2 + 2x - (2m - 5) = 0 \quad (1) \quad \text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \neq 1.$$

$$\hat{U} \quad \begin{cases} a = -1 < 0 \\ D' = -2m + 6 > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \quad \text{có nghiệm} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} -2m + 6 > 0 \\ -2m + 6 \neq 0 \end{cases} \quad \hat{U} \quad m < 3 \quad (2)$$

* Gọi hoành độ cực trị của hàm số là x_1, x_2 , nó cũng chính là 2 nghiệm của phương trình ⁽¹⁾.

* Theo định lý Viet: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2; P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2m - 5$ (3)

* Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số. Ta có:

$$y_1 = -2x_1 + 2m; y_2 = -2x_2 + 2m$$

(thay vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị)

* Để hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ nằm về hai phía so với đường thẳng $D: y = 2x$ thì:

$$(2x_1 - y_1)(2x_2 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (4x_1 - 2m)(4x_2 - 2m) < 0 \Leftrightarrow 16x_1 x_2 - 8m(x_1 + x_2) + 4m^2 < 0$$
 (4)

* Thay (3) vào (4), ta được: $16(2m - 5) - 8m \cdot 2 + 4m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 20 < 0$

$$\Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$$

* So với ⁽²⁾, ta được: $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 78. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -\frac{1}{2}$

B. $m = \frac{7}{5}$

C. $m = -\frac{3}{2}$

D. $m = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi:

$$y' = \frac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3 = 0$$
 (1)

có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 0 \\ \Delta &> 0 \Leftrightarrow D' = -m^2 + 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \neq 1 \quad g(1) = m^2 - 3m + 2 = 0$$

* Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của $g(x) = 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ y_2 = 1 + m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{cases}$$

* Khi đó:

* Ta có: $y_1 y_2 = (1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2})(1 + m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2})$

$$= (1-m)^2 - 4(-m^2 + 3m - 2) = 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow (y_1, y_2)_{\min} = -\frac{4}{5} \text{ khi } m = \frac{7}{5}$$

* So sánh với điều kiện (2) $m = \frac{7}{5}$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 4

CỰC TRỊ HÀM SỐ TRỊ TUYỆT ĐỐI CHỨA THAM SỐ m

- Hàm số $y = f(x)$ có n số điểm cực trị dương thì hàm số $y = f(|x|)$ có $2n+1$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y = f(x)$ có n số điểm cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có m số nghiệm đơn và bội lẻ thì hàm số $y = |f(x)|$ có $n+m$ số điểm cực trị.
- Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Khi đó hàm số $y = |f(x)|$ có:
 - + 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2) \geq 0$
 - + 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x_1).f(x_2) < 0$

Câu 79. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 12.

D. 11.

Lời giải

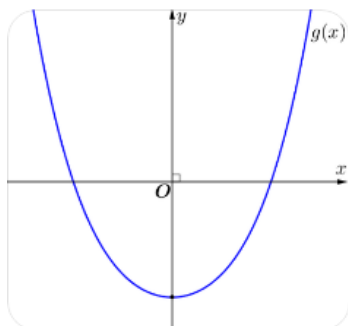
Chọn C.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 2mx^2 + 64x$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 2mx + 64 = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình $g(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm đơn phân biệt.

Do đó hàm số $y=|g(x)|$ có đúng ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị.



Ta có $g'(x)=4x^3-4mx+64$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow m=x^2+\frac{16}{x}$ (vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình $g'(x)=0$).

Xét hàm số $h(x)=x^2+\frac{16}{x}$; $h'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq 12$.

Vậy có 12 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 80. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y=|x^4+ax^2-8x|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn B.

Xét $g(x)=x^4+ax^2-8x$

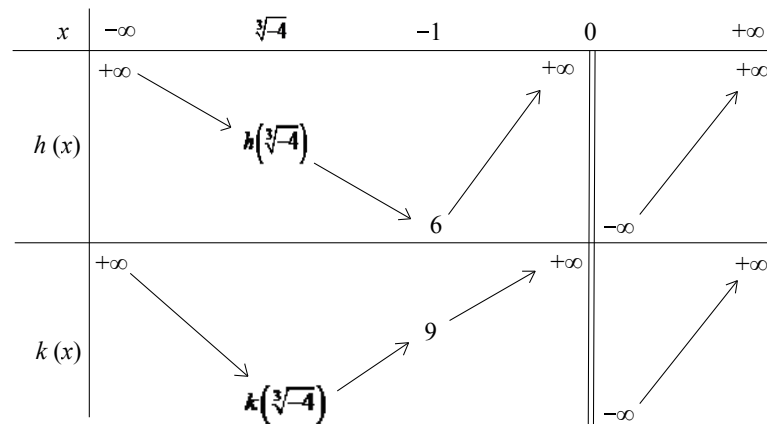
$g'(x)=4x^3+2ax-8$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3+2ax-8=0 \Leftrightarrow -a=\frac{2x^3-4}{x}=2x^2-\frac{4}{x}=h(x)$ (do $x=0$ không là nghiệm)

$g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3+ax-8=0 \Leftrightarrow -a=\frac{x^3-8}{x}=x^2-\frac{8}{x}=k(x) \end{cases}$

$$h'(x) = 4x + \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$k'(x) = 2x + \frac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4}$$



Để hàm số $y = |g(x)|$ có đúng 3 cực trị $\Leftrightarrow -a \leq 6 \Leftrightarrow a \geq -6$.

Mà a là số nguyên âm nên $a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Câu 81. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 3 + m|$ có ba điểm cực trị.

A. $m = 3$ hoặc $m = -1$.

B. $m \geq 1$ hoặc $m \leq -3$.

C. $1 \leq m \leq 3$.

D. $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn D.

Nhận xét: Dùng phép biến đổi đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối và nhận xét hình dạng đồ thị thông qua bảng biến thiên để kết luận về cực trị hàm số.

Phân tích: Xét hàm số $y = g(x) = x^3 + 3x^2 - 3 + m$ trên $\mathbb{R}$. Hệ số $a = 1 > 0$.

Hàm số có $y' = g'(x) = 3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. Hàm số $y = g(x)$ luôn có hai cực trị.

Nếu $g(x) = 0$ có 3 nghiệm hay trục hoành giao với đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì hàm số $y = |g(x)|$ có năm cực trị.

Nếu $g(x) = 0$ có một hoặc hai nghiệm thì hàm số $y = |g(x)|$ sẽ có ba cực trị.

Điều kiện: $g(x_{cd}) \cdot g(x_{ct}) \geq 0 \Leftrightarrow g(0) \cdot g(-2) \geq 0$ hay $(-3+m)(1+m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

Câu 82. Tổng các giá trị của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị bằng

A. -2016.

B. -496.

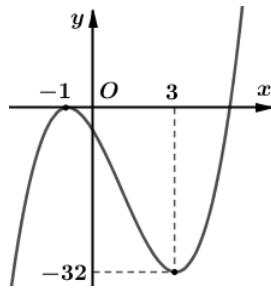
C. 1952.

D. 2016.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ như hình bên dưới



Ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị nên $f(x) + \frac{m}{2}$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\cup$ số giao điểm của đồ thị $f(x) + \frac{m}{2}$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) + \frac{m}{2}$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhưng phải nhỏ

hơn 32 đơn vị $\frac{3}{4} \cdot 32 < 0 < \frac{m}{2} < 32 \Rightarrow 0 < m < 64 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 63\}$

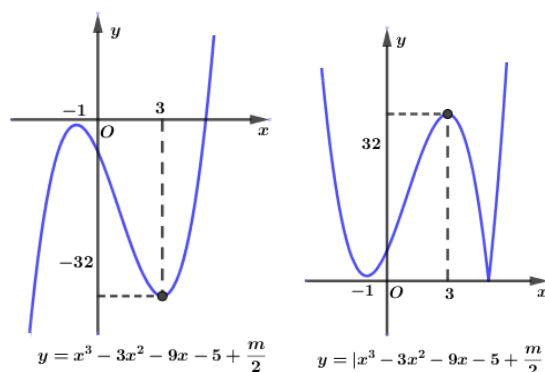
$\frac{3}{4} \cdot 32 \leq m = 2016$. Chọn D.

Cách 2: Biện luận. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số

$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ lên trên $\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m > 0$ hoặc tịnh tiến xuống dưới $-\frac{m}{2}$ đơn vị nếu $m < 0$.

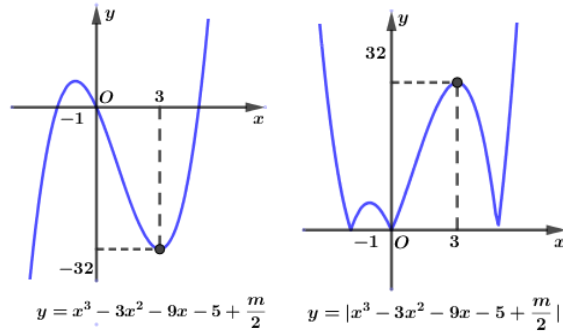
Có 3 trường hợp:

TH1. $m \leq 0$, ta có đồ thị như sau



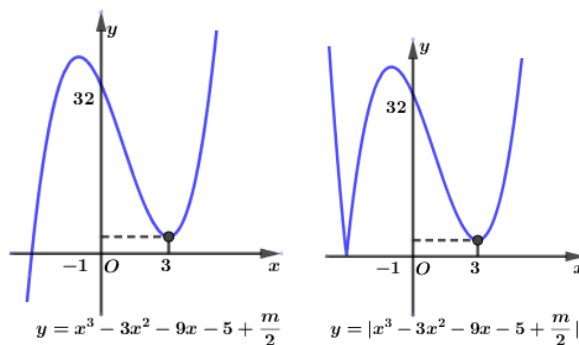
Hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

TH2. $0 < \frac{m}{2} < 32$, ta có đồ thị như sau



Hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có năm cực trị. Thỏa yêu cầu bài toán.

TH3. $\frac{m}{2} \geq 32$, ta có đồ thị như sau



Hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có ba cực trị. Không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ 0 < \frac{m}{2} < 32 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{1, 2, \dots, 63\}$.

Vậy tổng các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là 2016.

Câu 83. Cho hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 7.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Để $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\hat{=} f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. (*)

Xét $f(x) = 0 \hat{=} (x - 1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0 \hat{=} \begin{cases} x = 1 \\ mx^2 - 2mx + m - 2 = 0 \end{cases}$ (1)

$$\begin{array}{l} \Delta = m^2 - m(m - 2) > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{array}$$

Do đó (*) $\cup$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác

$\hat{=} m > 0 \wedge \frac{3}{4} < \frac{m-2}{m} < \frac{3}{2} \wedge m \in \{1; 2; 3; \dots; 10\}$.

Cách 2: Hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x - 1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = mx^2 - 2mx + m - 2 = 0 \end{cases}$ (2)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m - 2) > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m > 0$. Vì m nguyên và $m \in [-10; 10]$, nên $m \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

Vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 84. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị?

A. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$

B. $\left[0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$

C. $(-\infty; 0]$

D. $(1; +\infty)$

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $y = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số

$y = x^3 - (2m + 1)x^2 + 3mx - 5$ có hai điểm cực trị **không âm**.

Vậy phương trình $3x^2 - 2(2m + 1)x + 3m = 0$ khi: $\begin{cases} \Delta' = 4m^2 - 5m + 1 > 0 \\ S = \frac{2(2m + 1)}{3} > 0; P = m \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq m < \frac{1}{4} \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = (m^4 + 1)x^4 + (-2^{m+1}m^2 + 4)x^2 + 4^m + 16$ với m là tham số thực. Số cực trị của

đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ là

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Ta có: $y = |f(x) - 1| = \sqrt{(f(x) - 1)^2}$

Suy ra $y' = \frac{f'(x) \cdot [f(x) - 1]}{\sqrt{(f(x) - 1)^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) - 1 = 0 \end{cases}$

$f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt vì $-(m^4+1)(2^{m+1}.m^2+4)<0$ với mọi m .

$$f(x)-1=0 \text{ vô nghiệm do } \Delta'=(2^m.m^2+2)^2-(m^4+1).(4^m+15)=4.2^m.m^2+4-15m^4-4^m-15 \\ =-(2^m-m^2)^2-11m^4-11<0$$

Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị.

Cách 2. Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị (do hệ số a và b trái dấu) $f(x)-1$ cũng có 3 điểm cực trị.

Phương trình $f(x)-1=0$ vô nghiệm (đã giải thích ở trên).

Vậy hàm số $g(x)=|f(x)-1|$ có 3 cực trị.

Cách 3: Đặc biệt hóa ta cho $m=0$, khi đó ta được hàm $f(x)-1=x^4-4x^2+16$.

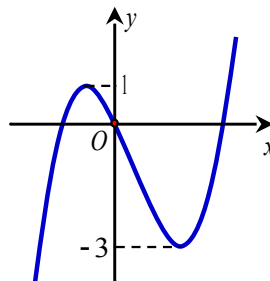
$$\text{Đặt } g(x)=f(x)-1=x^4-4x^2+16 \Rightarrow g'(x)=4x^3-8x, g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-8x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có BBT

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				16				$+\infty$
			12				12		

Do đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm hoàn toàn bên trên trục hoành nên đồ thị hàm số $y=|g(x)|$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y=g(x)$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=|f(x)-1|$ là 3.

Câu 86. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=|f(x)+m|$ có 3 điểm cực trị là

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

D. $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1:

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng $A+B$ với

- A là số điểm cực trị của hàm $f(x)$
- B là số giao điểm của $f(x)$ với trục hoành (không tính các điểm trùng với A ở trên)

Áp dụng: Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x)+m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\cup$ số giao điểm của đồ thị $f(x)+m$ với trục hoành là 1.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x)+m$ với trục hoành là 1, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 1 đơn vị $\frac{3}{4} \Rightarrow m \leq -1$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị $\frac{3}{4} \Rightarrow m \geq 3$.

Vậy $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

Cách 2:

- Đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ có được khi ta tịnh tiến (lên trên hoặc xuống dưới) đồ thị hàm số $y=f(x)$ theo phương trục tung $|m|$ đơn vị

- Đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ gồm hai phần.

Phần 1: Là phần đồ thị nằm phía trên trục hoành của hàm số $y=f(x)+m$

Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành của hàm số $y=f(x)+m$ qua trục hoành.

Nhận xét:

- Ứng với mỗi điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ sẽ cho ta một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ (các điểm cực trị tương ứng đồ của hai đồ thị sẽ trùng nhau hoặc đối xứng nhau qua trục hoành)

- Mỗi giao điểm của đồ thị của hàm số $y=f(x)+m$ với trục hoành sẽ tạo thành một điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)+m|$

Do đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ đã có hai điểm cực trị nên để đồ thị hàm số $y=|f(x)+m|$ có ba điểm cực trị, xảy ra hai trường hợp sau:

TH1: Đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ có đúng một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$

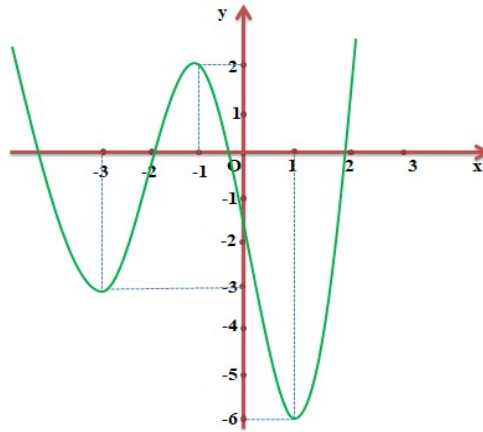
$$\Leftrightarrow (m+1) \cdot (m-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$$

TH2: Đồ thị hàm số $y=f(x)+m$ có một điểm cực trị thuộc trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} = 0$

$$\Leftrightarrow (m+1).(m-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=3 \end{cases}$$

Kết hợp cả hai trường hợp ta có $m \geq 3$ hoặc $m \leq -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 87. Hình vẽ là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 9.

B. 12.

C. 18.

D. 15.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Số cực trị của hàm số $y=|f(x-1)+m|$ bằng số cực trị của hàm $y=f(x-1)$ hay $y=f(x)$ cộng với số nghiệm đơn của phương trình $f(x-1)+m=0(*)$

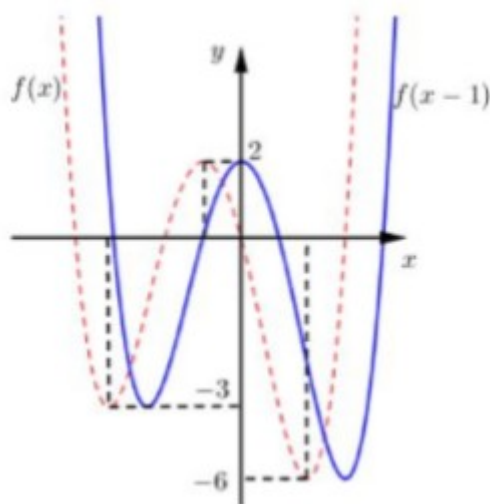
Phương trình (*): $f(x-1)+m=0 \Leftrightarrow f(x-1)=-m \Leftrightarrow f(t)=-m, t=x-1$

Yêu cầu bài toán xảy ra khi phương trình (*) có hai nghiệm đơn phân biệt

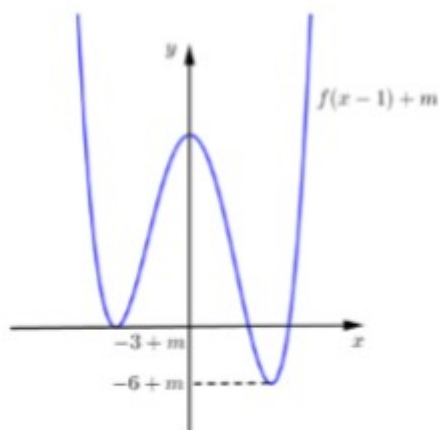
Do đó $-6 < -m \leq -3$ hoặc $2 \leq -m$. Vậy $m \in \{3; 4; 5\}$.

Cách 2:

Đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ nhận được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang phải 1 đơn vị nên không làm thay đổi tung độ các điểm cực trị.



Đồ thị hàm số $y = f(x-1) + m$ nhận được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị nên ta có: $y_{CD} = 2 + m, y_{CT} = -3 + m, y_{CT} = -6 + m$



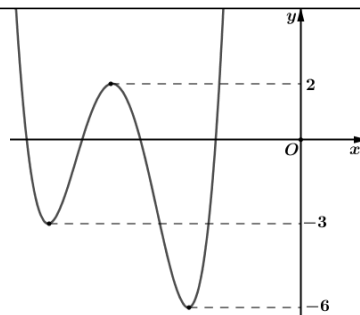
Đồ thị hàm số $y = |f(x-1) + m|$ nhận được bằng cách từ đồ thị hàm số $y = f(x-1) + m$ lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành và xóa đi phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Để đồ thị hàm số có 5 cực trị

$$\Leftrightarrow -6 + m < 0 \leq -3 + m \Leftrightarrow 3 \leq m < 6 \Rightarrow m \in [3; 4; 5]$$

$$\Rightarrow S = [3; 4; 5] \Rightarrow 3 + 4 + 5 = 12.$$

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x+2018) + m|$ có 7 điểm cực trị khi

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A.

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018) + m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m$ với trục hoành là 4.

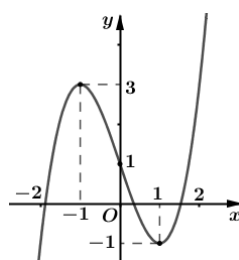
Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m$ với trục hoành là 4, ta cần đồng thời

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\Leftrightarrow m > -2$

Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\Leftrightarrow m < 3$.

Vậy $-2 < m < 3 \Leftrightarrow m \in (-2; 3)$. Chọn A.

Câu 89. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

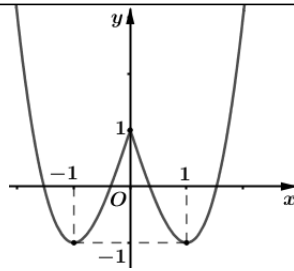
C. 3.

D. 5.

Lời giải

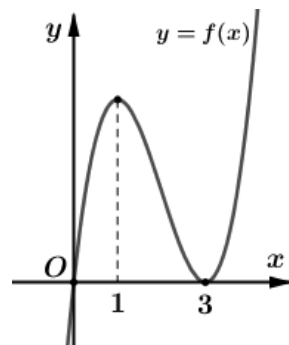
Chọn C.

Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến. Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $f(x)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > \frac{1}{4}$.

B. $m < \frac{1}{4}$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Chọn B.

Xét $g(x) = f^2(x) + f(x) + m$ $g'(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x) = f'(x)(2f(x) + 1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Ta tính được $\begin{cases} g(1) = f^2(1) + f(1) + m > m \\ g(3) = m \\ g(a) = m - \frac{1}{2} \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	a	1	3	$+\infty$
g'	-	0	+	0	-
g					

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x) = \left| f^2(x) + f(x) + m \right| = \left| \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + m - \frac{1}{4} \right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc) $\Leftrightarrow m^3 \geq \frac{1}{4}$.