TRƯỜNG THCS XUÂN PHÚ **ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG**

MÔN: TOÁN 8

Thời gian: 150 phút

Bài 1. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2-2x)(x^2-2x-1)-6$

b) Đa thức $f(x)=4x^3+ax+b$ chia hết cho các đa thức $x-2; x+1$. Tính $2a-3b$

Bài 2. (2 điểm)

a) Cho $a_n=1+2+3+...+n$. Chứng minh rằng a_n+a_{n+1} là một số chính phương

b) Chứng minh rằng vơi mọi số tự nhiên n thì phân số $\dfrac{10n^2+9n+4}{20n^2+20n+9}$ tối giản

Bài 3. (3 điểm)

a) Cho $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Hãy rút gọn phân thức : $P=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

b) Tìm tích: $M=\dfrac{1^4+4}{3^4+4}.\dfrac{5^4+4}{7^4+4}.\dfrac{9^4+4}{11^4+4}....\dfrac{17^4+4}{19^4+4}$

Bài 4. (4 điểm)

a) Cho $x=by+cz; y=ax+cz; z=ax+by$ và $x+y+z\neq 0; xyz\neq 0$.

CMR: $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2$

b) Cho $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0,$ tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}$

Bài 5. (3 điểm) Cho biểu thức : $P=\dfrac{x^2+x}{x^2-2x+1}:\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2-x^2}{x^2-x}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x để $P<1$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x>1$

Bài 6. (3 điểm). Cho hình vuông $ABCD$, gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh rằng: $CE\perp DF$

b) Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng: $AM=AD$

Bài 7. (3 điểm) Cho tam giác ABC. Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông $ABDE$, $ACFH$.

a) Chứng minh rằng $EC=BH; EC\perp BH$

b) Gọi M, N thứ tự là tâm của các hình vuông $ABDE, ACFH.$ Gọi I là trung điểm của $BC.$ Tam giác MNI là tam giác gì ? Vì sao ?

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $(x+1)(x-3)(x^2-2x+2)$

b) Đa thức $f(x)=4x^3+ax+b$ chia hết cho các đa thức $x-2; x+1$ nên:

$f(2)=0 \Rightarrow 32+2a+b=0(1)$

$f(-1)=0 \Rightarrow -4-a+b=0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta tìm được $a=-12; b=-8$

Vậy $2a-3b=0$

Bài 2.

a) Ta có: $a_{n+1}=1+2+3+.....+n+n+1$

$a_n+a_{n+1}=2(1+2+3+.....+n)+n+1=2.\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=n^2+2n+1$

$=(n+1)^2$ là một số chính phương.

b) Gọi d là ƯCLN của $10n^2+9n+4$ và $20n^2+20n+9$

$\Rightarrow \begin{cases} 10n^2+9n+4 \vdots d \\ 20n^2+20n+9 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20n^2+18n+8 \vdots d \\ 20n^2+20n+9 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 2n+1 \vdots d$ $\Rightarrow d$ là số tự nhiên lẻ

Mặt khác : $2n+1 \vdots d \Rightarrow 4n^2+4n+1 \vdots d \Rightarrow 20n^2+20n+5 \vdots d \Rightarrow 4 \vdots d$, mà d lẻ nên $d=1$

Vậy phân số trên tối giản

Bài 3.

a) Từ $x^3+y^3+z^3=3xyz$ chỉ ra được $x+y+z=0$ hoặc $x=y=z$

$TH1: x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z; x+z=-y; y+z=-x \Rightarrow P=-1$

$TH2: x=y=z \Rightarrow P=\dfrac{1}{8}$

b) Nhận xét được: $n^4+4=\left[(n-1)^2+1\right]\left[(n+1)^2+1\right]$. Do đó:

$$M=\frac{1.(2^2+1)}{(2^2+1).(4^2+1)}.\frac{(4^2+1).(6^2+1)}{(6^2+1).(8^2+1)}......\frac{(16^2+1).(18^2+1)}{(18^2+1).(20^2+1)}=\frac{1}{20^2+1}=\frac{1}{401}$$

Bài 4.

a) Từ giả thiết $\Rightarrow 2cz+z=x+y\Rightarrow 2cz=x+y-z$

$$\Rightarrow c=\frac{x+y-z}{2z}\Rightarrow c+1=\frac{x+y+z}{2z}\Rightarrow \frac{1}{c+1}=\frac{2z}{x+y+z}$$

Tương tự: $\frac{1}{1+a}=\frac{2x}{x+y+z};\frac{1}{1+b}=\frac{2y}{x+y+z}$. Khi đó: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$

b) Từ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0\Rightarrow \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz}$

Khi đó:

$$P=\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=\frac{xyz}{x^3}+\frac{xyz}{y^3}+\frac{xyz}{z^3}=xyz.\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)=xyz.\frac{3}{xyz}=3$$

Bài 5. a) ĐKXĐ: $x\neq 0;x\neq 1;x\neq -1$

Rút gọn P ta có: $P=\frac{x^2}{x-1}$

b) $P<1\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}<1\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}-1<0\Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x-1}<0\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{x-1}<0$

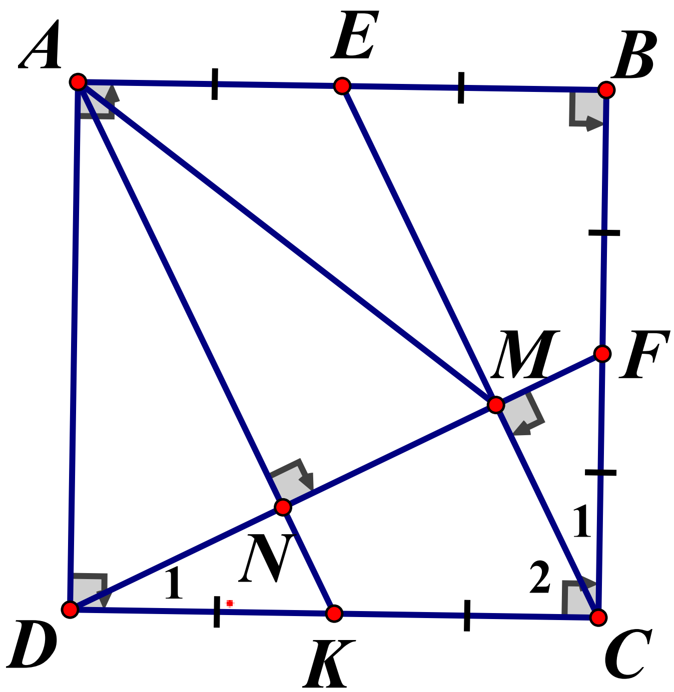
$\Leftrightarrow x-1<0\Leftrightarrow x<1$

Vậy với $x<1$ và $x\neq 0;x\neq -1$ thì $P<1$

c) Ta có: $P=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+2$

Khi $x > 1; x - 1 > 0.$ Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x - 1 + \frac{1}{x - 1} \geq 2$. Dấu " =" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2.$ Vậy GTNN của P bằng $4 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 6.



a) Chứng minh được $\Delta CBE = \Delta DFC\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$

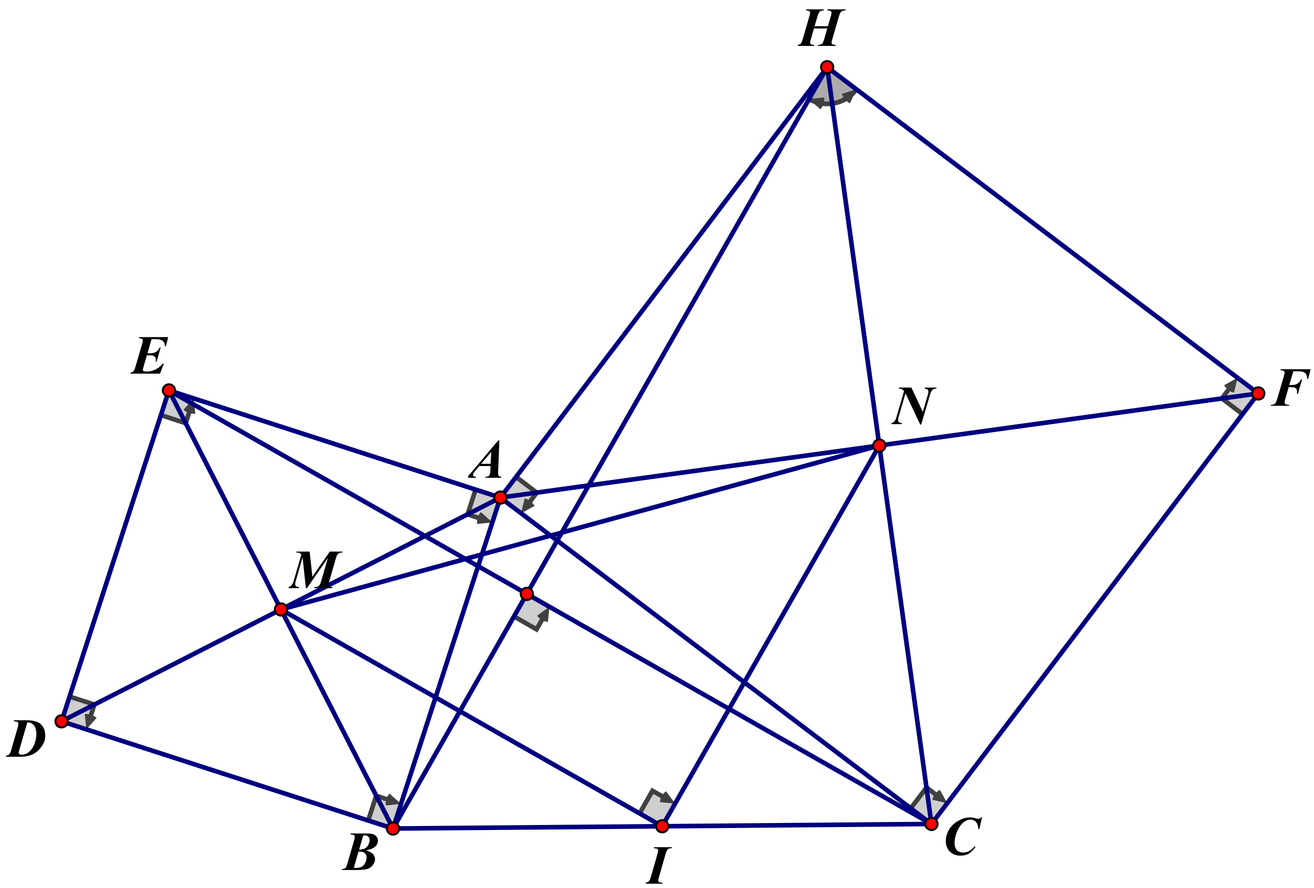
Lại có: $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{C_2} = 90^0 \Rightarrow CE \perp DF$

b) Gọi K là trung điểm của CD. Chứng mnh được tứ giác $AECK$ là hình bình hành suy ra $AK // CE$

Gọi N là giao điểm của AK và $DF.\Delta DCM$ có $DK = KC$ và $KN // CM$ nên N là trung điểm của DM. Vì $CM \perp DM$ (câu a), $KN // CM \Rightarrow KN \perp DM$

Tam giác ΔADM có AN là đường cao đồng thời là trung tuyến nên là tam giác cân tại A.
$\Rightarrow AM = AD$

Bài 7.



a) Chứng minh được: $\Delta EAC = \Delta BAH(c.g.c) \Rightarrow EC = BH, \widehat{AEC} = \widehat{ABH}$

Gọi K và O thứ tự là giao điểm của EC với BA và BH

Xét ΔAEK và ΔOBK có: $\widehat{AEK} = \widehat{OBK}; \widehat{AKE} = \widehat{OKB} \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{BOK}$

$\Rightarrow \widehat{BOK} = 90^0$. Vậy $EC \perp BH$

b) Ta có: $MI // EC; MI = \frac{1}{2}EC; IN // BH; IN = \frac{1}{2}BH$

Mà $EC \perp BH$ và $EC = BH$ nên $MI = IN$ và $MI \perp IN$

Vậy tam giác MIN vuông cân tại I