

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

SỐ BÁO DANH:.....

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)  
(Đề thi gồm có 01 trang)**Câu 1 (2,0 điểm):**

a) Rút gọn các biểu thức:  $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

b) Tính giá trị biểu thức :

$$Q = \left( \sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{6 - \sqrt{35}} - \sqrt{\frac{7}{2}} \right)^2 + \left( \sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{6 + \sqrt{35}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2$$

**Câu 2 (2,0 điểm):**

a) Giải phương trình:  $(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 4$

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + xy - x = 2y^2 + 2y \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

**Câu 3 (1,5 điểm):** Cho  $x, y, z > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{5x^2 + 6xy + 5y^2}}{x + y + 2z} + \frac{\sqrt{5y^2 + 6yz + 5z^2}}{y + z + 2x} + \frac{\sqrt{5z^2 + 6zx + 5x^2}}{z + x + 2y}$$

**Câu 4 (3,5 điểm):** Cho nửa đường tròn (O; R), đường kính BC cố định. A thay đổi trên nửa đường tròn sao cho  $AB > AC$ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC và E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Đường thẳng EF cắt nửa đường tròn (O) tại P, Q (E nằm giữa P và F).a) Chứng minh AO vuông góc với EF và  $AP^2 = AE \cdot AB$ . Từ đó suy ra tam giác APH cân tại A.

b) Gọi D là giao điểm của PQ và BC, K là giao điểm của AD với nửa đường tròn (O) (K khác A). Chứng minh tứ giác AEFK nội tiếp.

c) Đặt  $BH = x$ . Tính diện tích tam giác ABH theo R, x. Tìm vị trí của điểm A trên nửa đường tròn (O) để diện tích tam giác ABH lớn nhất.**Câu 5 (1,0 điểm):** Tìm  $x, y$  là số nguyên dương để  $P = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  là một số nguyên tố.

----- HẾT -----



**HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN CHẤM**  
**ĐỀ THI HSG LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 - 2017**  
**Khóa ngày 22 - 03 - 2017**

\* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết, rõ ràng.

\* Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.

\* Điểm thành phần của mỗi câu nói chung phân chia đến 0.25 điểm. Đối với điểm thành phần là 0.5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0.25 điểm.

\* Học sinh không vẽ hình đối với Câu 4 thì cho điểm 0 đối với Câu 4. Trường hợp học sinh có vẽ hình, nếu vẽ sai ở ý nào thì cho điểm 0 ở ý đó.

\* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng câu.

\* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.

Câu	Nội dung	Điểm
<b>1</b>		<b>2,0 điểm</b>
<b>1a</b>	$P = \frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$	<b>0,25</b>
	$= \frac{3x+3\sqrt{x}-3 - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	<b>0,25</b>
	$= \frac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	<b>0,5</b>
<b>1b</b>	$Q = \left( \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{6-\sqrt{35}} - \sqrt{\frac{7}{2}} \right)^2 + \left( \sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{6+\sqrt{35}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2$	<b>0,5</b>
	$= \frac{1}{2} \left( \sqrt{8+2\sqrt{15}} + \sqrt{12-2\sqrt{35}} - \sqrt{7} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{12+2\sqrt{35}} + \sqrt{3} \right)^2$	<b>0,25</b>
	$= \frac{1}{2} \left( \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{7} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{3} \right)^2$ $= \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$	<b>0,25</b>
<b>2</b>		<b>2,0 điểm</b>
<b>2a</b>	ĐK: $x \geq 2$ . Đặt $a = \sqrt{x+2}; b = \sqrt{x-2}; a, b \geq 0$ .	<b>0,25</b>
	Ta có phương trình: $(a-b)(1+ab) = a^2 - b^2$	<b>0,25</b>
	$(a-b)(1+ab-a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(1-a)(1-b) = 0$ $\Leftrightarrow a = b \vee a = 1 \vee b = 1$	<b>0,25</b>
	TH1: $a = b \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{x-2}$ (VN).	<b>0,25</b>



	<p>TH2: <math>a = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x = -1</math> (loại).</p> <p>TH3: <math>b = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 3</math>.</p> <p>Vậy phương trình có nghiệm <math>x=3</math>.</p>	
	ĐK: $x \geq 1; y \geq 0$ .	0,25
	$\begin{cases} x^2 + xy - x = 2y^2 + 2y & (1) \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y} = 2 & (2) \end{cases}$	0,25
2b	Ta có: $x^2 + xy - x = 2y^2 + 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)x - 2y^2 - 2y = 0$	
	$\Delta = (y-1)^2 - 4(-2y^2 - 2y) = (3y+1)^2$ Do đó phương trình (1) có hai nghiệm: $x = y+1 \vee x = -2y$ (loại do ĐK).	0,25
	Thay vào phương trình (2): $2\sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow y = 1$ . Vậy hệ phương trình có nghiệm: (2,1).	0,25
3		1,5
	Ta có:	0,5
	$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4(x+y)^2 + (x-y)^2 \geq 4(x+y)^2$	
	Suy ra $P \geq \frac{2(x+y)}{x+y+2z} + \frac{2(y+z)}{y+z+2x} + \frac{2(z+x)}{z+x+2y}$	0,25
	Đặt $a = x+y; b = y+z; c = z+x; a, b, c > 0$	
	Ta có:	
	$P \geq \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} = 2\left(\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3\right)$ $= (a+b+b+c+c+a)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 6 \geq 9 - 6 = 3$	0,5
	GTNN của P là 3 khi $x=y=z$	0,25
4		3,5 điểm
4a	Hình vẽ để chứng minh câu a cho 0,5	
		0,5
	Gọi I là giao điểm của AO và EF.	0,5

	<p>Ta có AEHF là hình chữ nhật nên <math>\widehat{AEI} = \widehat{HAB}; \widehat{EAI} = \widehat{ABH}</math>  Mà: <math>\widehat{HAB} + \widehat{ABH} = 90^\circ</math>, suy AO vuông góc với EF.</p>	
	<p>Hai tam giác ABP và APE đồng dạng (góc PAB chung và hai góc ABP và APE bằng nhau do cung AP bằng cung AQ). Suy ra:  <math>\frac{AP}{AE} = \frac{AB}{AP} \Rightarrow AP^2 = AB \cdot AE = AH^2 \Rightarrow AP = AH</math>  Vậy tam APH cân tại A.</p>	0,5
4b	<p>Gọi J là giao điểm của AH và EF. J là trực tâm tam giác OAD nên OJ vuông góc với AK.</p>	0,5
	<p>Suy ra OJ đi qua trung điểm AK, do đó OJ là trung trực AK nên JA=JK=JE=JF.  Vậy AEFK nội tiếp.</p>	0,5
4c	<p>Đặt <math>BH = x; (R &lt; x &lt; 2R)</math>. Ta có <math>AH = \sqrt{HB \cdot HC} = \sqrt{x(2R - x)}</math>.  dt (ABH) = <math>\frac{1}{2} BH \cdot AH = \frac{1}{2} x \sqrt{x(2R - x)}</math></p>	0,5
	$= \frac{1}{2} \sqrt{3} x \sqrt{\frac{x}{3}(2R - x)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{3} x \frac{2R - x + \frac{x}{3}}{2}$	
	$= \frac{1}{2} \sqrt{3} x \left(R - \frac{x}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{x}{3} \left(R - \frac{x}{3}\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \left(\frac{x}{3} + R - \frac{x}{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$	0,25
	<p>Dấu bằng xảy ra khi <math>x=3R/2</math>, khi đó A là giao điểm của đường trung trực OC với nửa đường tròn (O).</p>	0,25
5		1,0 điểm
	<p>Ta có: <math>P = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 (y^2 - P) = P y^2</math></p>	0,25
	<p>Suy ra: <math>P y^2 : x^2 \Rightarrow y^2 : x^2 \Rightarrow y : x</math></p>	0,25
	<p>Tương tự: <math>x : y \Rightarrow x = y</math></p>	0,25
	<p>Do đó: <math>x^2 = 2P \Rightarrow x^2 : 2 \Rightarrow P : 2 \Rightarrow P = 2 \Rightarrow x = y = 2</math>.</p>	0,25