SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
(Bình Dương)
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
Năm học 2023-2024
Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 18/3/2022
Thời gian: 150 phút (không tính thời gian phát đề)

Câu 1: (4 điểm)

1. Chứng minh rằng:biểu thức:A = $\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$ với a>0. Áp dụng đê tính giá trị biểu thức B= $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$

2. Tính giá trị của biểu thức C = (x^{2022}-8$x^{2021}$$+11x^{2020}$)+($y^{2022}-8y^{202}+11y^{2020}$). Biết x=4+$\sqrt{5}$ và y=4-$\sqrt{5}$

Câu 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: 2x^2 - 2x + 1 = (2x + 1)($\sqrt{x^2-x+2}$- 1)

2. Giải hệ phương trình:$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{2022}=\sqrt{4044}\\ \sqrt{2022-x}+\sqrt{y}=\sqrt{4044}\end{cases}$

Câu 3: (6 điểm)

1. Tìm số tự nhiên n biết tích các chữ số của n bằng 2n^2- 10n - 22 .

2. Tìm các số thực a, b sao cho đa thức 4x^4- x^3- 2a x^2+5bx-6 chia hết cho đa thức

x^2- 2x – 3

3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: xy + yz + 2x + 2xyz = 1. Chứng minh rằng x + y + z ≥$\frac{3}{2}$

Câu 4: (6 điểm)

Cho đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là trung điểm của bản kính OB và (I) làđường tròn đường kính AC, Trên đường tròn (O) lấy hai điểm tùy ý phân biệt M,N khác A và B. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AM và AN với đường tròn (1).

1. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với dường thẳng PQ.
2. Vẽ tiếp tuyển MẸ của (1) với E là tiếp điểm. Chứng minh: ME^2 = MA.MP.
3. Vẽ tiếp tuyến NF của (1) với F là tiếp điểm. Chứng minh:$\frac{ME}{NF}=\frac{AM}{AN}$

HẾT

Thí sinh không được mang máy tính và tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI

Câu 1: (4 điểm)

1. Chứng minh rằng:biểu thức:A = $\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$ với a>0. Áp dụng đê tính giá trị biểu thức B= $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$

2. Tính giá trị của biểu thức C = (x^{2022}-8$x^{2021}+11x^{2020}$)+($y^{2022}-8y^{202}+11y^{2020}$). Biết x=4+$\sqrt{5}$ và y=4-$\sqrt{5}$

1) với a>0 ta có

$$\left(1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)^2=1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+2.\left(1.\frac{1}{a}-1.\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a(a+1)}\right)=1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}$$

Suy ra $\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$

Áp dụng B=$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}$

B=$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+1+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}$

B=100-$\frac{1}{100}=\frac{9999}{100}$

2. Ta có C = (x^{2022}-8$x^{2021}+11x^{2020}$)+($y^{2022}-8y^{202}+11y^{2020}$)

C=$x^{2020}(x^2-8x+11)+y^{2020}(y^2-8x+11)$

Với $x^2-8x+11=(4+\sqrt{5})^2-8(4+\sqrt{5})+11=21+8\sqrt{5}-32-8\sqrt{5}+11=0$

Với $y^2-8y+11=(4-\sqrt{5})^2-8(4-\sqrt{5})+11=21-8\sqrt{5}-32+8\sqrt{5}+11=0$

Do đó C=0

Câu 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: 2x^2 - 2x + 1 = (2x + 1)($\sqrt{x^2-x+2}$- 1)

2. Giải hệ phương trình:$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{2022}=\sqrt{4044}\\ \sqrt{2022-x}+\sqrt{y}=\sqrt{4044}\end{cases}$

1) ta có 2x^2 - 2x + 1 = (2x + 1)($\sqrt{x^2-x+2}$- 1)(1)

⇔2x^2 - 2x + 1 = (2x + 1)$\sqrt{x^2-x+2}$- 1

⇔$2x^2+2x$=(2x + 1)$\sqrt{x^2-x+2}$

⇔$4x^4+8x^2+4=(4x^2+4x+1)(x^2-x+2)$

⇔$4x^4+8x^2+4=$¿$4x^4$-8x^3+8x^2+4$x^3-4x^2+8x+x^2-x+2$

⇔$3x^2-7x+2=0$

Δ=49-4.3.2=25

Do đó $x_1=\frac{7-\sqrt{25}}{2.3}=\frac{1}{3};x_2=\frac{7+\sqrt{25}}{2.3}=2$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm S=$\left\{\frac{1}{3};2\right\}$

2. ĐKXD 0≤x;y≤4044

Ta có $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{2022}=\sqrt{4044}\\ \sqrt{2022-x}+\sqrt{y}=\sqrt{4044}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{2022-y}-\sqrt{2022-x}-\sqrt{y}=0\,(2)\\ \sqrt{2022-x}+\sqrt{y}=\sqrt{4044}\end{cases}$

Giải (2) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{2022-y}-\sqrt{2022-x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{x-y}{\sqrt{2022-y}-\sqrt{2022-x}}=0$

$\Leftrightarrow$(x-y)$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{2022-y}-\sqrt{2022-x}}\right)=0$

$\Leftrightarrow$x-y=0 (do $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{2022-y}-\sqrt{2022-x}}\neq 0)$

$\Leftrightarrow$x=y

Thay x=y vào phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{2022-y}=\sqrt{4044}$*, ta được*

$\sqrt{x}+\sqrt{2022-x}=\sqrt{4044} \Leftrightarrow 2022+2\sqrt{x(2022-x)}=4044 \Leftrightarrow$x(2022-x)=$1011^2$

$\Leftrightarrow x^2-2022x+1011^2=0 \Leftrightarrow (x-1011)^2=0 \Leftrightarrow$x=1011

Suy ra y=x=101(nhận)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x;y)=(1011;1011)

Câu 3: (6 điểm)

1. Tìm số tự nhiên n biết tích các chữ số của n bằng $2n^2$- 10n - 22 .

2. Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $4x^4$- x^3- 2a x^2+5bx-6 chia hết cho đa thức

x^2- 2x – 3

3. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: xy + yz + 2x + 2xyz = 1. Chứng minh rằng x + y + z ≥$\frac{3}{2}$

1. Ta thấy n^2- 10n - 22 = $(n-5)^2$- 47

Do 47 không là số chính phương nên $(n-5)^2$ - 47 không thể phân tích thành tích của hai số tự nhiên.

Mà theo đề bài n² - 10n-22 là tích của các chữ số của an và

n^2- 10n – 22= 1.2.3.....(n²-10-22)

Suy ra trong n có chữ số 1 và chữ số có giá trị bằng n² – 10n-22

Mà 1≤n²-10-22≤9

=> 0≤ n ≤5+1$\sqrt{14}$

=>0<n≤12

Vì trong n có chữ số 1 và chữ số có giá trị bằng n² -10n – 22 nên n ϵ (12;11;10)

Nếu n = 12 thì n²-10n-22 = 2 do đó n = 12 thỏa yêu cầu bài toán

Nếu n = 11 thì n²-10n-22=-11 do đó = 1 không thỏa yêu cầu bài toán

Nếu n = 10 thì n^2- 10n – 22 =-22 do đó n = 12 không thỏa yêu cầu bài toán

Vậy n = 12 thì tích các chữ số của n bằng n²-10-22.

2. Ta thấy x^2- 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)

Do đó đa thức A (x) = $4x^4$- $11x^3$ - 2a x^2+ 5bx - 6 chia hết cho đa thức x^2-2x-3 khi đa thức A(x)=$4x^4$-$11x^3$$-¿$2a$x^2$+5bx-6 chia hết cho đa thức x-3 và x+1

Suy ra $\begin{cases} A(3)=0 \\ A(-1)=0 \end{cases}$ *khi đó* $\begin{cases} -2a-5b=-9 \\ -18a+15b=-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5b=9 \\ -6a+5b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

3. Vì x, y, z là các số thực dương nên ta có: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)(1)$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương x,y,z ta có
x+y+z≥$\sqrt[3]{xyz}=¿(x+y+z)^3 \geq 27xyz=¿\frac{2}{9}(x+y+z)^3 \geq 6xyz(2)$

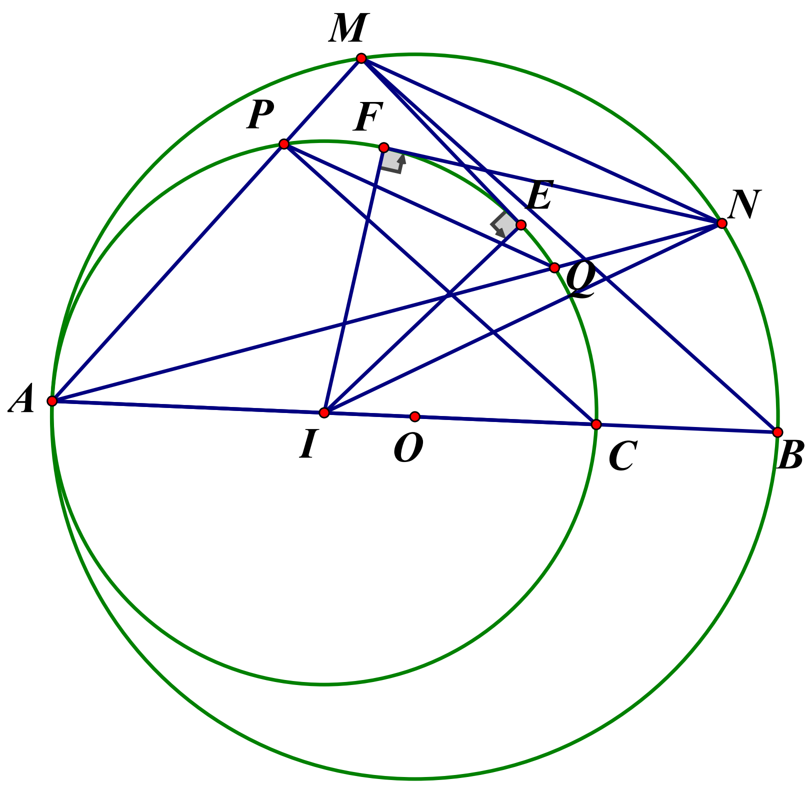
từ (1) và (2) suy ra $(x+y+z)^2+\frac{2}{9}(x+y+z)^3 \geq 3(xy+yz+zx)+6xyz$

=>$(x+y+z)^2+\frac{2}{9}(x+y+z)^3 \geq 3(xy+yz+zx+2xyz)$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+\frac{2}{9}(x+y+z)^3 \geq 3$
$\Leftrightarrow 9(x+y+z)^2+2(x+y+z)^3-27 \geq 0$
$\Leftrightarrow [2(x+y+z)-3](x+y+z)^2 \geq 0$
⇔2(x+y+z)-3≥0 (do $(x+y+z)^2+¿0)$
⇔(x+y+z)≥$\frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=y=z \\ 2xyz+xy+yz+zx=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ 2x^2+2x^2=1 \end{cases}$ ⇔?x=y=z=$\frac{1}{2}$

Vậy x+y+z≥$\frac{3}{2}$
Câu 4: (6 điểm)
Cho đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là trung điểm của bản kính OB và (I) làđường tròn đường kính AC, Trên đường tròn (O) lấy hai điểm tùy ý phân biệt M,N khác A và B. Gọi P,Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AM và AN với đường tròn (1).
1. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với dường thẳng PQ.
2. Vẽ tiếp tuyển MẸ của (1) với E là tiếp điểm. Chứng minh: ME^2 = MA.MP.
3. Vẽ tiếp tuyến NF của (1) với F là tiếp điểm. Chứng minh:$\frac{ME}{NF}=\frac{AM}{AN}$\



1) Xét đường tròn (O) có: $\widehat{AMB}$ = 90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
=>MB⊥AM(1)
Xét đường tròn (1) có: $\widehat{APC}$ = 90° (góc nội tiếp chắn nữa đường tròn)
=>PC⊥AM(2)
Từ (1) và (2) suy ra MB//PC => $\widehat{ACP} = \widehat{ABM}$ (3) (hai góc đồng vị)

Xét đường tròn (I) có: $\widehat{ACP}$ = $\widehat{AQP}$ (4) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$)

Xét đường tròn ()) có: $\widehat{ABM}$ = $\widehat{ANM}$ (5) (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{AQP} = \widehat{ANM}$

Mà $\widehat{AQP}, \widehat{ANM}$ là hai góc đồng vị, suy ra MN//PQ (đpcm).

2) Xét ΔMEP và ΔMAE có:
$\widehat{MAE}$ = $\widehat{MEP}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn $\overset{\frown}{PE}$)

$\widehat{AME}$ là góc chung

Do đó ΔMEP∼ ΔMAE (TH3)

=> $\dfrac{ME}{MA} = \dfrac{MP}{ME}$

=> $ME^2 = MA$.MP (đpcm).

3) Ta có MB//PC (cmt).

Áp dụng định lí Ta-lét, ta có $\frac{MP}{NQ} = \frac{MA}{NA}$

Mà $ME^2 = MA$.MP (chứng minh câu 2)

Chứng minh tương tự, ta được: $NF^2 = NQ$.NA

Do đó $\frac{ME^2}{NF^2} = \frac{MP.MA}{NQ.NA} = \frac{MP}{NQ} \cdot \frac{MA}{NA} = \frac{MA}{NA} \cdot \frac{MA}{NA} ¿ \left(\frac{MA}{NA}\right)^2$

Suy ra $\left(\frac{ME}{NF}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$

=> $\frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN} (đpcm)$