**Đề 60**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 HẢI DƯƠNG NĂM 2023-2024**

**Câu 1.** (2,0 điểm)

1. Cho là các số thực dương thỏa mãn và

.

Chứng minh rằng:

 2) Cho . Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

.

**Câu 2.** ( 2,0 điểm)

1. Giải phương trình: .
2. Giải hệ phương trình: .

**Câu 3.** ( 2,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên thỏa mãn đẳng thức: .
2. Cho là các số tự nhiên thỏa mãn . Chứng minh rằng là số chính phương.

**Câu 4.** (3,0 điểm)

1. Cho đường tròn tâm , bán kính . Điểm nằm bên ngoài đường tròn tâm . Qua vẽ hai tiếp tuyến , với đường tròn ( , là các tiếp điểm). Gọi , lần lượt là trung điểm của , ; là giao điểm của với . Lấy điểm bất kì trên đường tròn ( khác và ). Qua vẽ tiếp tuyến với đường tròn tâm , tiếp tuyến này cắt đường thẳng tại .
2. Chứng minh rằng: ;
3. Chứng minh rằng: .
4. Cho tam giác có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn . Gọi lần lượt là giao điểm của các đường thẳng với với với .

Chứng minh rằng: .

**Câu 5**. ( 1,0 điểm)

 Cho là các số thực dương thỏa mãn: .

 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: .

**---Hết---**

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1** **(2,0 điểm)**

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c =6 và .

Chứng minh rằng:

1. Cho . Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

A= + + ….+ + .

1. Từ giả thiết ta có

 = 5

Suy ra a + 5 = a + = )

Tương tự ta có:

* + 5= = )
* + 5= = )

Do đó:

1. Trước hết, ta chứng minh được: Nếu *x + y=* 1 thì *f (x) +f (y)* =1.

Thật vậy *f* (*x*) = ⇒ *f* (*y*) =)

Suy ra *f* (*x*) + *f* (*y*) = *f* (*x*) + = và =.

Ta có A=+

(biểu thức trên có 1010 dấu ngoặc vuông, mỗi biểu thức trong ngoặc vuông có giá trị bằng 1)

Vậy A= 1010 +

**Câu 2** **(2,0 điểm)**

1. Điều kiện xác định: hoặc

 ⇔ (2)

Đặt *y +*1= Từ (2) suy ra =y+7

Ta có: ⇔

 ⇔⇔

TH1:⇔ (thỏa mãn)

 (thỏa mãn)

 Vậy tập nghiệm của phương trình là S=.

1. Nhận xét: y = 0 không thoả mãn hệ ⇒ y≠0.

Chia cả hai vế của mỗi phương trình cho y ta được:



* hoặc
* (hệ vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là ( *x*;*y* )

**Câu 3** **(2,0 điểm)**

1. Ta có: .

Do

Mặt khác do *x ; y* nguyên nên *xy* = 0 hoặc *xy* = 1.

Vậy, các cặp số nguyên ( x ; y ) thỏa mãn bài toán là (0;0); (−1; −1) ; (1;1).

Vậy và là hai số nguyên tố cùng nhau, mà là số chính phương nên là số chính phương.

**Câu 4** **(3,0 điểm)**



1. Ta có ∆ABC cân tại A suy ra AB = AC

∆OBC cân tại O suy ra OB = OC

Suy ra AO là đường trung trực của BC suy ra AO ⊥ BC tại trung điểm H của BC .

Xét ∆ABO vuông tại B có đường cao BH nên AH. HO=BH

Vì MN là đường trung bình của ∆ABC nên MN=

Chứng minh KA =KE

∆KEO vuông tại E , ta có

Do MN // BC , M là trung điểm của AB ⇒ I là trung điểm của AH

Từ (1) và (2) suy ra .



 = 2

 và



 Dấu “=” xảy ra khi ∆ABC là tam giác đều.

**Câu 5** **(1,0 điểm)**

+

Chứng minh tương tự, ta có:

+

+

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 12 khi