PHÒNG GD VÀ ĐT THỊ XÃ BA ĐỒN **ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI**

MÔN TOÁN 9- NĂM HỌC 2023-2024

(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm):

Cho biểu thức $P=\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ Với $x\ge 0$ và $x\ne 1$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Câu 2 (2,0 điểm):

a) Giải phương trình: $x^2+5x+1=(x+5)\sqrt{x^2+1}$.

b) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases}$ (với m là tham số).

Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức:

$x+y-2014=\frac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$.

Câu 3 (1,5 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}\ge a+\frac{b}{2}$$

Câu4 (3,5 điểm): Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O;R).Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với OA. Gọi M là điểm bất kì trên đường thẳng d. Từ M vẽ hai tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O) (E, F là tiếp điểm). N và B là giao điểm của EF với OM và OA.

a) Chứng minh ON.OM = OA.OB

b) Vẽ tiếp tuyến AD, AC đến (O) (C, D là tiếp điểm). Chứng minh rằng ba điểm C, D, B thẳng hàng.

c) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác MEF nhỏ nhất.

Câu 5 (1,0 điểm):

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$.

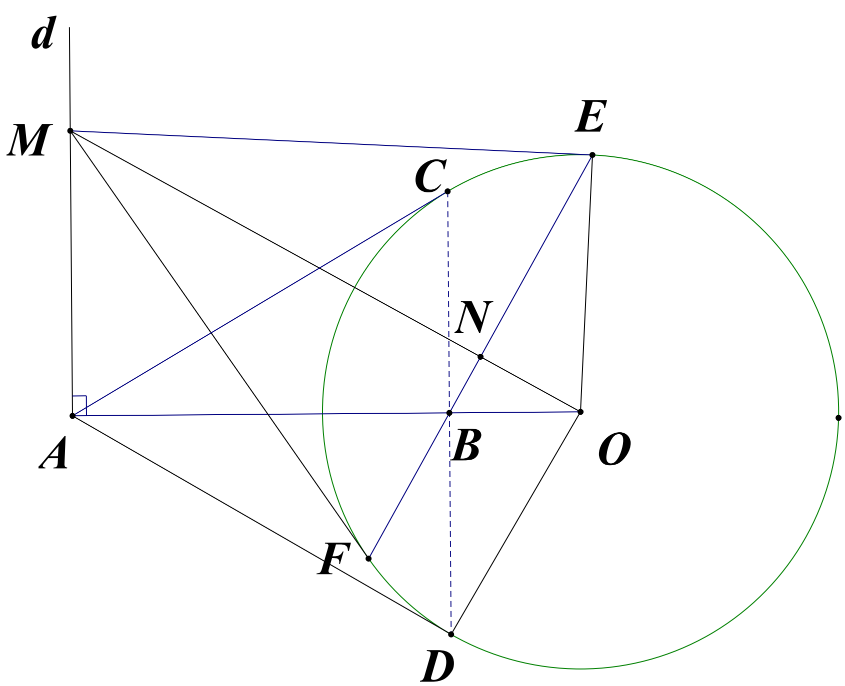
-----------------------------------Hết-------------------------------------

PHÒNG GD VÀ ĐT TX BA ĐỒN

HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN TOÁNLỚP 9 NĂM HỌC 2023 – 2024

Câu	Nội dung	Điểm
1 (2,0đ)	a) ĐKXĐ: $x \ge 0$ và $x \ne 1$ Ta có $P = \frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ $= \frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ Vậy với $x \ge 0$ và $x \ne 1$ ta có $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Ta có $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow x^3 = 40 + 3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$ $\Leftrightarrow x^3 = 40 + 6x \Leftrightarrow x^3 - 6x - 40 = 0$ $\Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+10) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (vì $x^2+4x+10 = (x+2)^2 + 6 > 0$) Thay $x = 4$ vào biểu thức thu gọn ta được $P = 3$	0,25 0,25 0,25 0,25
2 (2,0đ)	$x^2+5x+1 = (x+5)\sqrt{x^2+1}$ $\Leftrightarrow x^2+1+5x = (x+5)\sqrt{x^2+1}$ $\Leftrightarrow x^2+1+5x - x\sqrt{x^2+1} - 5\sqrt{x^2+1} = 0$ $\Leftrightarrow (x^2+1-x\sqrt{x^2+1}) - (5\sqrt{x^2+1}-5x) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) - 5\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-5\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}-x=0\\ \sqrt{x^2+1}-5=0.\end{array}\right.$ TH1: $\sqrt{x^2+1}-x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+1=x^2 \end{cases}$ (không có giá trị nào của x thỏa mãn).	0,25 0,25 0,25 0,25

	TH2: $\sqrt{x^2+1}-5=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=5 \Leftrightarrow x^2+1=25 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{24}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-\sqrt{24};\sqrt{24}\right\}$	
	b) $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ 2x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ 2x+m\dfrac{mx-2}{2}=5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ (m^2+4)x=2m+10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m+10}{m^2+4} \\ y=\dfrac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m\in R$ Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x=\dfrac{2m+10}{m^2+4} \\ y=\dfrac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}$ Thay $x=\dfrac{2m+10}{m^2+4}$ và $y=\dfrac{5m-4}{m^2+4}$ vào hệ thức: $x+y-2014=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$ Ta được: $\dfrac{-2014m^2+7m-8050}{m^2+4}=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$ $\Leftrightarrow -2014m^2+7m-8050=-2015m^2+14m-8056$ $\Leftrightarrow m^2-7m+6=0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=6 \end{array}\right.$ Vậy để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức: $x+y-2014=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$ thì $m=1$ hoặc $m=6$.	0,25 0,25 0,25 0,25

3 **(1,5đ)**	Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}\ge a+\frac{b}{2}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho các số dương ta được $\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}a;\ \frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}b;\ \frac{c^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge c$ Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a}{2}+b+c\ge\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b+c$ $\Leftrightarrow\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}\ge a+\frac{b}{2}$ Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$	0,75 0,25 0,25 0,25
Câu4 **(3,5 đ)**		0,5
	a) ME = MF (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $=>\Delta$MEF cân tại M Mà MO là đường phân giác (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Nên MO củng là đường cao $=>$ MO$\perp$ EF tại N $=>\angle ONB=90^0$ Ta có $\angle MAO=90^0$ (gt) Xét ΔONB và ΔOMA có $\angle$NOB chung $\angle ONB=\angle MAO=900$ $=>\Delta ONB\backsim\Delta OAM$ (g.g) $=>\frac{ON}{OA}=\frac{OB}{OM}$ $=>$ ON.OM = OA.OB	0,25 0,25 0,25 0,25

	b) $ME \perp OE$ (Tính chất của tiếp tuyến) ΔMEO vuông tại E có $EN \perp OM$ Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OE^2 = ON.OM$ Mà ON.OM = OA.OB (chứng minh câu a) OE = OD (bán kính) $=> OD^2 = OA.OB$ $=> \frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OA}$ Xét ΔOBD và ΔODA ta có $\angle BOD$ chung $\frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OA}$ $=> \Delta OBD$ ΔODA (c.g.c) $=> \angle OBD = \angle ODA$ Mà $\angle ODA = 90^0$ nên $\angle OBD = 90^0$ $=> BD \perp OA$ tại B (*) AC = AD (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $=> \Delta CAD$ cân tại A Mà AO là đường phân giác (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Nên AO củng là đường cao $=> DC \perp OA$ (**) Từ (*) và (**) suy ra BD và DC trùng nhau => C,B,D thẳng hàng.	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) Xét (O) ta có ON là khoảng cách từ O đến dây EF OB là khoảng cách từ O đến dây CD $ON \leq OB$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên) $=> EF \geq CD$ $=> \frac{1}{2} EF \geq \frac{1}{2} CD$ (1) Ta có $OM \geq OA$ (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc) (2) $OB \geq ON$ (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc) (3) Công vế theo vế của (1) và (2) ta có $OM + OB \geq OA+ON$ $=> OM - ON \geq OA- OB$ $=> MN \geq AB$ (4) Từ (1) và (4) ta có $\frac{1}{2} EF.MN \geq \frac{1}{2} CD.AB$ $=> S_{\Delta MEF} \geq \frac{1}{2} CD.AB$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ON = OB \\ OM = OA \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv A$	0,25 0,25 0,25 0,25

	Vậy diện tích tam giác MEF nhỏ nhất khi M trùng A	
Câu 5 (1,0đ)	Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 - 5y + 62 = (y - 2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x.$ Ta có: Ta có $(1) \Leftrightarrow (y-2)(y-3)+56 = (y-2)x^2 + (y-2)(y-4)x$. $\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right] = 56$ $\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3) = 56.$ Nhận thấy $(y-2)+(x-1) = x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại. Như vậy ta có $+)\ 56 = 1.7.8 \Rightarrow (x;y) = (2;9).$ $+)\ 56 = 7.1.8 \Rightarrow (x;y) = (8;3).$ $+)\ 56 = (-8).1.(-7) \Rightarrow (x;y) = (-7;3).$ $+)\ 56 = 1.(-8).(-7) \Rightarrow (x;y) = (2;-6).$ $+)\ 56 = (-8).7.(-1) \Rightarrow (x;y) = (-7;9).$ $+)\ 56 = 7.(-8).(-1) \Rightarrow (x;y) = (8;-6).$ Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.	0,25 0,25 0,25 0,25