**TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT**

**ĐỀ ĐỀ XUẤT THI OLYMPIC DHBB NĂM 2023**

**MÔN: TOÁN 11**

**Bài 1/** Cho số thực  và dãy số  được xác định bởi điều kiện



Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Bài 2/** Tìm tất cả hàm số  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i)  với mọi ;

ii)  với mọi .

**Bài 3/** Tìm tất cả các số nguyên dương  thỏa điều kiện: tồn tại các số nguyên  để 

**Bài 4.** Cho tam giác  cân tại , nội tiếp đường tròn . Lấy các điểm  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho  không song song với . Các tia  lần lượt cắt đường tròn  tại  (). Đường tròn tâm , bán kính  cắt đoạn thẳng  tại . Đường tròn tâm , bán kính  cắt đoạn thẳng  tại .

a. Gọi  là trung điểm cung  không chứa điểm  của đường tròn . Chứng minh rằng .

b. Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy.

**Bài 5**/ Theo dọc trên đường tròn, người ta ghi sẵn 299 số gồm số 0 và một số 1.

Ở mỗi bước đi sau đó của trò chơi, người chơi được phép thực hiện một trong hai động tác sau:

1/ Thay mỗi số đang có bởi hiệu giữa nó và tổng của hai số nằm kề với nó (lúc chưa thay) trên đường tròn;

2/ Chọn tùy ý hai số mà giữa chúng (trên đường tròn) có đúng hai số, rồi trừ mỗi số được chọn cho 1 hoặc cộng mỗi số được chọn cho 1.

Hỏi sau hữu hạn bước ta có thể thu được

a/ 298 số 0 và hai số 1 nằm kề nhau trên đường tròn?

b/ 297 số 0 ba số 1 nằm kề liên tiếp nhau trên đường tròn?

**…………………………..HẾT…………………………….**

**Giáo viên ra đề: Phan Anh Tiến, sđt 0355421807, Email: phanhtienlk@gmail.com**

**TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT**

**ĐỀ ĐỀ XUẤT THI OLYMPIC DHBB NĂM 2023**

**MÔN: TOÁN 11**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Bài 1/** Cho số thực  và dãy số  được xác định bởi điều kiện



Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải

1/ Bằng quy nạp ta chứng minh được 

2/ Giới hạn , nếu có, sẽ là nghiệm của trong đoạn  của phương trình



Vì  nên 

3/ Từ công thức truy hồi của dãy nên ta có



Từ (1) và (1’) suy ra  nên



Từ đó và (2) kéo theo 

Vì thế 

**Bài 2/** Tìm tất cả hàm số  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i)  với mọi ;

ii)  với mọi .

**Giải.**

Giả sử  là một nghiệm hàm. Ta quy ước  viết thay .

Từ ii) ta có 

Do đó  suy ra  và do đó . (2)

Theo i) và quy nạp ta được . (3)

Theo ii) và quy nạp ta được . (4)

Với  suy ra  thì



Vì vậy, nếu  thì





Hay



Cho  từ bất đẳng thức này ta nhận được  với mọi x>1. Nói cách khác

 (5)

Ta có thể viết (3) dưới dạng . (3’)

Từ (3’) và (5) ta thấy nếu  thì  khi đó



Vậy (5) đã nới thành  (5’)

Với mọi , dùng ii) và (5’) ta còn thấy  suy ra . (\*)

Ta sẽ chứng minh (\*) cũng đúng khi x<-1.

Ta có  và theo (5’) ta suy ra (\*).

Bây giờ ta chứng minh (\*) cho trường hợp x>0.

Ta có  nên từ (3) ta có

 (6)

Thay x bởi  ta có  (6’).

Nhưng .

Dấu “=” xảy ra nên nó xảy ra ở (6) và (6’).

Tóm lại  Thử lại ta thấy hàm số đã tìm thỏa yêu cầu đề.

**Bài 3/** Tìm tất cả các số nguyên dương  thỏa điều kiện: tồn tại các số nguyên  để 

**Giải**

1/ Với  thỏa điều kiện của đề bài 

2/ Ta sẽ chứng minh  không thỏa yêu cầu đề.

Với , khi đó  suy ra  nên 

Trong khi đó  nên  Suy ra 

Với  khi đó



Hay  Từ đó, nếu  thỏa mãn yêu cầu ở đề thì



Mà  Nên ta xét đồng dư của  theo .

Ta có,  lẻ nên 

Nếu  thì  mâu thuẫn.

Nếu  thì  mâu thuẫn.

Như vậy chỉ còn trường hợp 

Ta lại thấy  Mà  Như vậy không tồn tại m,n thỏa yêu cầu bài.

**Bài 4.**

Cho tam giác  cân tại , nội tiếp đường tròn . Lấy các điểm  lần lượt thuộc các cạnh  sao cho  không song song với . Các tia  lần lượt cắt đường tròn  tại  (). Đường tròn tâm , bán kính  cắt đoạn thẳng  tại . Đường tròn tâm , bán kính  cắt đoạn thẳng  tại .

a. Gọi  là trung điểm cung  không chứa điểm  của đường tròn . Chứng minh rằng .

b. Chứng minh rằng các đường thẳng  đồng quy.



a)

Các tam giác cân  có góc ở đỉnh bằng nhau nên đồng dạng.

Suy ra , do đó bốn điểm  cùng thuộc một đường tròn .

Hơn nữa  nên nếu gọi  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  thì điểm  cũng thuộc  (vì ).

Bằng biến đổi góc, cũng dễ dàng kiểm tra được  nên  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  (tức là đường tròn ).

Do đó .

b)

Dễ thấy  là các tiếp tuyến của đường tròn .

Gọi  là giao điểm của các đường thẳng ;  là giao điểm của các đường thẳng .

Ta có biến đổi tỷ số kép (xét trên đường tròn )



Do đó,  thẳng hàng.

Hai tam giác  và  có  mà  thẳng hàng nên theo định lý Desargues, ta có  đồng quy.

**Bài 5**/ Theo dọc trên đường tròn, người ta ghi sẵn 299 số gồm số 0 và một số 1.

Ở mỗi bước đi sau đó của trò chơi, người chơi được phép thực hiện một trong hai động tác sau:

1/ Thay mỗi số đang có bởi hiệu giữa nó và tổng của hai số nằm kề với nó (lúc chưa thay) trên đường tròn;

2/ Chọn tùy ý hai số mà giữa chúng (trên đường tròn) có đúng hai số, rồi trừ mỗi số được chọn cho 1 hoặc cộng mỗi số được chọn cho 1.

Hỏi sau hữu hạn bước ta có thể thu được

a/ 298 số 0 và hai số 1 nằm kề nhau trên đường tròn?

b/ 297 số 0 ba số 1 nằm kề liên tiếp nhau trên đường tròn?

**Giải**

Trên đường tròn ta đánh dấu (x) tại vị trí mà người ta đã ghi sẵn số 1 (và giữ nguyên dấu (x) đó suốt trò chơi).

Giả sử  là các số đang có mặt trên đường tròn, kể theo thứ tự liên tiếp ngược chiều kim đồng hồ. Trong đó,  là số nằm tại vị trí có dấu (x).

Đặt .

Ta hãy tìm xem sau mỗi bước đi các tổng này có thể thay đổi thế nào.

Nếu bước đi được thực hiện bởi động tác 1, thì

 với  được thay bởi  (quy ước ).

Từ động tác 1 đưa tổng S thành .

Nếu bước đi được thực hiện bởi động tác 2, thì dễ thấy .

a/ Từ các phân tích trên ta thấy S giữ nguyên tính chẵn lẻ qua mỗi bước đi. Khi chưa thực hiện bước đi nào thì S=1, nên không thể thực hiện được yêu cầu của câu a.

b/ Nếu mỗi bước đi được thực hiện bởi động tác 1, thì 

Dễ thấy nếu thực hiện bởi động tác 2, thì A không thay đổi.

Khi chưa thực hiện bước đi nào thì , trong khi ở trạng thái 297 số 0 và ba số 1 nằm kề nhau thì . Như vậy theo phân tích trên về cách thay đổi của A thì điều kiện cần và đủ để thu được trạng thái 297 số 0 và ba số 1 nằm liền kề sau hữu hạn bước là không bao giờ thực hiện bước đi bởi động tác 1 và ba số 1 phải nằm ở vị trí sao cho tổng A=1.

Tuy nhiên, ở chiều ngược lại với cách thực hiện các bước đi như thế (không thực hiện động tác 1) thì hoặc là các số  đều được giữ nguyên hoặc là có đúng hai trong 100 số này thay đổi, theo cách cùng tăng 1 hoặc cùng giảm 1. Vì thế . Vậy, tính chẵn le của T là không đổi.

Khi chưa thực hiện bước đi nào, tổng T=0, là một số chẵn, trong khi ở trạng thái 297 số 0 và ba số 1 nằm liền kề thì T=1. Như vậy không thể thực hiện được.