

▮ BÀI GIẢNG 3 : TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM ĐẶC BIỆT



LÝ THUYẾT



✎ Memorize :

✎ Lý thuyết bài giảng :



LÀM

Câu 301: Cho tam giác ABC biết $A(4;3), B(-1;-1)$ và $C(2;-4)$

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC . b) Tìm điểm K là chân đường cao

kẻ từ C

 **Lời giải :**

Câu 302: Cho tam giác ABC biết $A(1;6), B(2;-6)$ và $C(-1;1)$

- a) Tìm trọng tâm G , trực tâm H , tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC
b) Chứng minh rằng $\vec{IH} = 3\vec{IG}$

 **Lời giải :**

Câu 303: Cho tam giác ABC biết $A(1;6), B(2;-6)$ và $C(-1;1)$

- a) Tìm chiều cao AA' và diện tích tam giác ΔABC
b) Cho $\vec{a} = \vec{CA}, \vec{b} = \vec{CB}$. Tìm véctơ x thỏa $\vec{a} \cdot x = 38$ và $\vec{b} \cdot x = -30$

 **Lời giải :**

Câu 304: Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ điểm P đến các điểm $A(1;1)$ và $B(2;-4)$ là nhỏ nhất.

 **Lời giải :**

Câu 305: Cho tam giác ABC có $A(0;2), B(6;9), C(4;1)$.

- Tính $AB \cdot AC$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC .

 **Lời giải :**



MÓN QUÀ

Câu 306: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(4;3)$.

a) Tìm toạ độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại A .
Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC .

b) Tìm toạ độ của điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A .

Lời giải

a) Đáp số: $C(3;0)$. Chu vi tam giác ABC bằng $3\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

Diện tích tam giác ABC bằng 2.

b) HD. Điểm D thoả mãn đồng thời hai điều kiện vector $\overrightarrow{AD}$ cùng phương với vector $\overrightarrow{AC}$ và $AD = AB = 2\sqrt{2}$.

Đáp số: Có hai điểm D thoả mãn là $D_1(0;3)$ và $D_2(4;-1)$.

Câu 307: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(1;4)$ và $C(9;2)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm toạ độ các đỉnh B, D , biết rằng tung độ của B là một số âm.

Lời giải

HD. Do $ABCD$ là hình vuông nên hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm chung I của chúng.

Đáp số: $B(4; -1), D(6; 7)$.

Câu 308: Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(1; 1), B(5; 2)$ và $C(4; 4)$.

- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A .
- Giải tam giác ABC .

Lời giải

a) Xét điểm $H(x; y)$, ta có: $\overrightarrow{AH} = (x-1; y-1), \overrightarrow{BH} = (x-5; y-2), \overrightarrow{BC} = (-1; 2)$.

$H(x; y)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A , nên ta có:

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-1) \cdot (-1) + (y-1) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 1 = 0 \quad (1)$$

- Hai vector $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow (x-5) \cdot 2 - (y-2) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 12 = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Vậy $H\left(\frac{23}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; 1), \overrightarrow{BC} = (-1; 2), \overrightarrow{AC} = (3; 3)$.

Suy ra: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}, BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}. \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{4 \cdot 3 + 1 \cdot 3}{\sqrt{17} \cdot 3\sqrt{2}} \approx 0,857 \Rightarrow \hat{A} \approx 30^\circ 57'.$$

$$\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{(-4) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}} \approx 0,217 \Rightarrow \hat{B} \approx 77^\circ 28'.$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 180^\circ - 30^\circ 57' - 77^\circ 28' = 71^\circ 35'.$$

Câu 309: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $C(1; 6)$ và $D(11; 2)$.

a) Tìm tọa độ của điểm E thuộc trục tung sao cho vector $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$ có độ dài ngắn nhất.

b) Tìm tọa độ của điểm F thuộc trục hoành sao cho $|2\overrightarrow{FC} + 3\overrightarrow{FD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = CD$.

Lời giải

a) Đáp số: $E(0;4)$.

b) Đáp số: $F(7;0)$.

c) Do $C(1;6), D(11;2)$, nên $CD = \sqrt{(11-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.

Gọi I là trung điểm CD , thế thì $I(6;4)$ và với mỗi điểm M đều có $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$. Suy ra $|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = CD \Leftrightarrow 2|MI| = 2\sqrt{29} \Leftrightarrow MI = \sqrt{29}$.

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I bán kính $\frac{CD}{2} = \sqrt{29}$.

Câu 310: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;1)$ và $B(7;5)$.

a) Tìm tọa độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều A và B .

b) Tìm tọa độ của điểm D thuộc trục tung sao cho vector $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất.

Lời giải

a) Xét điểm $C(c;0) \in Ox$. Khi đó $CA^2 = (c-1)^2 + 1, CB^2 = (c-7)^2 + 25$. Vậy C cách đều A, B khi và chỉ khi

$$CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (c-1)^2 - (c-7)^2 = 25 - 1 \Leftrightarrow c = 6.$$

Vậy $C(6;0)$ là điểm cần tìm.

b) Gọi M là trung điểm AB . Khi đó $M(4;3)$. Với mọi điểm D ta có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DM}$.

Suy ra vector $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi vector $2\overrightarrow{DM}$ có độ dài ngắn nhất.

Từ đó điểm D thuộc trục tung sao cho vector $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi D là hình chiếu vuông góc của M trên Oy , tức là $D(0;3)$.



Câu 311: Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$.

a) Tìm tọa độ điểm C sao cho: $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm D đối xứng với A qua C .

c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$.

Lời giải.

a) Gọi $C(x_C; y_C)$.

Theo bài $\vec{OC} = -3\vec{AB} \Leftrightarrow (x_C; y_C) = -3(-2; 5) = (6; -15) \Rightarrow C(6; -15)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_C = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases}$$

b) D đối xứng với A qua C hay C là trung điểm của AD

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_C - x_A = 2 \cdot 6 - 3 = 9 \\ y_D = 2y_C - y_A = 2(-15) - (-5) = -25 \Rightarrow D(9; -25) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + 3x_B}{1+3} = \frac{3+3 \cdot 1}{4} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{y_A + 3y_B}{1+3} = \frac{-5+3 \cdot 0}{4} = -\frac{5}{4} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right) \end{cases}$$

c) M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$

Câu 312: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$ và $C(3; -1)$.

- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ấy.
- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ của I .

Lời giải

- a) HD. Chứng minh hai vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}$ không cùng phương.

Đáp số: $G\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

- b) Từ giả thiết, suy ra $\vec{AB} = (4; 3)$, $\vec{BC} = (2; -6)$. Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác ABC . Khi đó $\vec{AH} = (x+3; y-2)$, $\vec{CH} = (x-3; y+1)$.

Do $AH \perp BC, CH \perp AB$ nên

$$\begin{cases} 2(x+3) - 6(y-2) = 0 \\ 4(x-3) + 3(y+1) = 0 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $x=0, y=3$. Vậy trực tâm của tam giác ABC là điểm $H(0; 3)$.

- c) HD. Sử dụng kết quả của bài tập 4.15.

Đáp số: $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 313: Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(2; 2)$, $B(6; 3)$ và $C(5; 5)$.

- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A .

b) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC và số đo của góc C .

Lời giải

a) Xét điểm $H(x; y)$, ta có: $\overrightarrow{AH} = (x-2; y-2)$, $\overrightarrow{BH} = (x-6; y-3)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 2)$.

$H(x; y)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A nên ta có:

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-2) \cdot (-1) + (y-2) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 2 = 0 \quad (1)$$

Hai vector $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow (x-6) \cdot 2 - (y-3) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0 \quad (2)$

$$\begin{cases} -x + 2y - 2 = 0 \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình

Vậy $H\left(\frac{28}{5}; \frac{19}{5}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; 1)$, $\overrightarrow{CB} = (1; -2)$, $\overrightarrow{CA} = (-3; -3)$.

Suy ra: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$, $BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}. \quad \cos \hat{C} = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-2)}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $\hat{C} \approx 71^\circ 34'$.

Câu 314: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(4; -2)$, $B(10; 4)$ và điểm M nằm trên trục Ox . Tìm tọa độ điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Vì M nằm trên trục Ox nên có tọa độ $(m; 0)$ (m là số thực). Khi đó, $\overrightarrow{MA} = (4-m; -2)$, $\overrightarrow{MB} = (10-m; 4)$ suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (14-2m; 2)$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \sqrt{(14-2m)^2 + 2^2} \geq 2$ (Vì $(14-2m)^2 \geq 0$). Dấu bằng xảy ra khi $m = 7$.

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi M có tọa độ là $(7; 0)$.

Câu 315: Cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-4; 7)$

a) Tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất

b) Tìm điểm N thuộc trục Oy sao cho $|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}|$ nhỏ nhất

c) Tìm điểm K thuộc trục Oy sao cho $|\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KB}|$ nhỏ nhất

d) Tìm điểm P thuộc trục Ox sao cho $|\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC}|$ nhỏ nhất

Lời giải

a) Ta có $M \in Ox \Rightarrow M(m; 0)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} &= (1 - m; 1); \overrightarrow{MB} = (3 - m; 5) \text{ và } \overrightarrow{MC} = (-4 - m; 7) \\ \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= (-4 - 4m; 20) \\ \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| &= \sqrt{(-4 - 4m)^2 + 20^2} \geq 20.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow -4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Leftrightarrow M(-1; 0)$.

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M(-1; 0)$.

b) Ta có $N \in Oy \Rightarrow N(0; n)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NB} &= (3; 5 - n) \text{ và } \overrightarrow{NC} = (-4; 7 - n) \\ \Rightarrow \overrightarrow{CN} &= (4; n - 7) \Rightarrow \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CN} = (7; -2) \\ \text{Ta có: } \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CN} \Rightarrow |\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}| \geq |\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CN}| \geq \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{CN}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{5 - n}{n - 7} > 0 \Leftrightarrow 3n - 21 = 20 - 4n \Leftrightarrow n = \frac{41}{7} \Leftrightarrow N\left(0; \frac{41}{7}\right).$$

Vậy $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow N\left(0; \frac{41}{7}\right)$.

c) Ta có $K \in Oy \Rightarrow K(0; k)$.

$$\overrightarrow{KB} = (3; 5 - k) \text{ và } \overrightarrow{KC} = (-4; 7 - k)$$

Ta có: $|\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC}| \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + (5 - k)^2} = \sqrt{4^2 + (7 - k)^2}$

$$\Leftrightarrow 9 + (5 - k)^2 = 16 + (7 - k)^2$$

$$\Leftrightarrow 4k = 31 \Leftrightarrow k = \frac{31}{4} \Leftrightarrow K\left(0; \frac{31}{4}\right).$$

Vậy $|\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow K\left(0; \frac{31}{4}\right)$.

d) Ta có $P \in Ox \Rightarrow P(p; 0)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= (1 - p; 1); \overrightarrow{PB} = (3 - p; 5) \text{ và } \overrightarrow{PC} = (-4 - p; 7) \\ \Rightarrow \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} &= (-5 - 6p; 25)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \overline{PA} + 2\overline{PB} + 3\overline{PC} \right| = \sqrt{(-5-6p)^2 + 25^2} \geq \sqrt{25^2} = 25$$

$$\Leftrightarrow -6p - 5 = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow P\left(-\frac{5}{6}; 0\right)$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\text{Vậy } \left| \overline{PA} + 2\overline{PB} + 3\overline{PC} \right| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow P\left(-\frac{5}{6}; 0\right).$$

“Mỗi buổi sáng ở châu Phi, một con linh dương thức dậy
 Nó biết rằng nó phải chạy nhanh hơn cả con sư tử nếu không nó sẽ bị giết.
 Mỗi sáng một con sư tử thức dậy
 Nó biết rằng nó phải chạy nhanh hơn con linh dương chậm nhất... hoặc nó sẽ bị
 chết đói.
 Điều quan trọng không phải là việc bạn là sư tử hay linh dương
 Khi mặt trời mọc, bạn nên bắt đầu chạy...”

“Nếu bạn không làm bài tập của tôi mỗi ngày bạn sẽ bị tụt lại ở phía sau”.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>