PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN CẤP TỈNH

Năm học 2023 - 2024

Môn: Toán - Lớp 9

Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu I. (4,0 điểm):

1) Cho biểu thức:

$$A = \frac{3x + 5\sqrt{x-1} - 14}{x - 3 + \sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x-1} - 1} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + 2} \begin{pmatrix} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{pmatrix}$$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm tất cả các giá trị của x để A nhận giá trị là số nguyên

2) Cho $0 < x < 2$ thỏa mãn $\dfrac{3(x^2 + 5x - 1)}{x^2 + x - 1} + 23 = \dfrac{24(x^2 + 3x - 1)}{x^2 + 2x - 1}$

Tính giá trị của biểu thức $T = (x^2 - x - 2)^{2020} + \dfrac{1}{(x^2 - x)^{2021}}$

Câu II. (4,0 điểm):

1) Giải phương trình: $\sqrt{2x+8} + 2\sqrt{4-x} = \sqrt{\dfrac{9x^2}{8} + 8}$

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x^2 + 12} + \dfrac{5}{2}\sqrt{x+y} = 3x + \sqrt{x^2 + 5} \end{cases}$$

Câu III. (4,0 điểm):

1) Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $3^n - 8$ là lập phương của một số tự nhiên.

2) Tìm tất cả các số $x, y \in Z^+$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x - y^4 = 4$

Câu IV. (6,0 điểm): Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC

a) Chứng minh bốn điểm M, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $AB.BF + AC.CE \leq 4R^2$

c) Khi vị trí các đỉnh A, B, C thay đổi trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn nhọn, chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF không đổi

Câu V. (2,0 điểm): Cho 4 số thực dương a,b,c,d sao cho a+b+c+d=4. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2$$

Họ, tên thí sinh……………………….Chữ ký giám thị 1…………………

Số báo danh………………………….Chữ ký giám thị 1…………………

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU CHẤM
ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
Môn: Toán - Lớp 9
(Đáp án gồm có 06 trang)

Câu	**Đáp án**	**Biểu điểm**
I (4đ)	1) Cho biểu thức: $A=\dfrac{3x+5\sqrt{x-1}-14}{x-3+\sqrt{x-1}}-\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-1}-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2}\left(\begin{matrix}x\geq 1\\ x\neq 2\end{matrix}\right)$ a) Rút gọn biểu thức A b) Tìm tất cả các giá trị của x để A nhận giá trị là số nguyên $A=\dfrac{3x+5\sqrt{x-1}-14}{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}-\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-1}-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2}$	
	$=\dfrac{x+6\sqrt{x-1}-8}{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+7\right)}{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\dfrac{\sqrt{x-1}+7}{\sqrt{x-1}+2}$	0,5
	Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x-1}+7}{\sqrt{x-1}+2}$, với điều kiện $x\geq 1, x\neq 2$	0,5
	1b) Ta có: $A=1+\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}$. Với $x\geq 1\Rightarrow 0<\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}\leq\dfrac{5}{2}$ Vì A nhận giá trị nguyên nên $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}$ nhận giá trị nguyên	0,25
	$Th1:\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow x=10(tm)$ $Th2:\dfrac{5}{\sqrt{x-1}+2}=2\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}(tm)$	0,5
	Vậy các giá trị x cần tìm là $x\in\left\{\dfrac{5}{4};10\right\}$	0,25
	2) Điều kiện: $\begin{cases}x^2+x-1\neq 0\\ x^2+2x-1\neq 0\end{cases}$ $\dfrac{3\left(x^2+5x-1\right)}{x^2+x-1}+23=\dfrac{24\left(x^2+3x-1\right)}{x^2+2x-1}\Leftrightarrow\dfrac{3\left[\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+5\right]}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1}+23=\dfrac{24\left[\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\right.}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2}$	0,25
		0,5

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, phương trình trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = 1 \\ x - \frac{1}{x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right.$
Vì $0 < x < 2$, đối chiếu điều kiện ta được $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$
Vậy $T = (x^2 - x - 2)^{2020} + \frac{1}{(x^2 - x)^{2021}} = (-1)^{2020} + \frac{1}{1^{2021}} = 2$</td>
<td>0.5

0,75</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">II

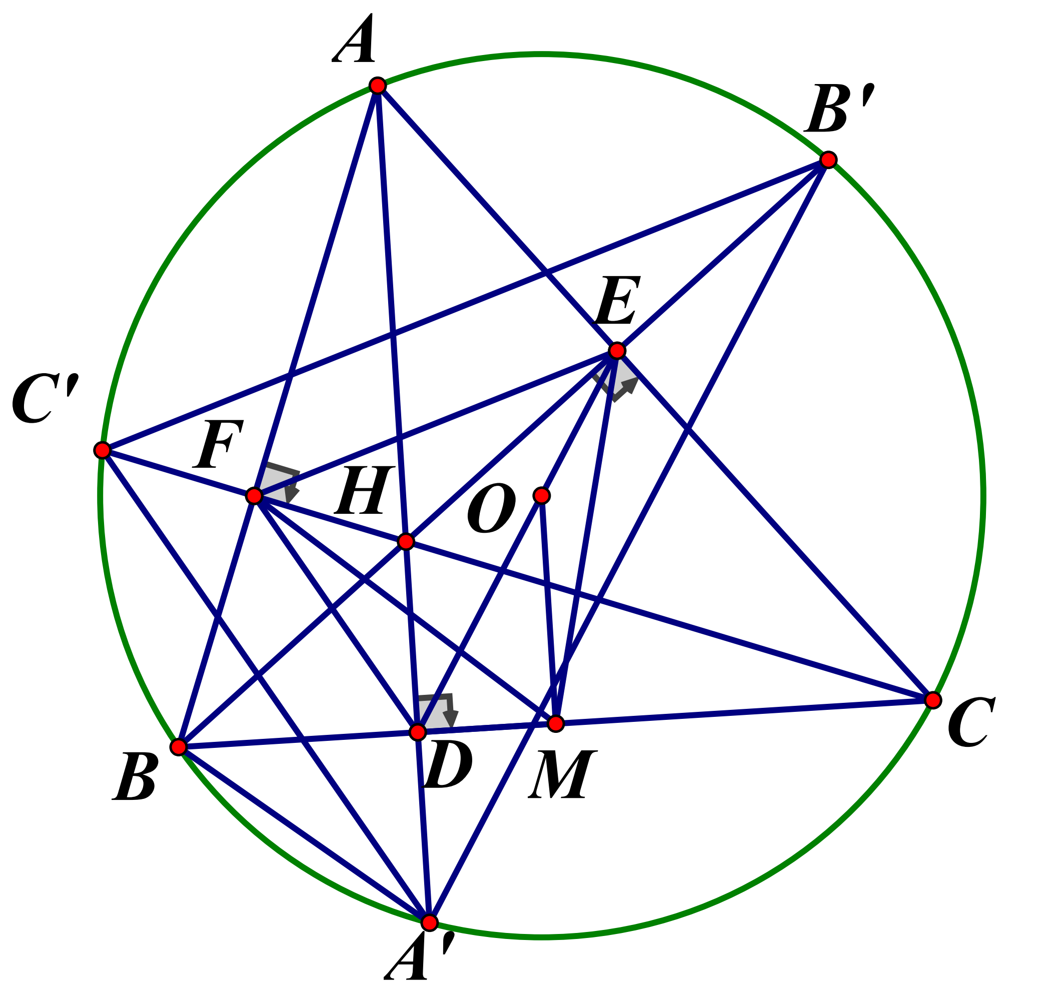
(4đ)</td>
<td>1) Giải phương trình: $\sqrt{2x+8} + 2\sqrt{4-x} = \sqrt{\frac{9x^2}{8} + 8}$ (1)
Điều kiện: $|x| \le 4$
(1) $2x + 8 + 16 - 4x + 4.\sqrt{2.(x+4)(4-x)} = \frac{9x^2}{8} + 8$
$\Leftrightarrow 8(16 - x^2) + 32.\sqrt{2.(16 - x^2)} = x^2 + 16x$
Đặt $t = \sqrt{2.(16 - x^2)} \ge 0$ ta có: $4t^2 + 32t - x^2 - 16x = 0$
$\Leftrightarrow (2t - x)(2t + x + 16) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t + x + 16 = 0 \\ 2t - x = 0 \end{array}\right.$
$x = \frac{8\sqrt{2}}{3}$</td>
<td>0,75

0,75

0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \sqrt{x^2 + 12} + \frac{5}{2}\sqrt{x+y} = 3x + \sqrt{x^2 + 5} & (2) \end{cases}$
Điều kiện: $x + y > 0$
$(1) \Leftrightarrow (x+y).\left[(x+y)^2 - 2xy\right] + 8xy = 16(x+y)$
$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2 - 16\right] - 2xy(x + y - 4) = 0$
$\Leftrightarrow (x + y - 4)\left[x^2 + y^2 + 4(x+y)\right] = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$
$(Do\, x + y > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4(x+y) > 0)$
Thay $x + y = 4$ vào phương trình (2) ta được :</td>
<td>0,25</td>
</tr>
</table>

	$\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5(*)$ Nhận xét $VT>0 \Rightarrow VP>0 \Rightarrow x>\frac{5}{3}$, $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$ $\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}-4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2(tm) \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}-4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0\left(VN\, khi\, x>\frac{5}{3}\right) \end{array}\right.$ Vậy hệ có duy nhất 1 nghiệm $x=y=2$	0,75 0,5 0,25 0,25
III (4đ)	1) Tìm các số nguyên dương m và n sao cho 2^m+3^n là bình phương của 1 số nguyên. Giả sử $3^n-8=a^3\ (a\in \mathbb{N})$ Suy ra $3^n=a^3+8=(a+2)(a^2-2a+4)(1)$ Vì $a\in \mathbb{N}$ nên $a+2>1. Suy\, ra\, a+2=3k\ (k\in \mathbb{N}) \Rightarrow a=3k-2$ Thay vào (1) ta được: $3^n=k(9k^2-18k+12)=3k(3k^2-6k+4)$ Ta có: $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} k\,\vdots\,3 \\ k=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3k^2-6k+4\,\vdots\,3 (Vo\, ly) \\ 3k^2-6k+4=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} k\,\vdots\,3 \\ k=1 \end{array}\right. \\ 3k^2-6k+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow k=1$ Suy ra $a=1. Thay$ vào (1) ta được $n=2$	0,25 0,25 0,5 0,5 0,5
	2) Tìm tất cả các số $x,y\in Z^+$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x-y^4=4$ $p^x-y^4=4 \Leftrightarrow p^x=y^4+4=(y^2+2)^2-4y^2=(y^2-2y+2)(y^2+2y+2)$. *Xét $y=1 \Rightarrow p^x=5 \Rightarrow p=5; x=1(t/m)$, ta tìm được bộ (x, y, p) =(1; 1; 5) *Xét $y=2 \Rightarrow p^x=20 \Rightarrow L$ do p nguyên tố, *Xét $y=3 \Rightarrow p^x=85 \Rightarrow L$ do p nguyên tố, *Xét $y=4 \Rightarrow p^x=260 \Rightarrow L$ do p nguyên tố, *Xét $y=5 \Rightarrow p^x=629 \Rightarrow L$ do p nguyên tố,	0,5 0,5

<table>
<tr>
<td></td>
<td>*Xét $y \ge 6$ suy ra: $y^2 - 2y + 2 > 2 \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 2 = p^a & (1) \\ y^2 + 2y + 2 = p^b & (2) \end{cases}$, với
$a, b \in N; 1 \le a < b; a + b = x$
Do $y \ge 6 \Rightarrow y^2 - 6y + 2 > 0$ và $p \ge 2$. Suy ra:
$p^a < p^b = y^2 + 2y + 2 < (y^2 + 2y + 2) + (y^2 - 6y + 2) = 2(y^2 - 2y + 2) < 2p^a \le p^{a+1}$
Hay: $p^a < p^b < p^{a+1} \Leftrightarrow a < b < a + 1$. Vô lý, loại
Vậy giá trị cần tìm là: (x, y, p) =(1; 1; 5)</td>
<td>0,5

0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>**IV**
(6đ)</td>
<td>

a) Chứng minh bốn điểm M, D, E, F cùng thuộc một đường tròn

Dùng đường tròn ơ le để chứng minh (trung điểm của các cạnh AB, BC, CA, HA, HB, HC và E, F, D)</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>**b) Chứng minh** $AB.BF + AC.CE \le 4R^2$
Xét ΔABD và ΔCBF có:
$\hat{B}$ chung; $\widehat{ADB} = \widehat{CFB} = 90^0 \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CBF (g.g)$
$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BF} \Rightarrow AB.BF = BC.BD \qquad (4)$
Tương tự $\Delta ACD \sim \Delta BCE (g.g) \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow AC.CE = BC.CD (5)$</td>
<td>1

0,5</td>
</tr>
</table>

	Cộng $(4)(5)$ theo từng vế ta được $AB.BF+AC.CE=BC.(BD+DC)=BC^2$ Vì $BC\le 2R$ nên ta có: $AB.BF+AC.CE\le 4R^2$	0,5
	c) **Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF không đổi** Gọi $A';B';C'$ lần lượt là giao diểm của các đường thẳng AD,BE,CF với (O). Ta có $\widehat{A'BC}=\widehat{A'AC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $A'C$) $\widehat{EBC}=\widehat{A'AC}$ (Cùng phụ với $\widehat{ACB}$) $\Rightarrow$ $\widehat{A'BC}=\widehat{EBC}$ Tam giác HBA' có $BD\perp HA'$; $\widehat{A'BC}=\widehat{EBC}$ nên cân tại $B\Rightarrow$ BD là đường trung trực của $HA'\Rightarrow$ D là trung điểm của HA' Tương tự có E,F là trung điểm của HB',HC' Suy ra $\Delta DEF\sim\Delta A'B'C'$ theo tỉ số đồng dạng $k=\frac{1}{2}$ Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF ta có: $\frac{r}{R}=\frac{DE}{A'B'}=k=\frac{1}{2}\Rightarrow r=\frac{1}{2}R$ không đổi khi A,B,C thay đổi trên đường tròn (O)	0,5 0,5 0,5 0,5
V (2đ)	5. Cho 4 số thực dương a,b,c,d sao cho a+b+c+d=4. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge 2$ Ta có: $\frac{a}{1+b^2c}=a-\frac{ab^2c}{1+b^2c}\ge a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}$ $\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge(a+b+c+d)-(\frac{ab\sqrt{c}}{2}+\frac{bc\sqrt{d}}{2}+\frac{cd\sqrt{a}}{2}+\frac{da\sqrt{b}}{2})$ $\ge(a+b+c+d)-\frac{1}{4}(ab+bc+cd+da+abc+bcd+cda+dab)\ge 2$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=d=1	1 0,75 0,25
Chú ý: *Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa. Bài hình không vẽ hình hoặc vẽ hình sai không chấm điểm.*		