

ĐỀ RA

Câu 1 (2.0 điểm). Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P tại $a = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Câu 2 (1.5 điểm). Giải phương trình: $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 1} = 1$.

Câu 3 (2.5 điểm). Cho x, y là các số dương.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

a) Chứng minh: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

$$M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Câu 4 (3.0 điểm). Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB , kẻ tiếp tuyến Ax . Đường thẳng BM cắt Ax tại I ; tia phân giác của $\angle AM$ cắt nửa đường tròn O tại E , cắt IB tại F ; đường thẳng BE cắt AI tại H , cắt AM tại K .

a) Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $HF \perp BI$.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi $\triangle AMB$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R ?

Câu 5 (1.0 điểm). Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng:

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$$

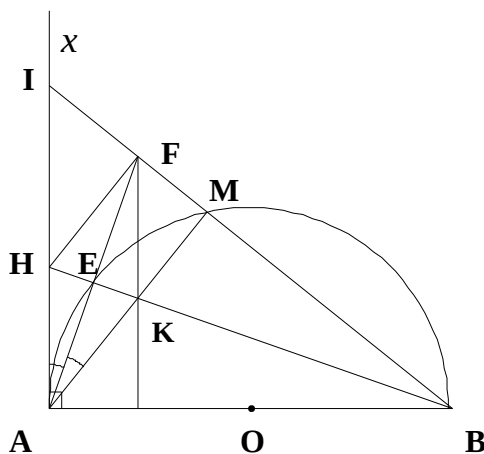
----- Hết -----

***Ghi chú:** Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

ĐÁP ÁN,

CÂU		NỘI DUNG	ĐIỂM
1	a	Điều kiện $\begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \\ \sqrt{a} \neq 0 \end{cases}$	0.25
		$P = \frac{(\sqrt{a} + 1)^2 - (\sqrt{a} - 1)^2 + 4\sqrt{a}(a - 1)}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}}$	0.25
		$= \frac{4\sqrt{a} + 4\sqrt{a}(a - 1)}{\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}(1 + a - 1)}{\sqrt{a}} = 4a$	0.25
		Vậy $P = 4a$	0.25
	b	$a = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3} - 1)$	0.25
		$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})} \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})}$	0.25
		$= \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{2}$	0.25
		Vậy $a = \sqrt{2}$ do đó $P = 4a = 4\sqrt{2}$	0.25
2	Điều kiện $x \geq 1$	0.25	
	$\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 1)^2} - \sqrt{x - 1} = 1$ $\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} - 1 - \sqrt{x - 1} = 1 \quad (1)$	0.5	
	Khi $\sqrt{x - 1} \geq 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$: Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} - 1 - \sqrt{x - 1} = 1$. Phương trình vô nghiệm	0.25	
	Khi $0 \leq \sqrt{x - 1} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$: Ta có (1) $\Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 1} = 1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$	0.25	
	Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.	0.25	
3	a	$\frac{x}{y} > 0 \quad \frac{y}{x} > 0$ Vì $x > 0, y > 0$ nên y và x	0.25

	Áp dụng bất đẳng thức $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$	0.25
	ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$	0.25
	Vậy $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.	0.25
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ (vì $x > 0, y > 0$)	0.25
b	Đặt $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, ta có $M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a}$	0.25
	Vì $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ nên $\frac{3a}{4} \geq \frac{3}{2}$;	0.25
	Ta có $\frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	0.25
	Do đó $M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$; $M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y$	0.25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = y$.	0.25
	Hình vẽ	
a	Ta có M, E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $\angle FMK = 90^\circ$ và $\angle FEK = 90^\circ$.	0.5
	Vậy 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên đường tròn đường kính FK	0.25
b	Ta có $\triangle HAK$ cân tại A nên $AH = AK$ (1)	0.25
	K là trực tâm của $\triangle AFB$ nên ta có $FK \perp AB$ suy ra $FK \parallel AH$ (2)	0.25
	Do đó $\angle FAH = \angle AFK$ mà $\angle FAH = \angle FAK$ (gt) cho nên $\angle AFK = \angle FAK$	0.25
	Suy ra $AK = KF$, kết hợp với (1) ta được $AH = KF$ (3)	0.25
	Từ (2) và (3) ta có $AKFH$ là hình bình hành nên $HF \parallel AK$. Mà	



	$AK \perp IB$ suy ra $HF \perp IB$.	0.25
c	Chu vi của $\Delta AMB = C_{\Delta AMB} = MA + MB + AB$ lớn nhất khi chỉ khi $MA + MB$ lớn nhất (vì AB không đổi).	0.25
	Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$, ta có $(MA+MB)^2 \leq 2(MA^2+MB^2) = 2AB^2$	0.25
	Nên $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất bằng $AB\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $MA = MB$ hay M nằm chính giữa cung AB .	0.25
	Vậy khi M nằm chính giữa cung AB thì $C_{\Delta AMB}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó	0.25
	$C_{\Delta AMB} = MA + MB + AB = AB\sqrt{2} + AB = (1 + \sqrt{2})AB = 2R(1 + \sqrt{2})$	0.25
5	Đặt $A = (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4)$, ta có $2^x \cdot A$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên $2^x \cdot A$ chia hết cho 5. Nhưng 2^x không chia hết cho 5, do đó A chia hết cho 5.	0.25
	Nếu $y \geq 1$, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y$ chia hết cho 5 mà 11879 không chia hết cho 5 nên $y \geq 1$ không thỏa mãn, suy ra $y = 0$.	0.25
	Khi đó, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$ $\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 1 = 11879$ $\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 11880$	0.25
	$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy $x = 3; y = 0$ là hai giá trị cần tìm.	0.25