**ĐỀ THI HSG TOÁN 9 HÀ NAM NĂM 2023-2024**

**ĐỀ 58**

**Câu I:** (3,5 điểm)

1. Xét biểu thức $Q=\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^{2}}}.\left[\sqrt{\left(2+x\right)^{3}}-\sqrt{\left(2-x\right)^{3}}\right]}{4+\sqrt{4-x^{2}}}$.

Tìm điều kiện của $x$ để $Q$ xác định và rút gọn $Q$.

1. Xét đa thức bậc bốn $P\left(x\right)=x^{4}+ax^{3}+bx^{2}+cx+d$, (với $a,b,c,d ϵ R$) thỏa mãn $P\left(-1\right)=3, P\left(3\right)=19 $và $P\left(5\right)=51$. Tính giá trị của $T=3P\left(-2\right)+5P(6)$.

**Câu II**. (4,0 điểm)

 1. Giải phương trình: $\sqrt{10x-5}+\sqrt{5x^{2}+5}=\sqrt{9x\left(x+2\right)}$ .

2. Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}x^{3}+y^{3}=1+y-x+xy\\7xy+y-x=7\end{array}\right.$

**Câu III.** (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho Parabol $\left(P\right):y=x^{2}$ và đường thẳng $d: y= 2(m-1)x-m^{2}$, với $m$ là tham số. Tìm các giá trị nguyên của $m$ để $d$ cắt $(P) $tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ $x\_{1},x\_{2}$ thỏa mãn $x\_{1}^{2}+2(m-1)x\_{2}\leq 3m^{2}+20$ .

**Câu IV.** (1,5 điểm) Tìm các số nguyên $x,y $thỏa mãn $2^{x}+33=y^{2}$.

**Câu V.** (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn $ABC \left(AB<AC\right)$ nội tiếp đường tròn $(O)$, ngoại tiếp đường tròn $(I)$. Đường thẳng $AI $cắt $(O)$ tại điểm thứ hai là $M$. Đường tròn $(I)$ tiếp xúc với hai cạnh $BC$,$CA$ lần lượt tại hai điểm $D$ và $E$ . Gọi $T$ là giao điểm của hai đường thẳng $BI$ và $DE$ .

1. Chứng minh $MB=MC=MI$.
2. Chứng minh tứ giác $AITE$ nội tiếp đường tròn.
3. Kẻ đường kính $AP$ của $(O)$ và đường cao $AH$ của tam giác $ABC$. Đường thẳng $MP$ lần lượt cắt hai đường thẳng $AH,BC$ tại hai điểm $N,K$ . Chứng minh $MI^{2}=MN.MK$ .
4. Đường thẳng $PI$ cắt $(O)$ tại điểm thứ hai là $Q$, hai đường thẳng $AQ$ và $BC$ cắt nhau tại điểm $S$ . Chứng minh rằng nếu chu vi của tam giác $ABC$ bằng $3BC$ thì $I$ là trọng tâm của tam giác $AKS$ .

**Câu VI.** (2,0 điểm) Xét $a,b,c$ là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$ .

 Chứng minh rằng: $\frac{b^{2}}{(ab+2)(2ab+1)}+\frac{c^{2}}{(bc+2)(2bc+1)}+\frac{a^{2}}{(ca+2)(2ca+1)}\geq \frac{1}{3}$ .

**---Hết---**

**ĐÁP ÁN**

Câu I. (3,5 điểm)

1.

Điều kiện xác định: $\{ 4-x^{2}\geq 0 2+x\geq 0 2-x\geq 0 ⇔ \{ x^{2}\leq 4 x\geq -2 x\leq 2 $ $⇒-2\leq x\leq 2 .$

P = $\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^{2}}}(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(4+\sqrt{4-x^{2})}}{4+\sqrt{4-x^{2}}}$

 = $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{4-x^{2}}}$ .($\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})$

 =$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^{2}}.$ ($\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})$

 =$\frac{1}{\sqrt{2}}$($\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})$ ($\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})$

 =$\frac{1}{\sqrt{2}}$.2x = $\sqrt{2}x .$

2.

Đa thức $f\left(x\right)=2x^{2}+1$ thỏa mãn $f\left(-1\right)=3$,$f\left(3\right)=19$ và $f\left(5\right)=51$.

Xét đa thức *Q(x)=P(x) -* $f(x)$là đa thức bậc bốn có các nghiệm x = -1 ,x = 3 và x = 5

Nên *Q(x)* = (x + 1) (x - 3) (x – 5) (x – m)

$⇒$*P(x) = Q(x) +* $f\left(x\right)$ = (x + 1)(x – 3)(x – 5)(x – m)+2$x^{2}+1$

*P* (-2) = 35(m+2) + 9 = 79 + 35m

*P* (6) = 21(6 – m) + 73 = 199 – 21m

Vậy 3*P*(-2) +5*P*(6) = 3(79 +35m) + 5(199 – 21m) = 1232.

Câu II. (4,0 điểm)

Điều kiện: x$\geq \frac{1}{2}$

(\*) $⇔ \sqrt{5}(\sqrt{2x-1}$+$\sqrt{x^{2}+1})$ = 3$\sqrt{x^{2}+2x}$

Đặt a = $\sqrt{2x-1}$ , b = $\sqrt{x^{2}+1}$ (a$\geq 0, b>0) ⇒ a^{2}+b^{2}$ = $x^{2}+2x$

Phương trình $⇔$ $\sqrt{5}\left(a+b\right)=3\sqrt{a^{2}+b^{2}}$ $⇒$ 5($a^{2}+b^{2})$ = 9($a^{2}+b^{2})$

$⇔$2$a^{2}-5ab+2b^{2}=0 ⇔$ (2a – b)(a – 2b) = 0 $⇔$ $[2a = b a = 2b $

+) 2a = b $⇔$ 2$\sqrt{2x-1}$ = $\sqrt{x^{2}+1}$ $⇔$ 4(2x – 1) = $x^{2}+1$

 $⇔x^{2}-8x+5=0 ⇔x=4\pm \sqrt{11}$ (thỏa mãn).

+) a = 2b $⇔$ $\sqrt{2x-1}$ = 2$\sqrt{x^{2}+1}$ $⇔$ 2x – 1 = 4($x^{2}+1$)

$⇔$4$x^{2}-2x+5=0$ ( vô nghiệm).

Vậy S = { $4\pm \sqrt{11}$ }.

2.

+) (2) $⇒ $y – x = 7 – 7xy thay vào (1) ta được $x^{3}+y^{3}=8-6xy$

$⇔$ $x^{3}+y^{3}+6xy-8=0 \left(x+y\right)^{3}-8+6xy-3xy\left(x+y\right)=0$

$⇔$ (x + y – 2)[($x+y)^{2}+2\left(x+y\right)+4 ]-3xy\left(x+y-2\right)=0$

$⇔$ (x + y – 2)($x^{2}+y^{2}+4-xy+2x+2y)=0$

$$⇔ [x + y – 2 = 0 x^{2}+y^{2}+ 4 - xy + 2x + 2y = 0 $$

+) x + y – 2 =$⇒y=2-x $thay vào (2), ta được 7x (2 – x)+ 2 – 2x = 7

$⇔$7$x^{2}- 12x+5=0⇔$ $[x =1⇒ y=1 x=\frac{5}{7}⇒ y=\frac{9}{7} $

+) $x^{2}+y^{2}+4-xy+2x+2y$ = 0

$⇔$ ($x - y)^{2}$+ $(x + 2 )^{2} + (y + 2 )^{2}=0⇔ $x = y = -2 (không thỏa mãn (2)).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là (1; 1) và ($ \frac{5}{7};\frac{9}{7} ).$

Câu III.(2,0 điểm)

Xét phương trình hoành độ giao điểm : $x^{2}=2\left(m-1\right)x-m^{2}$

$⇔x^{2}$ – 2(m – 1)x +$m^{2}$ =0 (\*)

*d* cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt

$⇔Δ^{'}$= ($m - 1)^{2}$ - $m^{2}>0$

$⇔$m$ < \frac{1}{2} $(1).

Gọi $x\_{1},x\_{2}$ là hoành độ giao điểm của *d* và (*P*) $x\_{1},x\_{2}=2\left(m-1\right) và x\_{1}^{2}=2\left(m-1\right)x\_{1}-m^{2}$

Ta có $ x\_{1}^{2}=2\left(m-1\right)x\_{2}\leq 3m^{2}+20 2(m - 1)( x\_{1}+x\_{2}) - m^{2} \leq 3m^{2}+20 $

$⇔$4($m - 1)^{2} -m^{2} \leq 3m^{2}+20 ⇔ $m$\geq -2 \left(2\right)$

Kết hợp (1) và (2) suy ra -2$\leq m\leq \frac{1}{2}$ .

Vì *m* là số nguyên *m* $\in \{-2;-1;0 \} .$

Câu IV. (1,5 điểm)

+) Ta nhận thấy x = 0 không thỏa mãn

+) Nếu x $<0$ thì $2^{x} là số không nguyên nên 2^{x}+33\ne y^{2}(với y\in Z ).$

+) Nếu x = 2k + 1(k$ \in N) thì 2^{x}=2^{2k+1}$ chia 3 dư 2 $nên 2^{x}+33\ne y^{2}(với y\in Z )$ (vì bình phương của một số nguyên chia 3 dư 0 hoặc 1).

+) Nếu x = 2*k*( *k* $\in N^{\*}$), ta xét với y $>$ 0 thì $2^{x}+33=y^{2}$

$⇔$ (y - $2^{k})(y+2^{k} $) = 33 = 1.33 = 3.11 $\{y - 2^{k} =1 y+2^{k}=33 $ hoặc $\{y - 2^{k} =3 y+2^{k}=11 $

$⇔[\{k = 4 y = 17 \{ k = 2 y = 7 ⇒$ $[\{x= 8 y =17 \{ x = 4 y=7 $

Vậy có bốn cặp số (x ; y) nguyên cần tìm là (8;17);(8;-17);(4;7);(4;-7)

Câu V. (7,0 điểm)



1.

Ta có AM là phân giác của $\hat{BAC} ⇒ \hat{BAM}$ *=* $\hat{CAM}$

$⇒sđ\hat{BM }$*= sđ*$\hat{CM}$$⇒$ *MB=MC*(1)

$\hat{MBC }$= $\hat{MAC}$(=$\frac{1}{2}sđMC) ⇒\hat{MBC}=\hat{MAB}$

Lại có *BI* là phân giác của góc $\hat{ABC}⇒$ $\hat{ABI}=$ $\hat{IBC}$

$\hat{MBI}$ = $\hat{MBC}$+ $\hat{CBI}$ = $\hat{MAB }$+ $\hat{ABI}$

Mà $\hat{MIB}$ = $\hat{MAB}$ + $\hat{ABI}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$⇒\hat{MBI}$ = $\hat{MIB } ⇒ΔMBI$ cân tại M $⇒$*MB = MI* (2)

Từ (1) và (2) suy ra *MB = MC = MI* (đpcm).

2.

Ta có *CD* và *CE* là hai tiếp tuyến của (1)$⇒$ $ΔCDE cân tại C$

$$⇒\hat{CDE}=\hat{CED}=\frac{1}{2}(180^{O}-\hat{ACB})$$

Trong $ΔTBD$, có $\hat{TBD}+\hat{BTD}=\hat{EDC}$ (tính chất góc ngoài tam giác)

Mà BI là phân giác của $\hat{ABC} ⇒\hat{TBC}=\frac{1}{2}\hat{ABC}$

$⇒\frac{1}{2}(180^{O}-\hat{ACB})=\frac{1}{2}\hat{ABC}$ + $\hat{BTD}$

$$⇒\hat{BTD}=\frac{1}{2}[180^{O}-(\hat{ACB}+\hat{ABC})]=\frac{1}{2}\hat{BAC}=\hat{IAE}$$

Mà $\hat{BTD}$ + $\hat{ITE}$ = $180^{O}$ $⇒\hat{EAI}+\hat{ITE}=180^{O}$

Vậy tứ giác AITE nội tiếp đường tròn

3.



Ta có AP là đường kính của (O) $⇒\hat{PAC}=\hat{APC}=90^{O}$

Mà $\hat{APC}=\hat{ABC}(=\frac{1}{2}sđAC)⇒\hat{PAC}+\hat{ABC }=90^{O}$

Lại có $\hat{BAH}+\hat{ABC }=90^{O}⇒\hat{PAC}=\hat{BAH}$

Vi AI là phân giác của $\hat{BAC}⇔\hat{NAM}=\hat{PAM}$

Mặt khác AM $⊥$ NP $⇒ΔANP cân tại A và $MN = MP (3)

Gọi AI cắt BC tại L

Ta có $\hat{MCL}=\hat{MAC}(=\hat{MAB})⇒ΔMCL∼ΔMAC(g-g)⇒MC^{2}=MA.ML$ (4)

Ta có $\hat{MKB}=\frac{1}{2}sđ(BM-CP)=\frac{1}{2}sddMP=\hat{MAP}$

$⇒ΔMAP∼ΔMKL$ (g-g) $⇒MA.ML=MP.MK$ (5)

Từ (3), (4), (5) $⇒MC^{2}=MN.MK$ mà MC = MI

Vậy $MI^{2}=MN.MK$ (đpcm)

4.

$ΔINK,$ có IM $⊥$ NK và $MI^{2}=MN.MK$ (chứng minh trên) $⇒\hat{NIK}=90^{o}$

Lại có AH $⊥$ BC $⇒\hat{NHK}=90^{o}$

Suy ra tứ giác NHIK nội tiếp $⇒\hat{IHK}=\hat{INK}$

Mà $\hat{IHK}=\hat{IPM}$ và $\hat{QAM}=\hat{QPM}=\frac{1}{2}sđQM)$

$⇒\hat{IHK}=$ $\hat{QAM}$, mặt khác $\hat{IHK}+\hat{IHS}=180^{o}⇒$ $\hat{QAM}+\hat{IHS}=180^{o}$

$⇒$ AIHS là tứ giác nội tiếp $⇒\hat{AIS}=\hat{AHS}= 90^{o}$

Gọi U là trung điểm của AS $⇒ΔAUI cân tại U$ $⇒\hat{UAI}=\hat{AIU}$

Tại lại có $\hat{INK}=\hat{MIK}$ (cùng phụ với $\hat{IKN}$)

$⇒$ $\hat{AIU}=\hat{MIK}$ nên ba điểm U,I,K thẳng hàng hay điểm I $ϵ$ UK

BI là phân giác của $\hat{ABL}⇒\frac{IA}{IL}=\frac{AB}{LB}$

AL là phân giác của $\hat{BAC}⇒\frac{LB}{LC}=\frac{AB}{AC}⇒\frac{LB}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}=\frac{AB}{2BC}$

(Vì AB + AC + BC = 3BC $⇒AB+AC=2BC)$

$⇒LB=\frac{1}{2}AB⇒\frac{IA}{IL}=2.$(

Áp dụng hệ quả của định lý Thales, trong tam giác ASL với cát tuyến UIK

Ta có $\frac{UA}{US}.\frac{KS}{KL}.\frac{IL}{IA}=1⇒KS=2KL $hay L là trung điểm của SK

Vậy I là trọng điểm của tam giác AKS (đpcm)

**AL**

Chứng minh (x+2)(2x+1)$\leq \frac{9}{4}(x+1)^{2}$

$⇔4(2x^{2}+5x+2)\leq 9(x^{2}+2x+1)⇔(x-1\_{})^{2}\geq 0 $(luôn đúng), dấu “=” khi x = 1

Áp dụng kết quả trên, ta có $(ab+2)(2ab+1)\leq \frac{9}{4}(ab+1)^{2}$

$$⇒\frac{b^{2}}{(ab+2)(2ab+1)}\geq \frac{4}{9}\frac{b^{2}}{(ab+1)^{2}}$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{c^{2}}{(bc+2)(2bc+1)}\geq \frac{4}{9}\frac{c^{2}}{(bc+1)^{2}}$ và

 $\frac{b^{2}}{(ca+2)(2ca+1)}\geq \frac{4}{9}\frac{a^{2}}{(ca+1)^{2}}$

$⇒VT\geq \frac{4}{9}[\frac{b^{2}}{(ab+1)^{2}}$+$\frac{c^{2}}{(bc+1)^{2}}$+$\frac{a^{2}}{(ca+1)^{2}}$]$\geq \frac{4}{27}(\frac{b}{ab+1}+\frac{c}{bc+1}+\frac{a}{ca+1})^{2}$

$⇔ VT \geq \frac{4}{27}(\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z})^{2}$ (với a = $\frac{x}{y}; b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x})$ (1)

Chứng minh $\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}\geq \frac{3}{2}$ (2)

$$⇔\frac{y^{2}}{z+x}+\frac{z^{2}}{x+y}+\frac{x^{2}}{y+z}\geq \frac{x+y+z}{2}(3)$$

Áp dụng AM - GM , ta có : $\frac{y^{2}}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geq y; \begin{array}{c}\frac{z^{2}}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq z; \\\frac{x^{2}}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq x\end{array}\_{}$

Suy ra (3) luôn đúng

$⇒VT \geq \frac{4}{27}.\frac{9}{4}=\frac{1}{3}$ (đpcm)

Dấu “=” khi a = b = c = 1.