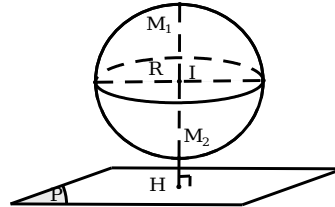


CHỦ ĐỀ 3

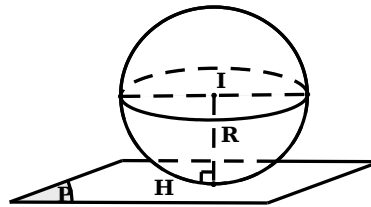
BÀI TOÁN LIÊN QUAN VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó:

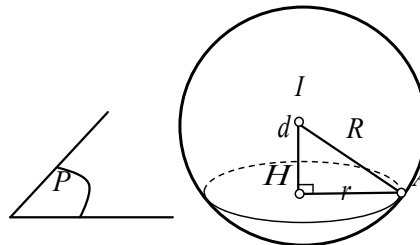
▮ Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



▮ Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của (S) và H là tiếp điểm.



▮ Nếu $d < R$: mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



DẠNG 1

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VỚI MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn C

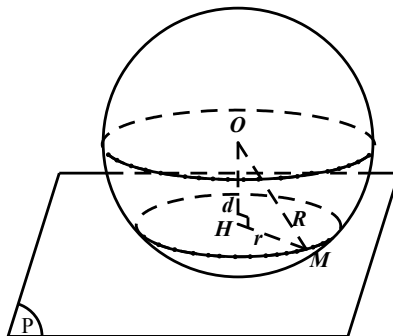
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$. Vậy $d(I, (P)) = \frac{|3 - 2 + 6 + 14|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = 3$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P) .

A. $r = \frac{1}{3}$. B. $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $r = \frac{1}{2}$. D. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 1$.

Khoảng cách $d(O, (P)) = \frac{1}{3}$.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Bán kính đường tròn giao tuyến là

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

A. $r = 3$.

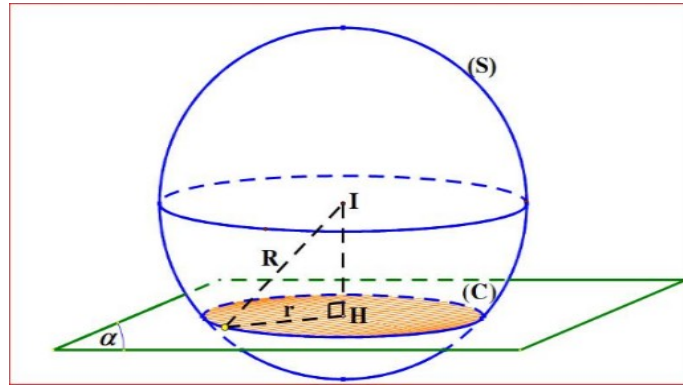
B. $r = \sqrt{5}$.

C. $r = \sqrt{6}$.

D. $r = \sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là $d = 3$, suy ra bán kính đường tròn giao tuyến cần tìm là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz) . Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $|a| = 1$.

B. $a + b + c = 1$.

C. $|b| = 1$.

D. $|c| = 1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt phẳng (Oxz) : $y = 0$.

Vì mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính bằng 1 tiếp xúc với (Oxz) nên ta có:

$$d(I; (Oxz)) = 1 \Leftrightarrow |b| = 1$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$ và mặt phẳng (P): $4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$ hoặc $m = -21$.

C. $m = 1$ hoặc $m = 21$.

D. $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu (S): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$ có tâm $I(2; -1; -2)$, bán kính $R = 2$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu

$$(S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |11 - m| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 21 \end{cases}$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình

mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

- A. $(Q): y + 3z = 0$. B. $(Q): x + y - 2z = 0$. C. $(Q): y - z = 0$. D. $(Q): y - 2z = 0$.

Lời giải

Chọn D

(Q) chứa trục Ox nên có dạng $By + Cz = 0$ ($B^2 + C^2 \neq 0$).

(S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

Bán kính đường tròn giao tuyến $r = 3$.

Vì $R = r$ nên $I \in (Q)$.

$\Leftrightarrow -2B - C = 0$ vì B, C không đồng thời bằng 0 nên chọn $B = 1 \Rightarrow C = -2$.

Vậy $(Q): y - 2z = 0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 45$ và mặt phẳng

$(P): x + y - z - 13 = 0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a; b; c)$ thì

giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. -11. B. 5. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $A(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 3\sqrt{5}$.

Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a; b; c) \Rightarrow I$ là hình chiếu của

$$A \text{ lên mp } (P) \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overline{AI} \perp \overline{P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c - 13 = 0 \\ 1 - a = k \\ 2 - b = k \\ -1 - c = -k \end{cases} \Rightarrow (1 - k) + (2 - k) - (-1 + k) - 13 = 0 \Leftrightarrow k = -3$$

$\Rightarrow I(4; 5; -4)$.

Vậy $a + b + c = 5$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$, mặt phẳng

$(P): 4x + 3y + m = 0$. Giá trị của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) .

A. $\begin{cases} m > 11 \\ m < -19 \end{cases}$. B. $-19 < m < 11$. C. $-12 < m < 4$. D. $\begin{cases} m > 4 \\ m < -12 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ có tâm $I(1;0;1)$ và bán kính $R = 3$

(P) cắt mặt cầu $(S) \Leftrightarrow d[I; (P)] < R \Leftrightarrow \frac{|4.1 + 3.0 + m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} < 3$

$\Leftrightarrow |m + 4| < 15 \Leftrightarrow -19 < m < 11$

Chọn đáp án A.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z = 1$. Giá trị của a để (P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C)

A. $-\frac{17}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. B. $-\frac{17}{2} < a < \frac{1}{2}$. C. $-8 < a < 1$. D. $-8 \leq a \leq 1$.

Lời giải

Chọn C

$(S): (x - a)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ có tâm $I(a; 2; 3)$ và có bán kính $R = 3$

(P) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn $(C) \Leftrightarrow d[I; (P)] < R$

$\Leftrightarrow \frac{|2.a + 2 + 2.3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} < 3 \Leftrightarrow |2a + 7| < 9 \Leftrightarrow -8 < a < 1$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 10 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (P) tiếp xúc với (S) .
 B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.
 C. (P) và (S) không có điểm chung.
 D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{4 + 1 + 1 - (-10)} = \sqrt{16} = 4$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d(I, (P)) = \frac{|2 + 2(-1) - 2(-1) + 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{3} = 4$

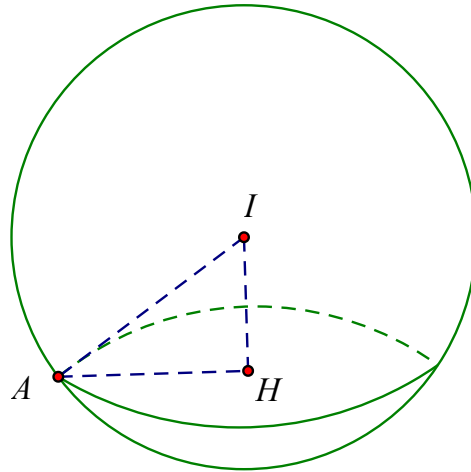
Ta thấy: $d(I, (P)) = R$, vậy (P) tiếp xúc với (S) .

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): mx + 2y - z + 1 = 0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

- A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm 2 + \sqrt{5}$. C. $m = \pm 4$. D. $m = 6 \pm 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Từ $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$ ta có tâm $I = (2; 1; 0)$ bán kính $R = 3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và $(P) \cap (S) = C(H; r)$ với $r = 2$

$$\text{Ta có } IH = d(I; (P)) \Leftrightarrow IH = \frac{|2m + 2 - 0 + 1|}{\sqrt{m^2 + 4 + 1}} = \frac{|2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 5}}$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có } R^2 = IH^2 + r^2 \Leftrightarrow 9 = \frac{(2m + 3)^2}{m^2 + 5} + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 12m + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 - 2\sqrt{5} \\ m = 6 + 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 12. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H , khi đó H có tọa độ là:

- A. $H(-3; -1; -2)$. B. $H(-1; -5; 0)$. C. $H(1; 5; 0)$. D. $H(3; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm $H \Rightarrow H$ là hình chiếu của I lên (P)

Đường thẳng đi qua $I(1; -2; 1)$ và vuông góc với (P) là $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$

$H(1 + 2t; 3t - 2; 1 + t) \in d$

$H \in (P) \Leftrightarrow 2(1 + 2t) + 3(3t - 2) + (1 + t) - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow H(3; 1; 2)$

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

A. $r = \frac{2\sqrt{42}}{3}$

B. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $r = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

D. $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; -2)$ và bán kính $R = 2$. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) .

Ta có $d = d(I, (\alpha)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Khi đó ta có: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

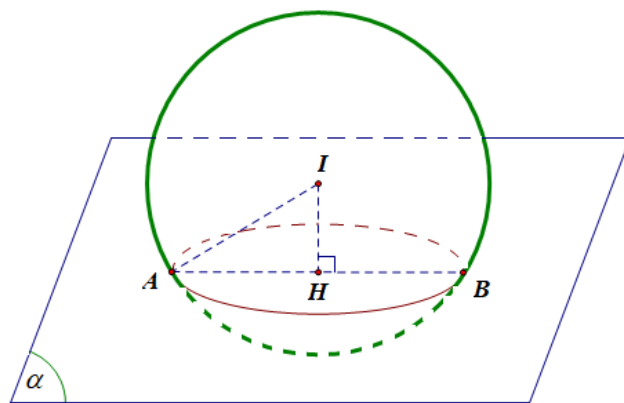
PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 14. Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$. Tính bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: bán kính đường tròn (C) bằng 8.



Gọi I là tâm mặt cầu (S) , H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) và AB là một đường kính của đường tròn (C) .

Để thấy $I(3; -2; 1)$, $IA = 10$, $IH = d(I, (\alpha)) = 6$ suy ra $HA = \sqrt{IA^2 - IH^2} = 8$.

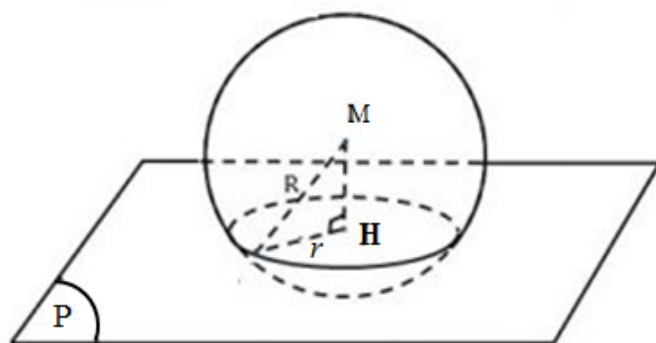
Vậy bán kính đường tròn (C) bằng 8.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 1 = 0$ và điểm $M(1; -2; 0)$. Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\sqrt{2}$



Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $R = \sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm H , bán kính r suy ra $r = \sqrt{R^2 - MH^2}$.

Với $MH = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - (-2) - 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1$. Suy ra $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases}$

Ta có $(S): \begin{cases} I(1; -1; 1) \\ R = 3 \end{cases}$

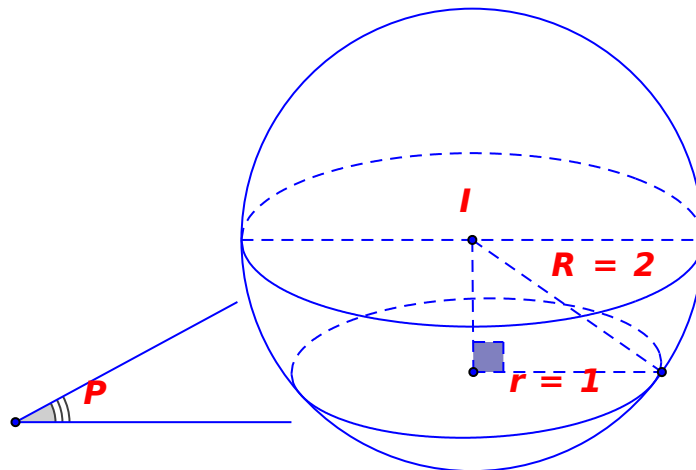
Để (P) tiếp xúc với (S) thì $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - m^2 - 3m|}{3} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 10 = 0 \\ m^2 + 3m + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases}$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x + my + z - 3m - 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = 1$



Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$ có tâm $I(2; 4; 1)$, bán kính $R = 2$.

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|2 + 4m + 1 - 3m - 1|}{\sqrt{1 + m^2 + 1}} = \frac{|m + 2|}{\sqrt{m^2 + 2}}$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2 nên bán kính đường tròn giao tuyến $r = 1$.

Ta có $R^2 = d^2(I, (P)) + r^2 \Leftrightarrow 4 = \frac{(m+2)^2}{m^2+2} + 1 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = 3(m^2 + 2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m = -1$

Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 17 - m$.

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17 - m > 0 \Leftrightarrow m < 17$.

Khi đó $I(-1; 2; 3); R = \sqrt{17 - m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S) .

Để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r = 4$.

Ta có $R^2 = d^2(I, (\beta)) + r^2 \Leftrightarrow 17 - m = 16 + 2 \Leftrightarrow m = -1$ (TMĐK).

Câu 19. Trong không gian O_{xyz} cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$ và $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Số mặt cầu đi qua $A(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 0

Ta có $M(0; 0; 2) \in (P) \Rightarrow d((P); (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$d(A; (P)) = \frac{\sqrt{6}}{2}; d(A; (Q)) = \sqrt{6} \Rightarrow d(A; (Q)) = d(A; (P)) + d((Q); (P))$$

Vậy không có mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ O_{xyz} , cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và một điểm $M(2; 3; 1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ta có $IM = (1; 2; 1)$ và $IM = \sqrt{6}$.

O là tâm của đường tròn (C) khi đó $IM \perp HO$ và $HO = r$.

Ta có $HI.HM = HO.IM \Rightarrow r = \frac{HI.HM}{IM} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Trả lời:

Đáp án: $R = 1$

Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$

Mặt khác
$$d(I;(ABC)) = \frac{|1-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}} = 1$$
 (vì $m+n=1$) và $ID=1=d(I;(ABC)).$

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D . Khi đó $R=1$.

DẠNG 2

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2; 1; -4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0$

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 4 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0$

Lời giải

Chọn C

$$R = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 5$$

Mặt cầu cần tìm có bán kính

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$$

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

- A. $x + y + 3z - 9 = 0$ B. $x + y - 3z + 3 = 0$ C. $x + y - 3z - 8 = 0$ D. $x - y - 3z + 3 = 0$

Lời giải

Chọn B

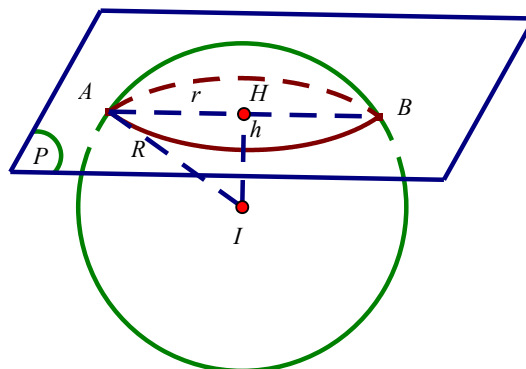
Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2; 1; 2)$ và nhận vector $\vec{IA} = (-1; -1; 3)$ làm vector pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là $-x - y + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

- A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$ B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$
C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$ D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$

Lời giải

Chọn D



Gọi h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) ta có:

$$h = d(I; (P)) = \frac{|-1 - 4 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3$$

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$ có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

Lời giải

Chọn C

Vì mặt cầu tâm $I(-1; 2; 1)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$ nên bán kính

$$R = d(I, (P)) = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3 \Rightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 7 = 0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 81$

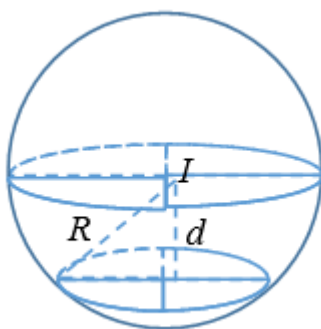
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$

Lời giải

Chọn D



Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3$$

Đường tròn giao tuyến có đường kính bằng 8 nên bán kính đường tròn là $r = 4$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{d^2 + r^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$?

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$

B. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$

C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$

Lời giải

Chọn D

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) có R là bán kính. Khi đó ta có:

$$d(I, (P)) = R \Rightarrow R = \frac{|2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow R = 3$$

$$(S) \text{ là } (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$$

Vậy phương trình của

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$

B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$

D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Lời giải

Chọn D

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

$$R^2 = r^2 + (d(I, (P)))^2 = 1 + \left(\frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} \right)^2 = 10$$

Ta có

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$ là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Câu 29. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn D.

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0(*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2;3;3)$, $N(2;-1;-1)$, $P(-2;-1;3)$ và có tâm I thuộc $mp(P)$ nên ta có

$$\begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \\ 2a + 3b - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} : T / m(*)$$

hệ phương trình

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3;0;1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π . Phương trình mặt cầu (S) là

- A. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.
 B. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$.
 C. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$.
 D. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi S, r lần lượt là diện tích hình tròn và bán kính hình tròn.

Ta có: $S = \pi r^2 = \pi \Rightarrow r = 1$

$$d(I; (P)) = \frac{|-3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$$

(S) có tâm $I(-3;0;1)$ và bán kính $R = \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

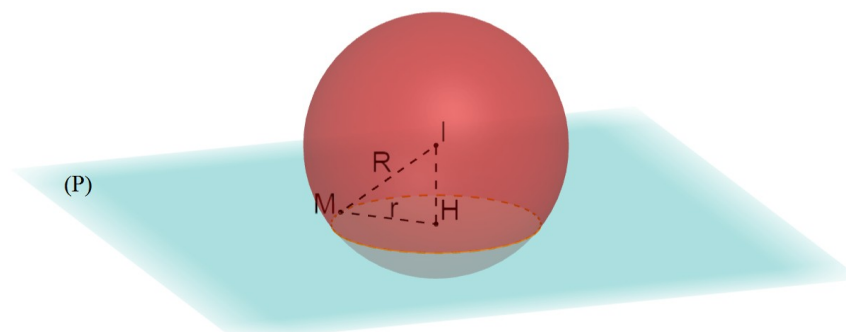
Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

- A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.
 B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.
 C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$.
 D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P) . Ta có $IM = R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

$$IM^2 = R^2 = d_{(I;(P))}^2 + r^2 \quad (*)$$

$$d_{(I;(P))} = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 = IH.$$

Ta có:

Từ $(*) \Rightarrow R^2 = 3^2 + 5^2 = 34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Lập phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$

$$R = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$$

Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng đã cho có bán kính

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π . Lập phương trình mặt cầu (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giả thiết ta có:

$$\pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2 = 2$$

Mặt khác $d(I, (P)) = 1$ nên $R^2 = r^2 + [d(I, (P))]^2 = 3$.

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Câu 34. Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2, 3, 3, 2$ (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{6}{11}$

Cách 1:

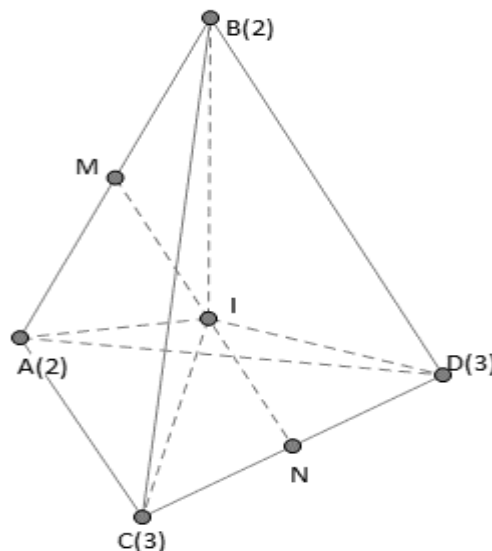
Gọi A, B, C, D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB = 4, AC = BD = AD = BC = 5$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Dễ dàng tính được $MN = 2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA = IB, IC = ID$ nên I nằm trên đoạn MN .

Đặt $IN = x$, ta có $IC = \sqrt{3^2 + x^2} = 3 + r, IA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 2 + r$

Từ đó suy ra $\sqrt{3^2 + x^2} - \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{3}}{11}$, suy ra $r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2} - 3 = \frac{6}{11}$

Cách 2



Gọi A, B là tâm quả cầu bán kính bằng $2, C, D$ là tâm quả cầu bán kính bằng $3, I$ là tâm quả cầu bán kính x .

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A, B, C, D nên $IA = IB = x + 2, IC = ID = x + 3$.

Gọi $(P), (Q)$ lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD .

$$\begin{cases} IA = IB \Rightarrow I \in (P) \\ IC = ID \Rightarrow I \in (Q) \end{cases} \Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \quad (1)$$

Tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = CA = CB = 5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD , suy ra $MN = (P) \cap (Q) \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $I \in MN$

Tam giác IAM có $IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$

Tam giác CIN có $IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}$

Tam giác ABN có $NM = \sqrt{NA^2 - AM^2} = \sqrt{12}$

Suy ra $\sqrt{(x+3)^2 - 9} + \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{6}{11}$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 12

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; \sqrt{2})$ và bán kính $R = \sqrt{3}$; $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a; b; 0)$

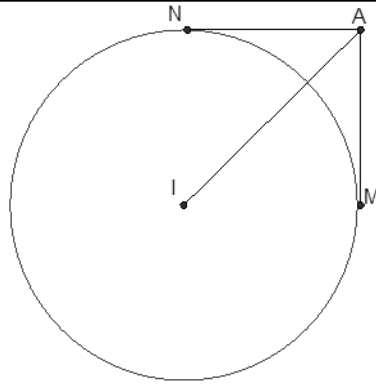
* Xét trường hợp $A \in (S)$, ta có $a^2 + b^2 = 1$. Lúc này các tiếp tuyến của (S) thuộc tiếp diện của (S) tại A nên có vô số các tiếp tuyến vuông góc nhau.

Trường hợp này ta có 4 cặp giá trị của $(a; b)$ là $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}; \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}; \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}; \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

* Xét trường hợp A ở ngoài (S) . Khi đó, các tiếp tuyến của (S) đi qua A thuộc mặt nón đỉnh A . Nên các tiếp tuyến này chỉ có thể vuông góc với nhau tại A .

Điều kiện để có ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc là góc ở đỉnh của mặt nón lớn hơn hoặc bằng 90° .

Giả sử $A'N; A'M$ là các tiếp tuyến của (S) thỏa mãn $AN \perp AM$ ($N; M$ là các tiếp điểm)



Dễ thấy $A'NIM$ là hình vuông có cạnh $IN = R = \sqrt{3}$ và $IA' = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$.

Điều kiện phải tìm là
$$\begin{cases} IA > R \\ IA \leq IA' = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 > 1 \\ a^2 + b^2 \leq 4 \end{cases}$$

Vì a, b là các số nguyên nên ta có các cặp nghiệm $(a; b)$ là $(0; 2), (0; -2), (2; 0), (-2; 0), (1; 1), (-1; -1), (-1; 1), (1; -1)$.

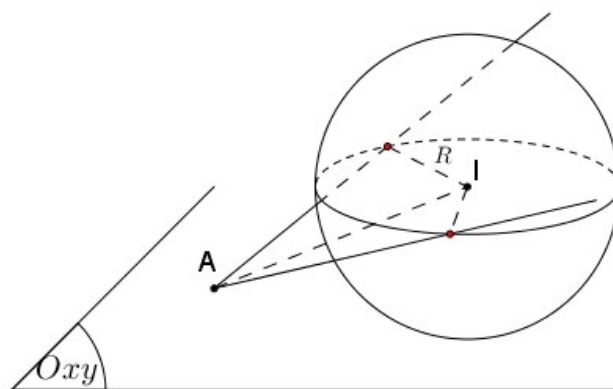
Vậy có 12 điểm A thỏa mãn yêu cầu.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 20



Mặt cầu có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón tâm A , để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

Vậy $R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \leq a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$

Ta có các bộ số thỏa mãn $(0; \pm 2); (0; \pm 3); (\pm 1; \pm 2); (\pm 2; \pm 2); (\pm 2; \pm 1); (\pm 2; 0); (\pm 3; 0)$, 20 bộ số.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A. 20.

B. 8.

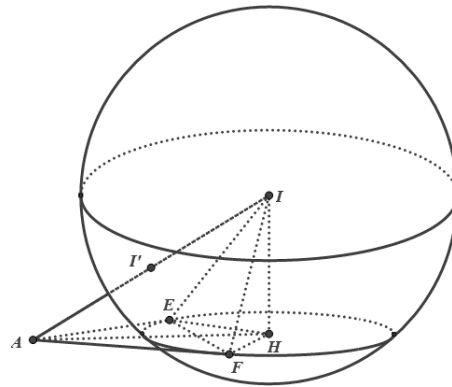
C. 12.

D. 16.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 20.



Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$ có tâm $I(0;0;-1)$ và có bán kính $R = \sqrt{5}$

$A(a; b; 0) \in (Oxy)$, Gọi I' là trung điểm của $AI \Rightarrow I' \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2} \right)$

Gọi E, F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE \perp AF$.

Ta có: E, F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I' \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2} \right)$, bán kính $R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$.

Để tồn tại E, F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R - R'| \leq II' \leq R + R'$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{5} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \leq \sqrt{5} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4(1)$$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh $AE = HF = \sqrt{AI^2 - 5}$.

$$\text{Ta có } IH^2 = R^2 - HF^2 = 5 - (AI^2 - 5) = 10 - AI^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 9(2)$$

Từ (1) và (2) ta có $4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$ mà $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.

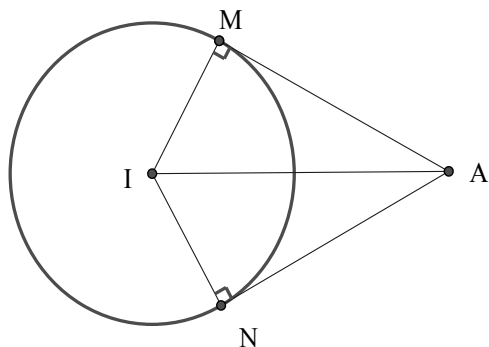
Cách khác:

Mặt cầu (S) có tâm $I(0, 0, -1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))} = 1 < R \Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) . Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A \Leftrightarrow AI \geq R$ (1).

Có $A(a, b, c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a, b, 0), IA = a^2 + b^2 + 1$.

Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI > R$ và là một mặt phẳng nếu $AI = R$.

Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM, AN là hai tiếp tuyến sao cho A, M, I, N đồng phẳng.



Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\angle MAN \geq 90^\circ \Leftrightarrow IA \leq R\sqrt{2}$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases}.$$

Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; -2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC . Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x^2 + y^2 + z^2 - 9x - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}z = 0$

Mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên $a, b, c \neq 0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mà $H(1; 2; -2) \in (\alpha)$ nên: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c} = 1$ (1).

Ta có: $\overline{AH} = (1-a; 2; -2)$, $\overline{BH} = (1; 2-b; -2)$, $\overline{BC} = (0; -b; c)$, $\overline{AC} = (-a; 0; c)$.

Lại có H là trực tâm tam giác ABC , suy ra $\begin{cases} \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} b = -c \\ a = -2c \end{cases}$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{1}{-2c} + \frac{2}{-c} - \frac{2}{c} = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{9}{2}$, khi đó $a = 9, b = \frac{9}{2}$.

Vậy $A(9; 0; 0)$, $B(0; \frac{9}{2}; 0)$, $C(0; 0; -\frac{9}{2})$.

Khi đó, giả sử mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d = 0. \text{ Với } (a')^2 + (b')^2 + (c')^2 - d > 0$$

Vì 4 điểm O, A, B, C thuộc mặt cầu nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 0 \\ -18a' + d = -81 \\ -9b' + d = -\frac{81}{4} \\ 9c' + d = -\frac{81}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a' = \frac{9}{2} \\ b' = \frac{9}{4} \\ c' = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là: $x^2 + y^2 + z^2 - 9x - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}z = 0$, có tâm $I(\frac{9}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{9}{4})$

và bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{9\sqrt{6}}{4}$.

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2; -2; 5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P): x=1, (Q): y=-1$ và $(R): z=1$ có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 1

Gọi $I(a; b; c)$ và R là tâm và bán kính của (S) . Khi đó ta có

$$R = IA = d(I; (P)) = d(I; (Q)) = d(I; (R)) \Leftrightarrow IA = |a-1| = |b+1| = |c-1| \Leftrightarrow \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = \pm(b+1) \\ a-1 = \pm(c-1) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = b+1 \Leftrightarrow \\ a-1 = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = a \\ (2-a)^2 + a^2 + (5-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = a \\ 2a^2 - 12a + 28 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

TH2:

$$\begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = -b-1 \Leftrightarrow \\ a-1 = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ (2-a)^2 + (-2+a)^2 + (5-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 - 16a + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \Rightarrow R = 1 \\ c = 4 \end{cases} \quad \text{TH3}$$

$$\begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = b+1 \Leftrightarrow \\ a-1 = -c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a-2 \\ c = 2-a \\ (2-a)^2 + a^2 + (3+a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 + 4a + 12 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} IA = |a-1| \\ a-1 = -b-1 \Leftrightarrow \\ a-1 = -c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2-a \\ (2-a)^2 + (-2+a)^2 + (3+a)^2 = (a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = a \\ 2a^2 + 12 = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy mặt cầu có bán kính $R = 1$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m \in (0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 10 = 0$ và $(\beta): \frac{x}{m} + \frac{y}{1-m} + \frac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 9

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu.

Theo giả thiết ta có $R = d(I, (\alpha)) = d(I, (\beta))$.

$$d(I, (\beta)) = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{1-m} + c - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(1-m)^2} + 1}}$$

Mà

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(1-m)^2} + 1} &= \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{1-m} \right)^2 - 2 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-m} + 1} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{m(1-m)} \right]^2 - 2 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1-m} + 1} = \frac{1}{m(1-m)} - 1 \quad (\text{do } m \in (0;1)) \end{aligned}$$

Nên

$$R = \frac{\left| \frac{a(1-m) + bm + cm(1-m) - m(1-m)}{m(1-m)} \right|}{\frac{1}{m(1-m)} - 1}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2|}{m^2 - m + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R - Rm + Rm^2 = a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2 \\ -R + Rm - Rm^2 = a - am + bm + cm - cm^2 - m + m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2(R+c-1) + m(a-b-c-R+1) + R-a = 0(1) \\ m^2(R+c-1) + m(b+c-a-R-1) + R+a = 0(2) \end{cases}$$

Xét (1) do mặt cầu tiếp xúc với tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ với mọi $m \in (0;1)$ nên pt

(1) nghiệm đúng với mọi $m \in (0;1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R+c-1=0 \\ a-b-c-R+1=0 \\ R-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=R \\ b=R \\ c=1-R \end{cases} \Rightarrow I(R; R; 1-R)$$

$$R = d(I, (\alpha)) \Leftrightarrow R = \frac{|2R - R + 2(1-R) + 10|}{3} \Leftrightarrow 3R = |12 - R| \Leftrightarrow \begin{cases} R=3 \\ R=-6(l) \end{cases}$$

Mà

Xét (2) tương tự ta được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R+c-1=0 \\ b+c-a-R-1=0 \\ R+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-R \\ b=-R \\ c=R+1 \end{cases} \Rightarrow I(-R; -R; R+1)$$

$$R = d(I, (\alpha)) \Leftrightarrow R = \frac{|-2R + R + 2(1+R) + 10|}{3} \Leftrightarrow 3R = |12 + R| \Leftrightarrow \begin{cases} R=6 \\ R=-3(l) \end{cases}$$

Mà

$$\text{Vậy } R_1 + R_2 = 9$$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 11; -5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với

mặt phẳng (P) và cùng đi qua A . Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $12\sqrt{2}$

Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm của mặt cầu (S) cố định và R là bán kính của mặt cầu (S) .

Ta có:

$$R = d(I, (P)) = \frac{|2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10|}{\sqrt{4m^2 + (m^2 + 1)^2 + (m^2 - 1)^2}} = \frac{|2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10|}{\sqrt{2}(m^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10 = R\sqrt{2}(m^2 + 1) \\ 2mx_0 + (m^2 + 1)y_0 + (m^2 - 1)z_0 - 10 = -R\sqrt{2}(m^2 + 1) \end{cases} \text{ đúng với mọi } \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y_0 + z_0)m^2 + 2mx_0 + y_0 - z_0 - 10 = R\sqrt{2}m^2 + R\sqrt{2} \\ (y_0 + z_0)m^2 + 2mx_0 + y_0 - z_0 - 10 = -R\sqrt{2}m^2 - R\sqrt{2} \end{cases} \text{ đúng với mọi } \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y_0 + z_0 = R\sqrt{2} \\ x_0 = 0 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} y_0 - z_0 - 10 = R\sqrt{2} \\ x_0 = 0 \end{cases} & (II) \end{cases}$$

Từ hệ (I) suy ra $x_0 = 0; y_0 = 5 + R\sqrt{2}; z_0 = -5$

Do đó tâm mặt cầu là $I(0; 5 + R\sqrt{2}; -5)$

Ta có: $R^2 = IA^2 \Leftrightarrow R^2 = 4 + (R\sqrt{2} - 6)^2$ suy ra $R = 2\sqrt{2}$ và $R = 10\sqrt{2}$

Hệ (II) suy ra $x_0 = 0; y_0 = 5 - R\sqrt{2}; z_0 = -5$

Như vậy, ta có: $R^2 = IA^2 \Leftrightarrow 4 + (R\sqrt{2} + 6)^2 = R^2$, phương trình không có giá trị R thỏa mãn nên loại.

Vậy tổng hai bán kính của hai mặt cầu là: $12\sqrt{2}$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ O_{xyz} cho $A(-3; 1; 1), B(1; -1; 5)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $r = 4$

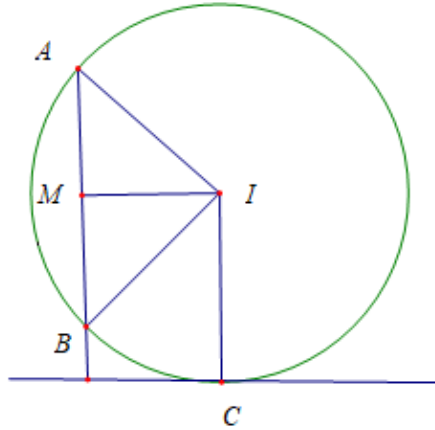
Ta có $\overline{AB} = (4; -2; 4)$ và mp (P) có vec tơ pháp tuyến $n = (2; -1; 2)$. Do đó AB vuông góc với (P) .

Giả sử mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên ta có

$$\begin{cases} 9 + 1 + 1 + 6a - 2b - 2c + d = 0 \\ 1 + 1 + 25 - 2a + 2b - 10c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 2c + d = -11 \\ 2a - 2b + 10c - d = 27 \end{cases}$$

Suy ra $8a - 4b + 8c = 16 \Leftrightarrow 2a - b + 2c = 4$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên ta có $d(I, (P)) = \frac{|2a - b + 2c + 11|}{3} = 5$.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$. Gọi M là trung điểm AB ta có

$d(C, AB) = IM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Vậy C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định có bán kính $r = 4$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 1; 4)$, $N(5; 0; 0)$, $P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết rằng $a + b + c < 5$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $c = 2$

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ là $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Đk: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

(S) đi qua các điểm M, N, P và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - 8c + d = -21 \\ -10a + d = -25 \\ -2a + 6b - 2c + d = -11 \\ R = |a| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - 8c + 10a - 25 = -21 \\ d = 10a - 25 \\ -2a + 6b - 2c + 10a - 25 = -11 \\ a^2 + b^2 + c^2 - d = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 8a + 6b - 2c = 14 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 32a + 24b - 8c = 56 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 2b - 8c = 4 \\ d = 10a - 25 \\ 26a + 26b = 52 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a - 1 \\ d = 10a - 25 \\ b = -a + 2 \\ b^2 + c^2 - d = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (-a + 2)^2 + (a - 1)^2 - 10a + 25 = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 16a + 30 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=5 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=5 \\ b=-3 \\ c=4 \\ d=25 \end{cases}$$

Vì $a+b+c < 5$ nên chọn $c=2$.

DẠNG 3

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG MẶT CẦU

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 44. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A .

A. $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$.

B. $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$.

C. $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$.

D. $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1;1;1)$.

Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm là điểm I .

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A nên mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\vec{IA} = (5;1;-6)$ là vector pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng $(P): 5(x-6)+1(y-2)-6(z+5)=0 \Leftrightarrow 5x+y-6z-62=0$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+7=0$.

Biết mp (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ theo một đường tròn có bán kính $r=3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x-y+2z-7=0$

B. $2x-2y+z+17=0$

C. $2x-2y+z+7=0$

D. $2x-2y+z-17=0$

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính $R=5$

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I lên (Q)

(Q) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$

$$\Rightarrow IM = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$(Q) \parallel (P): 2x-2y+z+7=0 \Rightarrow (Q): 2x-2y+z+m=0 (m \neq 7)$$

$$d[I; (Q)] = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + m|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = IM = 4$$

$$\Leftrightarrow |m+5|=12 \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ m=-17 \end{cases}$$

Vậy $(Q): 2x-2y+z-17=0$

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0$. Mặt phẳng tiếp xúc

với (S) và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-11=0$ có phương trình là:

A. $2x-y+2z-7=0$

B. $2x-y+2z+9=0$

C. $2x-y+2z+7=0$

D. $2x-y+2z-9=0$

Lời giải

Chọn C

Ta gọi phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 11 = 0$ có dạng :
 $(Q): 2x - y + 2z + D = 0, (D \neq -11)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2 - 5} = 3$

Vì mặt phẳng tiếp xúc với (S) nên ta có :

$$d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot (-1) - 2 + 2 \cdot 3 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|2 + D|}{3} = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + D = 9 \\ 2 + D = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ D = -11 \end{cases} \text{ Do } D \neq -11 \Rightarrow D = 7$$

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x - y + 2z + 7 = 0$

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3 có phương trình là:

- A. $y - 2z = 0$ B. $y + 2z = 0$ C. $y + 3z = 0$ D. $y - 3z = 0$

Lời giải

Chọn A

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$

(P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 3 = R$

$\Rightarrow I \in (P)$

Chọn điểm $M(1; 0; 0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (0; 2; 1)$

$$n = \left[\overrightarrow{a}; \overrightarrow{IM} \right] = (0; -1; 2)$$

(P) qua $O(0; 0; 0)$ và có VTPT $n = (0; -1; 2) \Rightarrow (P): y - 2z = 0$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0$ và điểm $K(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S) .

- A. $2x + 2y + z - 4 = 0$ B. $6x + 6y + 3z - 8 = 0$
 C. $2x + 2y + z + 2 = 0$ D. $6x + 6y + 3z - 3 = 0$

Lời giải

Chọn A.

$(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3 \Rightarrow$ mặt cầu tâm $I(0; 0; -1), R = \sqrt{3}$

Do $IK = (2; 2; 1), IK = 3 > R \Rightarrow K$ nằm ngoài mặt cầu. Suy ra từ K vẽ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu và khoảng cách từ K đến các tiếp điểm bằng nhau.

Gọi E là 1 tiếp điểm $\Rightarrow IE \perp EK \Rightarrow \triangle IKE$ vuông tại $E \Rightarrow KE = \sqrt{IK^2 - IE^2} = \sqrt{6} \Rightarrow E$ thuộc mặt cầu tâm K bán kính $R' = \sqrt{6}$.

Tọa độ điểm E thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z + 2 = 0.$$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) song song với giá của vector $v = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S) .

A. $\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 21 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3x + y + 4z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x - 3y - z + 5 = 0 \\ 4x - 3y - z - 27 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$.

Vì mặt phẳng (P) song song với giá của vector $v = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) nên có vec tơ pháp tuyến $n = [n_{(\alpha)}, v] = (2; -1; 2)$.

Mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + D = 0$.

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 - 3 + 2 \cdot 2 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Leftrightarrow |D + 9| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -21 \\ D = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

A. $x - 2y - 2z + 1 = 0$

B. $-x + 2y + 2z + 5 = 0$

C. $x - 2y - 2z - 23 = 0$

D. $-x + 2y + 2z + 17 = 0$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -3)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Phương trình (Q) có dạng: $x - 2y - 2z + D = 0$ ($D \neq -5$)

$$(Q) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ khi và chỉ khi } d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 2(-2) - 2(-3) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |D + 11| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D + 11 = 6 \\ D + 11 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -5 \\ D = -17 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện suy ra $D = -17$.

Vậy phương trình của (Q) là $x - 2y - 2z - 17 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Câu 51. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$,

mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của

vecto $v = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

A. $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$

B. $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$

C. $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$

D. $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn C

(S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$. Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = (1; 4; 1)$.

Suy ra VTPT của (P) là $\vec{n}_P = [\vec{n}_\alpha, v] = (2; -1; 2)$.

Do đó (P) có dạng: $2x - y + 2z + d = 0$.

Mặt khác (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = 4$

$$\text{Hay } \frac{|2 + 3 + 4 + d|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Rightarrow \begin{cases} d = -21 \\ d = 3 \end{cases}$$

Câu 52. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6 \quad \text{đồng thời song song với hai đường thẳng} \quad d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1},$$

$$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

A. $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ x-y+2z+9=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y+2z-3=0 \\ x+y+2z+9=0 \end{cases}$ C. $x+y+2z+9=0$ D. $x-y+2z+9=0$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d_1 có vtcp $\vec{u}_1(3; -1; -1)$, đường thẳng d_2 có vtcp $\vec{u}_2(1; 1; -1)$. Gọi n là vtp của mặt phẳng

(α) cần tìm. Do (α) song song với hai đường thẳng d_1, d_2 nên $n \perp \vec{u}_1$ và $n \perp \vec{u}_2$, từ đó ta chọn

$$n = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 2; 4). \text{ Suy ra } (\alpha): x+y+2z+c=0.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

$$(\alpha) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I; (\alpha)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|c-3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} c-3=6 \\ c-3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=9 \\ c=-3 \end{cases}.$$

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc

với mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $3x-y+2z=0$ B. $-2x+2y-z+4=0$
C. $x+y+z=0$ D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (3; 1; -4)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là n .

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -3; 1)$ và bán kính $R = 3$.

Vì (P) chứa d nên $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ và (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I; (P)) = 3$.

Ta chỉ xét phương trình $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Lấy hai điểm nằm trên đường thẳng d là $M(4; 0; -4)$ và $N(1; -1; 0)$.

Ta nhận thấy: $M(4; 0; -4)$ và $N(1; -1; 0)$ không thỏa mãn đáp án A; B; C.

Vậy, đáp án là D.

Câu 54. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

- A. $y+z+3=0$ B. $x+z+1=0$ C. $x+y+1=0$ D. $x+z-1=0$

Lời giải.

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$; $R = \sqrt{2}$.

Véc tơ chỉ phương của d : $u_d = (1; 2; -1)$. Véc tơ chỉ phương của Δ : $u_\Delta = (1; 1; -1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $[u_d, u_\Delta] = (-1; 0; -1)$ nên chọn một véc tơ pháp tuyến của (P) là $n = (1; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng: $x+z+D=0$.

Do (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|-1-2+D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |D-3|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} D=5 \\ D=1 \end{cases}$$

Chọn (P) : $x+z+1=0$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4; 3; 1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M , song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

- A. $2x-2y+5z-22=0$ B. $2x+y+2z-13=0$
C. $2x+y-2z-1=0$ D. $2x-y+2z-7=0$

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Gọi $n = (2a; b; c)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần lập, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $u = (-3; 2; 2)$.

Mặt phẳng (P) song song với Δ nên ta có $n \cdot u = 0 \Leftrightarrow -6a + 2b + 2c = 0 \Leftrightarrow c = 3a - b$.

Mặt phẳng (P) đi qua M và có véc tơ pháp tuyến n nên phương trình có dạng:

$$2a(x-4)+b(y-3)+(3a-b)(z-1)=0 \Leftrightarrow 2ax+by+(3a-b)z-11a-2b=0 (*)$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=1$.

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I,(P))=1 \Leftrightarrow \frac{3|b|}{\sqrt{4a^2+b^2+(3a-b)^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3|b|}{\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}}=1 \Leftrightarrow 3|b|=\sqrt{13a^2+2b^2-6ab}$$

$$\Leftrightarrow 9b^2=13a^2+2b^2-6ab \Leftrightarrow 13a^2-6ab-7b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(13a+7b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 13a=-7b \end{cases}$$

Với $a=b$, chọn $a=1, b=1$, thay vào $(*)$ ta được pt $(P_1): 2x+y+2z-13=0$.

Ta có $N(6;2;2) \in \Delta$. Dễ thấy $N \notin (P_1)$, suy ra $(P_1): 2x+y+2z-13=0$ song song với Δ .

Với $13a=-7b$, chọn $a=7, b=-13$, thay vào $(*)$ ta được pt $(P_2): 14x-13y+34z-51=0$.

Ta có $N(6;2;2) \in \Delta$, dễ thấy $N \notin (P_2)$, suy ra $(P_2): 14x-13y+34z-51=0$ song song với Δ .

Cách 2: (Trắc nghiệm)

Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán và có vector pháp tuyến là n .

Vì (P) đi qua $M(4;3;1)$ nên phương án A, C bị loại.

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương $u=(-3;2;2)$. (P) song song với đường thẳng Δ nên $n \cdot u = 0$. Do đó phương án D bị loại.

Vậy phương án B là phương án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ và mặt phẳng

$(\alpha): 4x+3y-12z+10=0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc

với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x+3y-12z-78=0$.

B. $4x+3y-12z-26=0$.

C. $4x+3y-12z+78=0$.

D. $4x+3y-12z+26=0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=4$.

Mặt phẳng (β) song song với (α) nên có phương trình dạng $4x+3y-12z+c=0 (c \neq 10)$.

$$(\beta) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I;(\beta))=R \Leftrightarrow \frac{|4.1+3.2-12.3+c|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=4 \Leftrightarrow \frac{|-26+c|}{13}=4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -26 + c = 52 \\ -26 + c = -52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 78 \\ c = -26 \end{cases}$$

Nếu $c = 78$ thì $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0; 0; \frac{13}{2}\right)$ có cao độ dương.

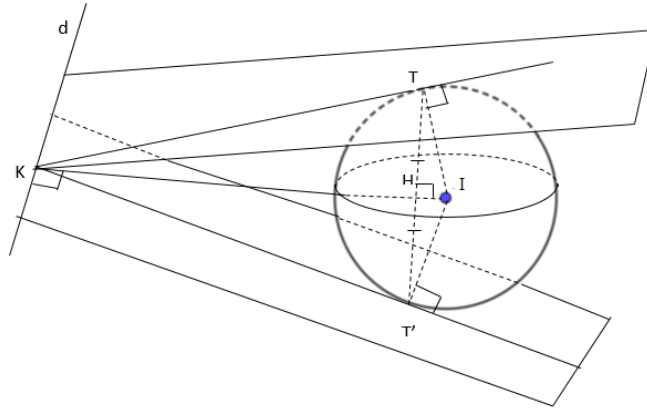
Nếu $c = -26$ thì $(\beta): 4x + 3y - 12z - 26 = 0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0; 0; -\frac{13}{6}\right)$ có cao độ âm.

Vậy $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

- A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$. B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) tâm $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d .

$K \in d$ nên ta có thể giả sử $K(t; 2+t; -t)$

$\overrightarrow{IK} = (t-1; 2+t; -t+1)$, $\overrightarrow{u_d} = (1; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

$IK \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t-1+2+t-t-1=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow K(0; 2; 0)$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2 = IH \cdot IK$.

$\Leftrightarrow IH = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ($IK = \sqrt{6}$) $\Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x; y; z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\frac{1}{6} \cdot (-1) \\ y-0=\frac{1}{6} \cdot 2 \\ z+1=\frac{1}{6} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{6} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{Vậy } H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$$

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

A. 1 mặt phẳng. **B. 2 mặt phẳng.** **C. 0 mặt phẳng.** **D. Vô số mặt phẳng.**

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình mặt phẳng là: $(P): Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Theo đề bài, mặt phẳng qua A, B nên ta có:

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -D \\ D = -2C \end{cases} \quad \text{Vậy mặt phẳng } (P) \text{ có dạng: } 2Cx + By + Cz - 2C = 0.$$

(S) có tâm $I(1,1,0)$ và $R=1$.

$$\text{Vì } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên } d_{(I,(P))} = R \Leftrightarrow \frac{2C + B - 2C}{\sqrt{5C^2 + B^2}} = 1 \Leftrightarrow B^2 = 5C^2 + B^2 \Leftrightarrow C = 0.$$

Suy ra $A = D = 0$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): y = 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 7 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 10 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π . Lập phương mặt phẳng (Q) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R = \sqrt{15}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến. Ta có $2\pi r = 6\pi \Leftrightarrow r = 3$.

Do $(Q) \parallel (P) \Rightarrow (Q): x - 2y + z + d = 0 \quad (d \neq 7)$.

$$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|d-1|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} d=7 \text{ (loại)} \\ d=-5 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Ta có:

Vậy $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$.

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $4x + 3y - 12z + 78 = 0$

Mặt cầu (S) có: tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4$.

Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên phương trình mp (α) có dạng: $4x + 3y - 12z + d = 0, (d \neq 10)$.

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên: $d_{(I, (\beta))} = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow |d - 26| = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -26 \\ d = 78 \end{cases}$.

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d = 78$.

Vậy mp $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Câu 61. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π ? Lập phương mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $(P): x - 2y + z + 7 = 0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{15}$.

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$x - 2y + z + D = 0, D \neq -5$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π nên

$d(I; (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow d(I; (P)) = \sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 0 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow |D - 1| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D - 1 = 6 \\ D - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ D = -5 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được $D = 7$. Do đó phương trình mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 7 = 0$.

Câu 62. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$ và điểm $A(2; 3; 4)$. Tìm tập hợp điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: tập hợp điểm M cần tìm là mặt phẳng có phương trình $x + y + z - 7 = 0$

Dễ thấy A nằm ngoài mặt cầu (S) . Tâm mặt cầu là $I(1; 2; 3)$.

Đường thẳng AM tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow AM \perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) + (y - 3)(y - 2) + (z - 4)(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 - 1)(x - 1) + (y - 2 - 1)(y - 2) + (z - 3 - 1)(z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - (x + y + z - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 7 = 0 \text{ (Do } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 0 \text{)}$$

Câu 63. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2; -2; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 6$. Tìm tập hợp điểm M .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: tập hợp điểm M cần tìm là mặt phẳng có phương trình $2x - 2y + 6z + 9 = 0$

Gọi điểm $M(x; y; z) \in (S)$ là điểm cần tìm.

$$\text{Khi đó: } x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -4z - 3 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OM} = (x; y; z) \text{ và } \overrightarrow{AM} = (x - 2; y + 2; z - 2)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM} = 6 \Leftrightarrow x(x - 2) + y(y + 2) + z(z - 2) = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 6 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được

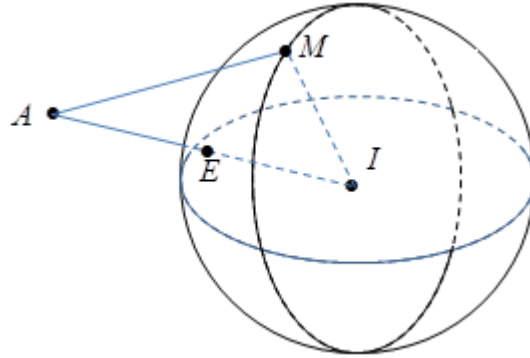
$$-4z - 3 - 2x + 2y - 2z = 6 \Leftrightarrow 2x - 2y + 6z + 9 = 0$$

Câu 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S) . Tìm tập hợp điểm M .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $x + y + z - 4 = 0$



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R = 1$. $A(2; 2; 2)$

Ta luôn có $\angle AMI = 90^\circ$, suy ra điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm E là trung điểm của AI đường kính AI .

Với $E\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1 = IE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu (S_1) : $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$$

Vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$$

Trừ theo về hai phương trình cho nhau ta được: $x + y + z - 4 = 0$.

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với

$a, b, c > 0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{7}{2}$

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì điểm $M\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$ thuộc mặt phẳng (ABC)

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{7}\right)}{a} + \frac{\left(\frac{2}{7}\right)}{b} + \frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{7a} + \frac{2}{7b} + \frac{3}{7c} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$$

Mặt khác mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$

$\Rightarrow$ khoảng cách từ tâm $I(1,2,3)$ của cầu tới mặt phẳng (ABC) là $\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Rightarrow d(I, (ABC)) = \frac{\left|\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \quad \text{mà } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$$

$$\Rightarrow d(I, (ABC)) = \frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2}$$

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2;1;4)$, $N(5;0;0)$, $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M , N , P . Tìm c biết rằng $a+b+c < 5$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $c=2$

Giả sử mặt cầu (S) đã cho có phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Từ đề bài ta có:

$$M(2;1;4) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 2b - 8c + d = -21 \quad (1)$$

$$N(5;0;0) \in (S) \Leftrightarrow -10a + d = -25 \quad (2)$$

$$P(1;-3;1) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b - 2c + d = -11 \quad (3)$$

Hình chiếu của điểm $I(a;b;c)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;b;c) \Rightarrow \overline{HI} = (a;0;0) \Rightarrow HI = |a|$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow IH = |a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \Leftrightarrow b^2 + c^2 - d = 0 \quad (4)$

Từ (1); (2); (3) ta có:

$$\begin{cases} b = 2 - a \\ c = a - 1 \\ d = 10a - 25 \end{cases}$$

Thế vào phương trình (4) ta được: $a^2 - 8a + 15 = 0 \Leftrightarrow a = 5 \vee a = 3$.

Trường hợp 1: $a = 5 \Rightarrow b = -3, c = 4 \Rightarrow a + b + c = 6 > 5 \Rightarrow$ loại.

Trường hợp 1: $a = 3 \Rightarrow b = -1, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 4 < 5 \Rightarrow$ nhận.

Vậy $c = 2$ thỏa yêu cầu đề.

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ và điểm $A(2; 2; 2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $2x + 2y + z - 5 = 0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = 2$.

Có $\overrightarrow{IA} = (2; 2; 1) \Rightarrow IA = 3$.

Tam giác ABI vuông tại B nên ta có $AB = \sqrt{IA^2 - IB^2} = \sqrt{5}$.

Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao kẻ từ B của tam giác ABI .

Ta có: $IB^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IB^2}{IA} = \frac{4}{3} \Rightarrow IH = \frac{4}{9} \cdot IA$

$$\overrightarrow{IH} = \frac{4}{9} \overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} x - 0 = \frac{4}{9} \cdot 2 \\ y - 0 = \frac{4}{9} \cdot 2 \\ z - 1 = \frac{4}{9} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{9} \\ y = \frac{8}{9} \\ z = \frac{13}{9} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{13}{9}\right)$$

Từ suy ra được

Mặt phẳng (BCD) vuông góc với đường thẳng IA nên nhận $\overrightarrow{IA} = (2; 2; 1)$ làm vector pháp tuyến. Hơn nữa mặt phẳng (BCD) đi qua điểm H .

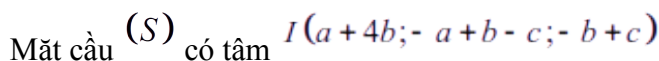
Vậy (BCD) có phương trình: $2 \cdot \left(x - \frac{8}{9}\right) + 2 \cdot \left(y - \frac{8}{9}\right) + 1 \cdot \left(z - \frac{13}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0$.

Câu 68. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25$ và $(S'): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn

có chu vi bằng 6π . Tính khoảng cách từ O đến (P) bằng

Trả lời:

Đáp án:



Giả sử mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$.

Vì $I \in (\alpha)$ nên ta có

$$\begin{aligned} A(a+4b) + B(-a+b-c) + C(-b+c) + D &= 0 \\ \Leftrightarrow (A-B)a + (4A+B-C)b + (-B+C)c &= -D \quad (1). \end{aligned}$$

Theo bài ra ta có $4a+b-2c=4$ (2).

Đồng nhất (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} A-B=4 \\ 4A+B-C=1 \\ -B+C=-2 \\ D=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{17}{4} \\ C=-\frac{25}{4} \\ D=-4 \end{cases}$$

Suy ra (α) có phương trình $x+17y+25z+16=0$.

Vậy, khẳng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến (α) bằng

$$d(D, (\alpha)) = \frac{|1+17.2+25.(-2)+16|}{\sqrt{1^2+17^2+25^2}} = \frac{1}{\sqrt{915}}.$$

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B , C và bán kính đều bằng

1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là:

$ax + by + cz + d = 0$ (đk: $a^2 + b^2 + c^2 > 0$).

$$\begin{cases} d(A; (P)) = 2 \\ d(B; (P)) = 1 \\ d(C; (P)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2 \\ \frac{|3a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 1 \\ \frac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 1 \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ điều kiện sau:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |3a-b+c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-a-b+c+d| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

Khi đó ta có: $|3a-b+c+d| = |-a-b+c+d| \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b+c+d = -a-b+c+d \\ 3a-b+c+d = a+b-c-d \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-b+c+d=0 \end{cases}$$

với $a=0$ thì ta có $\begin{cases} |2b+c+d| = 2\sqrt{b^2+c^2} \\ |2b+c+d| = 2|-b+c+d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d| = 2\sqrt{b^2+c^2} \\ 4b-c-d=0 \\ c+d=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c+d=0 \Rightarrow c=d=0, b \neq 0 \\ c+d=4b, c=\pm 2\sqrt{2}b \end{cases} \text{ do đó có 3 mặt phẳng.}$$

Với $a-b+c+d=0$ thì ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 4|a| \\ |2a| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = \frac{4}{3}|a| \\ |c| = \frac{\sqrt{11}}{3}|a| \end{cases}$

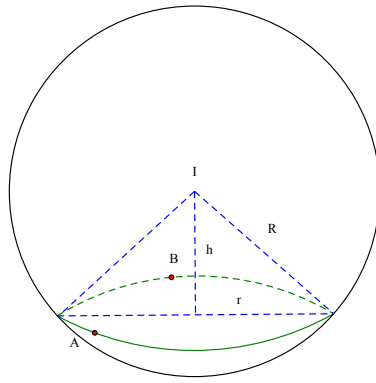
do đó có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán. Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Câu 71. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \frac{7-\sqrt{3}}{2}; 3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}; \frac{7+\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$. Xét mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c,d \in \mathbb{Z}: d < -5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B . Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Tính giá trị của $T = |a+b+c+d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = |a+b+c+d| = 6$



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

Có $IA = IB = \sqrt{6}$ nên A, B thuộc mặt cầu (S) .

$\vec{AB} = (-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 0) = -\sqrt{3}(1; -1; 0) = -\sqrt{3}\vec{a}$, $M\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$ là trung điểm của AB .

Gọi $\vec{a} = (1; -1; 0)$ và $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P)

$$\text{Vì } A, B \in (P) \text{ nên có } \begin{cases} I \notin (P) \\ \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a + \frac{7}{2}b + 3c + d = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -6a - 3c \\ a = b \end{cases}$$

Gọi $h = d(I, (P))$, $(C) = (P) \cap (S)$, r là bán kính đường tròn (C) .

$$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{6 - h^2}$$

Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N) .

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2r = h \cdot \sqrt{6 - h^2} \leq \frac{h^2 + 6 - h^2}{2} = 3$$

$$\text{Max } S = 3 \text{ khi } h^2 = 6 - h^2 \Rightarrow h = \sqrt{3}$$

$$h = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{|a + 2b + 3c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -c \end{cases}$$

Nếu $a = c$ thì $b = a; d = -9a$ và $(P): ax + ay + az - 9a = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 9 = 0$ (nhận).

Nếu $a = -c$ thì $b = a; d = -3a$ và $(P): ax + ay - az - 3a = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 3 = 0$ (loại).

$$\text{Vậy } T = |a + b + c + d| = 6$$

Câu 72. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$ và $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp

xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

Trả lời:

Lời giải

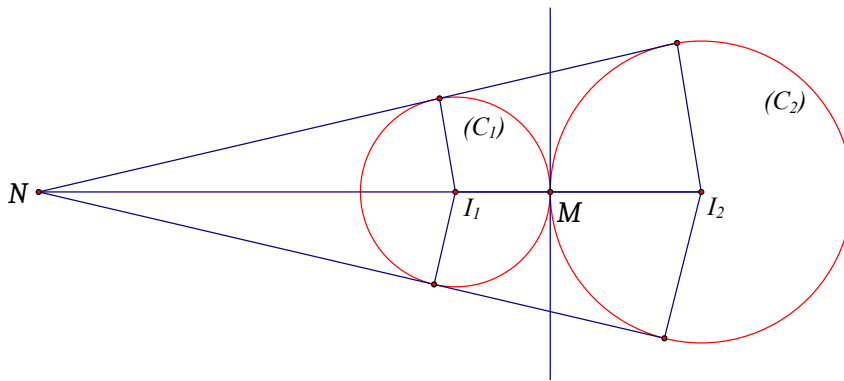
Đáp án: có 2 mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$.

Ta có: $(S_1): \begin{cases} I_1(-3; 2; 4) \\ R_1 = 1 \end{cases}, (S_2): \begin{cases} I_2(0; 2; 4) \\ R_2 = 2 \end{cases}, (S_3): \begin{cases} I_3(-2; 2; 0) \\ R_3 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 I_2 = 3 = R_1 + R_2 \Rightarrow (S_1), (S_2)$ tiếp xúc với nhau tại M .

Ta có $\overline{MI_2} = 2\overline{I_1 M} = \frac{2}{3}\overline{I_1 I_2} \Rightarrow M(-2; 2; 4)$

Cắt hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ theo phương chứa đường nối tâm của chúng ta có thiết diện là hai đường tròn lớn $(C_1), (C_2)$.



Trường hợp 1: Mặt phẳng qua M vuông góc với $I_1 I_2$ có phương trình là $(\alpha): x + 2 = 0$ mà $d(I_3; (\alpha)) = 0 \Rightarrow (\alpha)$ không tiếp xúc với $(S_3) \Rightarrow$ **LOẠI**.

Trường hợp 2: N là tâm vị tự ngoài của $(C_1), (C_2) \Rightarrow \overline{NI_2} = 2\overline{NI_1} = 2\overline{I_1 I_2} \Rightarrow N(-6; 2; 4)$.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu. (P) qua N và có vtpt là $n(1; a; b)$

$\Rightarrow (P): x + 6 + a(y - 2) + b(z - 4) = 0 \Leftrightarrow (P): x + ay + bz - 2a - 4b + 6 = 0$

Có: $\begin{cases} d(I_1; (P)) = 1 \\ d(I_2; (P)) = 2 \\ d(I_3; (P)) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \sqrt{1 + a^2 + b^2} \\ 6 = 2\sqrt{1 + a^2 + b^2} \\ |4b - 4| = 3\sqrt{1 + a^2 + b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{13}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}$

Với $b = \frac{13}{4} \Rightarrow a^2 = -\frac{41}{16}$ (loại)

Với $b = -\frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{103}{16} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{103}}{4}$

Vậy có 2 mặt phẳng tiếp xúc với 3 mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$.