**CHỦ ĐỀ 2 : GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ**

**LÍ THUYẾT**

### **Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong**

* Xét họ đường cong  có phương trình , trong đó  là hàm đa thức theo biến  với  là tham số sao cho bậc của *m* không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi  thay đổi?
* **Phương pháp giải:**
* **Bước 1:** Đưa phương trình  về dạng phương trình theo ẩn  có dạng sau: hoặc .
* **Bước 2:** Cho các hệ số bằng , ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:  hoặc .
* **Bước 3:** Kết luận:

Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong  không có điểm cố định.

Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của .

### **Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên**

* Cho đường cong  có phương trình  (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?
* Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.
* **Phương pháp giải:**
* **Bước 1:**Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
* **Bước 2:** Lập luận để giải bài toán.

### **Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng**

* **Bài toán 1:** Cho đồ thị trên đồ thị  tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm.
* **Phương pháp giải:**
* Gọi  là hai điểm trên  đối xứng nhau qua điểm .
* Ta có .
* Giải hệ phương trình tìm được  từ đó tìm được toạ độ *M*, *N*.
* Công thức giải nhanh cho các dạng toán về tính đối xứng qua giao điểm của 2 tiệm cận của đồ thị hàm số có dạng , có tâm đối xứng là .
* Tất cả các bài toán trên đều có thể giải quyết bởi nhận xét: “Hoành độ của các điểm  thỏa mãn bài toán luôn là nghiệm của phương trình ”.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**VÍ DỤ 1:** Gọi  là số thực âm để đồ thị hàm số  có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ  . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

**A.**  . **B. ** . **C. ** . **D. **.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có ;  .

Hàm số có hai cực trị khi  . Khi đó, gọi  là tọa độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số. Hai điểm này đối xứng với nhau qua đường thẳng  khi và chỉ khi:

 (vì ).

Vì  nên ta chọn .

**Cách 2.**

**Chú ý:** Hai điểm  đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất khi và chỉ khi .

 đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất khi và chỉ khi (với ) . Đối chiếu các phương án, ta chọn phương án D.

**VÍ DỤ 2:** Cho hàm số  có đồ thị . Hai điểm ,  trên  sao cho tam giác  nhận điểm  làm trực tâm. Tính độ dài đoạn thẳng .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi ,   là hai điểm phân biệt thuộc .

Khi đó, , , , .

Điểm  là trực tâm của tam giác  khi và chỉ khi

.

Lấy  trừ  vế theo vế ta được .

Thay vào  ta có

.

Do đó, và  hoặc  và . Vậy .

**VÍ DỤ 3:** Gọi  là đồ thị hàm số . Điểm  thuộc  có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với  khi đó  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: .

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  và tiệm cận ngang .

Do .

Xét .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi .

Theo đề bài, ta có  nên nhận . Vậy .

**VÍ DỤ 4:** Cho hàm số có đồ thị . Biết rằng trên  có hai điểm  đối xứng nhau qua điểm . Tính độ dài .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi 

Mặt khác .

Do đó, .

**VÍ DỤ 4:** Cho hàm số , có đồ thị . Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* mà không có đường cong nào đi qua là miền giới hạn bởi hai đường thẳng song song. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta cần tìm các điểm 





Vậy tập hợp các điểm này nằm giữa hai đường thẳng song song .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song này bằng .