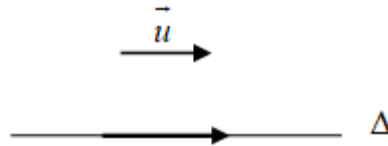


BÀI 2**PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG****1. Phương trình đường thẳng****a. Vector chỉ phương của đường thẳng**

Cho đường thẳng Δ và vector $\vec{u}$ khác $\vec{0}$. Vector $\vec{u}$ được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

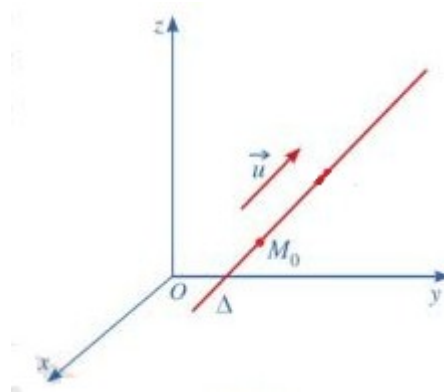
**Nhận xét:**

- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vector chỉ phương của nó.
- Nếu $\vec{u}$ là một vector chỉ phương của đường thẳng thì $k.\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là một vector chỉ phương của đường thẳng đó.

b. Phương trình tham số của đường thẳng

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, **phương trình tham số** của đường thẳng Δ đi qua điểm

$M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ (với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) làm vector chỉ phương có dạng:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{với } t \in \mathbb{R} \text{ (} t \text{ được gọi là tham số)}$$

**c. Phương trình chính tắc của đường thẳng**

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vector

chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Nếu $a, b, c \neq 0$ thì hệ phương trình:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
 được gọi là **phương trình chính tắc** của đường thẳng Δ .

d. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và nhận $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ làm vector chỉ phương có:

• Phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R}$$

• Phương trình chính tắc: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$ (với $x_B \neq x_A, y_B \neq y_A, z_B \neq z_A$)

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

a. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Trong không gian, hai vector được gọi là cùng phương khi giá của chúng cùng song song với một đường thẳng.

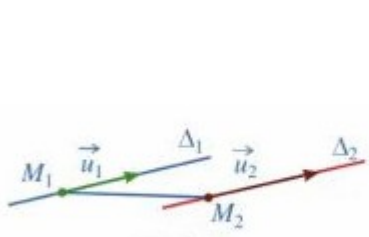
Trong không gian, ba vector được gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $a = (a_1; a_2; a_3), b = (b_1; b_2; b_3), c = (c_1; c_2; c_3)$

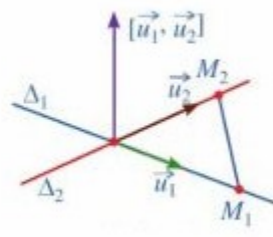
- Hai a, b cùng phương $\Leftrightarrow [a, b] = 0$
- Hai a, b không cùng phương $\Leftrightarrow [a, b] \neq 0$
- Ba vectơ a, b, c đồng phẳng $\Leftrightarrow [a, b] \cdot c = 0$
- Ba vectơ a, b, c không đồng phẳng $\Leftrightarrow [a, b] \cdot c \neq 0$

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $u_1 = (a_1; b_1; c_1), u_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vector chỉ phương. Khi đó, ta có:

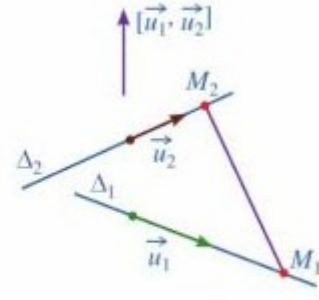
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overline{M_1M_2} & \text{cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overline{M_1M_2}] = \vec{0} \end{cases}$
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overline{M_1M_2} & \text{không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overline{M_1M_2}] \neq \vec{0} \end{cases}$
- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overline{M_1M_2} & \text{đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overline{M_1M_2} = 0 \end{cases}$
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overline{M_1M_2} \neq 0$



Δ_1 song song Δ_2



Δ_1 cắt Δ_2



Δ_1 và Δ_2 chéo nhau

Chú ý: Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, ta cũng có thể dựa vào các vector chỉ phương và phương trình của hai đường thẳng đó.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $u_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $u_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vector chỉ phương và có phương trình tham số:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1 t_1 \\ y = y_1 + b_1 t_1 \\ z = z_1 + c_1 t_1 \end{cases} \quad (t_1 \in \mathbb{R}), \quad \Delta_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2 t_2 \\ y = y_2 + b_2 t_2 \\ z = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} \quad (t_2 \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x_1 + a_1 t_1 = x_2 + a_2 t_2 \\ y_1 + b_1 t_1 = y_2 + b_2 t_2 \\ z_1 + c_1 t_1 = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} \quad (*)$$

Xét hệ phương trình hai ẩn t_1, t_2 :

Khi đó :

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow u_1$ cùng phương với u_2 và hệ $(*)$ vô nghiệm.
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.
- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.
- Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow u_1$ không cùng phương với u_2 và hệ $(*)$ vô nghiệm.

b. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $u_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $u_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vector chỉ phương. Khi đó :

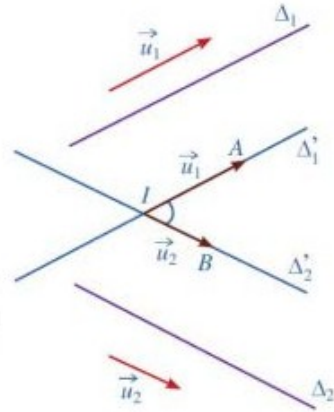
$$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow u_1 \cdot u_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

3. Góc

a. Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có hai vector chỉ phương lần lượt là: $u_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $u_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó, ta có:

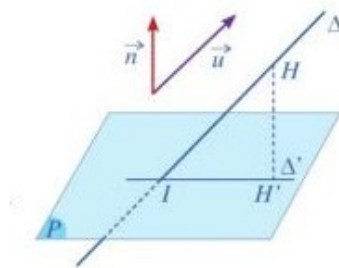
$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



b. Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $u = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $n = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:

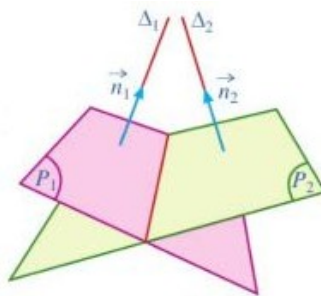
$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



c. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $n_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



CHỦ ĐỀ 1

XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

DẠNG 1

XÁC ĐỊNH VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC VÀ KHÔNG THUỘC ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

- Vectơ chỉ phương u của đường thẳng Δ là vectơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ .
Nếu Δ có một vectơ chỉ phương là u thì $k.u$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ .
- Nếu có hai vectơ n_1 và n_2 cùng vuông góc với Δ thì Δ có một vectơ chỉ phương là $u = [n_1, n_2]$.

- Phương trình đường thẳng Δ dạng:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 thì có vectơ chỉ phương là $u = (a; b; c)$.

- Phương trình đường thẳng Δ dạng: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (a_1 a_2 a_3 \neq 0)$ thì có vectơ chỉ phương là $u = (a; b; c)$.

Chú ý:

- Trục Ox có vectơ chỉ phương là $i = (1; 0; 0)$.
- Trục Oy có vectơ chỉ phương là $j = (0; 1; 0)$.
- Trục Oz có vectơ chỉ phương là $k = (0; 0; 1)$.

2. Điểm thuộc và không thuộc đường thẳng

- Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. Khi đó:

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{x_M - x_0}{a} = \frac{y_M - y_0}{b} = \frac{z_M - z_0}{c}; \quad M \notin \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_M - x_0}{a} \neq \frac{y_M - y_0}{b} \\ \frac{x_M - y_0}{b} \neq \frac{y_M - z_0}{c} \end{cases}$$

- Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và đường thẳng Δ có phương trình
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
. Khi đó:

$$M \in \Delta \Leftrightarrow t = \frac{x_M - x_0}{a} = \frac{x_M - y_0}{b} = \frac{x_M - z_0}{c}; \quad M \notin \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x_M - x_0}{a} \neq \frac{x_M - y_0}{b} \\ t = \frac{x_M - y_0}{b} \neq \frac{x_M - z_0}{c} \end{cases}$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$. B. $\vec{u}_2 = (1; 2; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1; 1)$.

Lời giải

Chọn C.

Từ phương trình đường thẳng d ta thấy vectơ $\vec{u}_3 = (1; -2; 3)$ là một vectơ chỉ phương của d .

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_2 = (2; 4; -1)$. B. $\vec{u}_1 = (2; -5; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 5; 3)$. D. $\vec{u}_4 = (3; 4; 1)$.

Lời giải

Chọn B.

Đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{3}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2; -5; 3)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_1 = (3; -1; 5)$ B. $\vec{u}_4 = (-1; 1; -2)$ C. $\vec{u}_2 = (-3; 1; 5)$ D. $\vec{u}_3 = (1; -1; -2)$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_4 = (1; -1; 2) = -1(-1; 1; -2) \Rightarrow \vec{u}_4 = (-1; 1; -2)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vector sau, đâu **không phải** là vector chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$ B. $\vec{u}_2 = (3; -6; -9)$ C. $\vec{u}_3 = (1; -2; -3)$ D. $\vec{u}_4 = (-2; 4; 3)$

Lời giải

Chọn D

Ta có một vector chỉ phương của d là $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$.

$\vec{u}_2 = -3\vec{u}_1$, $\vec{u}_3 = -\vec{u}_1 \Rightarrow$ các vector $\vec{u}_2, \vec{u}_3$ cũng là vector chỉ phương của d .

Không tồn tại số k để $\vec{u}_4 = k\vec{u}_1$ nên $\vec{u}_4 = (-2; 4; 3)$ không phải là vector chỉ phương của d .

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u} = (2; 1; 1)$ là một vector chỉ phương?

- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ B. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$
C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$ D. $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$

Lời giải

Chọn C

Xét đường thẳng được cho ở câu C, có một vector chỉ phương là $(-2; -1; -1) = -(2; 1; 1)$ (thỏa đề bài).

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u} = (-2; 4; 5)$ là một vector chỉ phương?

- A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Xét đường thẳng được cho ở câu D, có một vector chỉ phương là

$\vec{u} = (2; -4; -5) = -(-2; 4; 5)$ $(-2; -1; -1) = -(2; 1; 1)$ (thỏa đề bài).

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(0; 1; 2)$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng AB .

- A. $\vec{d} = (-1; 1; 2)$ B. $\vec{a} = (-1; 0; -2)$ C. $\vec{b} = (-1; 0; 2)$ D. $\vec{c} = (1; 2; 2)$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\vec{AB} = (-1; 0; 2)$ suy ra đường thẳng AB có VTCP là $\vec{b} = (-1; 0; 2)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy . Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?

- A. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$ B. $\vec{u}_1 = (0; 2; 0)$ C. $\vec{u}_2 = (1; 2; 0)$ D. $\vec{u}_3 = (1; 0; 0)$

Lời giải

Chọn A

M_1 là hình chiếu của M lên trục $Ox \Rightarrow M_1(1;0;0)$.

M_2 là hình chiếu của M lên trục $Oy \Rightarrow M_2(0;2;0)$.

Khi đó: $\vec{M_1M_2} = (-1; 2; 0)$ là một vector chỉ phương của M_1M_2 .

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- A. $Q(2;1;1)$ B. $M(1;2;3)$ C. $P(2;1;-1)$ D. $N(1;-2;3)$

Lời giải

Chọn C.

Cho $\begin{cases} x-2=0 \\ y-1=0 \\ z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$ vậy $P(2;1;-1) \in d$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

- A. $P(-1;2;1)$ B. $Q(1;-2;-1)$ C. $N(-1;3;2)$ D. $P(1;2;1)$

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng ta thấy điểm $P(-1;2;1)$ thỏa

$\frac{-1+1}{-1} = \frac{2-2}{3} = \frac{1-1}{3} = 0$. Vậy điểm $P(-1;2;1)$ thuộc đường thẳng yêu cầu.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{2} = \frac{z-2}{-5} = \frac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc d ?

- A. $N(4;2;-1)$ B. $Q(2;5;1)$ C. $M(4;2;1)$ D. $P(2;-5;1)$

Lời giải

Chọn A

Thế điểm $N(4;2;-1)$ vào d ta thấy thỏa mãn nên chọn A.

- Câu 12.** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=5+t \\ z=2+3t \end{cases}$?
- A. $N(1;5;2)$ B. $Q(-1;1;3)$ C. $M(1;1;3)$ D. $P(1;2;5)$

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Dựa vào lý thuyết: Nếu d qua $M(x_0; y_0; z_0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ thì phương trình

đường thẳng d là: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$, ta chọn đáp án B.

Cách 2. Thay tọa độ các điểm M vào phương trình đường thẳng d , ta có:

$$\begin{cases} 1=1-t \\ 2=5+t \\ 5=2+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-3 \\ t=1 \end{cases} \text{ (Vô lý). Loại đáp án A.}$$

Thay tọa độ các điểm N vào phương trình đường thẳng d , ta có:

$$\begin{cases} 1=1-t \\ 5=5+t \\ 2=2+3t \end{cases} \Leftrightarrow t=0. \text{ Nhận đáp án B.}$$

- Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?
- A. $K(1; -1; 1)$ B. $E(1; 1; 2)$ C. $H(1; 2; 0)$ D. $F(0; 1; 2)$

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ của $K(1; -1; 1)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1=t \\ -1=1-t \\ 1=2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \\ t=-1 \end{cases}$ không tồn tại t .

Do đó, $K \notin d$.

Thay tọa độ của $E(1; 1; 2)$ vào PTTS của d ta được $\begin{cases} 1=t \\ 1=1-t \\ 2=2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=0 \\ t=0 \end{cases}$ không tồn tại t .

Do đó, $E \notin d$.

Thay tọa độ của $H(1; 2; 0)$ vào PTTS của d ta được
$$\begin{cases} 1 = t \\ 2 = 1 - t \\ 0 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$$
 không tồn tại t .
Do đó, $H \notin d$.

Thay tọa độ của $F(0; 1; 2)$ vào PTTS của d ta được
$$\begin{cases} 0 = t \\ 1 = 1 - t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0.$$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

- A. $Q(-1; 1; 3)$ B. $P(1; 2; 5)$ C. $N(1; 5; 2)$ D. $M(1; 1; 3)$

Lời giải

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow N(1; 5; 2) \in d$$

Chọn C : Với

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Đường thẳng d nhận $u = (3; 4; 1)$ là một vector chỉ phương.
B. Đường thẳng d nhận $u = (-3; -4; 1)$ là một vector chỉ phương.
C. Đường thẳng d nhận $u = (3; 4; -1)$ là một vector chỉ phương.
D. Đường thẳng d nhận $u = (-6; -8; 2)$ là một vector chỉ phương.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-1}$ có một vector chỉ phương là $u_d = (3; 4; -1)$.

$u \neq u_d$

$$u = (-3; -4; 1) = -(3; 4; -1) = -u_d$$

$$u = (-6; -8; 2) = -2(3; 4; -1) = -2u_d$$

$$d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Điểm $M(7; -3; -1)$ thuộc đường thẳng d .
- B. Điểm $N(-1; 1; -5)$ thuộc đường thẳng d .
- C. Đường thẳng d nhận $u = (4; -2; 3)$ là một vector chỉ phương.
- D. Đường thẳng d nhận $u = (-4; 2; -3)$ là một vector chỉ phương.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

$$M(7; -3; -1) \text{ vào đường thẳng } d, \text{ ta có } \begin{cases} 7 = 3 + 4t \\ -3 = -1 - 2t \\ -1 = -2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M(7; -3; -1) \notin d$$

Thay

$$N(-1; 1; -5) \text{ vào đường thẳng } d, \text{ ta có } \begin{cases} -1 = 3 + 4t \\ 1 = -1 - 2t \\ -5 = -2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow N(-1; 1; -5) \in d$$

Thay

$$d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Một vector chỉ phương của đường thẳng

$$\text{là } u = (4; -2; 3).$$

$$u = (-4; 2; -3) = -(4; -2; 3)$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Điểm $Q(2; -1; 2)$ thuộc đường thẳng d .
- B. Điểm $P(1; 2; 3)$ thuộc đường thẳng d .
- C. Điểm $M(-1; -2; -3)$ thuộc đường thẳng d .
- D. Điểm $N(-2; 1; -2)$ thuộc đường thẳng d .

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Điểm $M(-3; 5; 3)$ không thuộc đường thẳng d .

B. Điểm $N(1; 3; -1)$ không thuộc đường thẳng d .

C. Điểm $P(3; 5; 3)$ không thuộc đường thẳng d .

D. Điểm $Q(1; 2; -3)$ không thuộc đường thẳng d .

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; 1; 2)$ và $C(2; 3; 1)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.

B. Đường thẳng đi qua hai điểm B, C có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

C. Điểm $M(2; 3; 1)$ không thuộc đường thẳng BC .

D. Điểm $N(3; 5; 0)$ không thuộc đường thẳng BC .

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Gọi d là phương trình đường thẳng qua $A(1; 2; 0)$ và song song với BC .

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 2; -1) \Rightarrow d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.

Đường thẳng đi B có vector chỉ phương $\overrightarrow{BC} = (1; 2; -1)$ có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

$M(2; 3; 1) \in BC, N(3; 5; 0) \in BC$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 3z + 1 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$.

B. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-3}$.

C. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

D. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Gọi (Δ) là đường thẳng cần tìm. Vì đường thẳng (Δ) vuông góc với mặt phẳng (P) nên vector chỉ phương của (Δ) là: $\vec{u}_{\Delta} = \vec{n}_P = (2; 1; -3)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1; 2; -1)$ và có $\vec{v}_{tcp} \vec{u}_{\Delta} = (2; 1; -3)$

là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-3}$.

$\vec{u}_{\Delta} = \vec{n}_P = (2; 1; -3) = -(-2; -1; 3)$

Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$. Tìm vector chỉ phương của đường thẳng qua hai điểm M , N .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\vec{MN} = (-1; 3; 2)$

Vector chỉ phương của đường thẳng qua hai điểm M , N là $\vec{MN} = (-1; 3; 2)$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $B(1; 1; 1)$, $C(3; 4; 0)$. Tìm vector chỉ phương của đường thẳng Δ song song với BC .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\overrightarrow{BC} = (2; 3; -1)$

Ta có $\overrightarrow{BC} = (2; 3; -1)$, đường thẳng Δ song song BC nên có vectơ chỉ phương cùng phương với $\overrightarrow{BC} = (2; 3; -1)$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$. Tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $u = (1; -3; 2)$

Đường thẳng Δ vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương $u = n_p = (1; -3; 2)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y - z + 2024 = 0$, $(Q): x - 2y + 2025 = 0$.

Tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $u = (-2; 1; -4)$

Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có vectơ chỉ phương:

$$u = [n_p, n_q] = (-2; 1; -4)$$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z - 2024 = 0$, $a = (1; 1; 0)$. Tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) và song song vector a .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $u = (2; 2; -2)$

Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) và song song vector a nên có vectơ chỉ phương:

$$u = [n_p, a] = (2; 2; -2)$$

DẠNG 2

XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Để xét vị trí tương đối đường thẳng ta có hai cách sau:

Cách 1:

Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt đi qua các điểm M_1, M_2 và tương ứng có $u_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $u_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương. Khi đó, ta có:

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overline{M_1M_2} & \text{cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overline{M_1M_2}] = \vec{0} \end{cases}$
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{cùng phương} \\ \vec{u}_1, \overline{M_1M_2} & \text{không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \overline{M_1M_2}] \neq \vec{0} \end{cases}$
- $\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2 & \text{không cùng phương} \\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \overline{M_1M_2} & \text{đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overline{M_1M_2} = 0 \end{cases}$
- $\Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overline{M_1M_2} \neq 0$

Cách 2:

Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 tương ứng có $u_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $u_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là hai vectơ chỉ phương và có phương trình tham số:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1 t_1 \\ y = y_1 + b_1 t_1 \\ z = z_1 + c_1 t_1 \end{cases} (t_1 \in \mathbb{R}), \quad \Delta_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2 t_2 \\ y = y_2 + b_2 t_2 \\ z = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} (t_2 \in \mathbb{R})$$

$$\text{Xét hệ phương trình hai ẩn } t_1, t_2: \begin{cases} x_1 + a_1 t_1 = x_2 + a_2 t_2 \\ y_1 + b_1 t_1 = y_2 + b_2 t_2 \\ z_1 + c_1 t_1 = z_2 + c_2 t_2 \end{cases} (*)$$

Khi đó :

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow u_1$ cùng phương với u_2 và hệ $(*)$ vô nghiệm.
- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có vô số nghiệm.
- $\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow$ Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.
- $\Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau} \Leftrightarrow u_1$ không cùng phương với u_2 và hệ $(*)$ vô nghiệm.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$,

$d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

- A. Chéo nhau B. Trùng nhau C. Song song D. Cắt nhau

Lời giải

Chọn C

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \vec{u}_1 = (2; 1; -2); \quad d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{u}_2 = (-2; -1; 2)$$

$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 \Rightarrow d_1 // d_2 \vee d_1 \equiv d_2$$

Điểm $M(1; 0; -2) \in d_1$, $M \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. song song.

B. trùng nhau.

C. chéo nhau.

D. cắt nhau.

Lời giải

Chọn C

d có VTCP $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và đi qua $M(1; 2; 0)$

d' có VTCP $\vec{u}' = (-2; 3; 1)$ và đi qua $M'(0; -5; 4)$

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{MM'} = (-1; -7; 4) \text{ và } [\vec{u}, \vec{u}'] = (-2; 1; 6) \neq 0$$

$$\text{Lại có } [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 19 \neq 0$$

Suy ra d chéo nhau với d' .

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ và $d': \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng khi nói về vị trí tương đối của hai đường thẳng trên?

A. song song.

B. trùng nhau.

C. chéo nhau.

D. cắt nhau.

Lời giải

Chọn a

d có VTCP $\vec{u} = (4; -6; -8)$ và đi qua $M(2; 0; -1)$

d' có VTCP $\vec{u}' = (-6; 9; 12)$ và đi qua $M'(7; 2; 0)$

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{MM'} = (5; 2; 1) \text{ và } [\vec{u}, \vec{u}'] = 0$$

$$\text{Lại có } [\vec{u}, \overrightarrow{MM'}] \neq 0$$

Suy ra d song song với d' .

$$d: \begin{cases} x = -1 + 12t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = 6 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

Câu 29. Hai đường thẳng có vị trí tương đối là:

A. trùng nhau.

B. song song.

C. chéo nhau.

D. cắt nhau.

Lời giải

Chọn A

d có VTCP $\vec{u}=(12;6;3)$ và đi qua $M(-1;2;3)$

d' có VTCP $\vec{u}'=(8;4;2)$ và đi qua $M'(7;6;5)$

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{MM'}=(8;4;2)$$

$$\text{Suy ra } [\vec{u}, \overrightarrow{MM'}]=0 \text{ và } [\vec{u}, \vec{u'}]=0$$

Suy ra d trùng với d' .

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d': \begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \\ z = -2+3t \end{cases}$ có vị trí tương đối là:

A. trùng nhau.

B. song song.

C. chéo nhau.

D. cắt nhau.

Lời giải

Chọn D

d có VTCP $\vec{u}=(-2;1;3)$ và đi qua $M(1;-2;4)$

d' có VTCP $\vec{u}'=(1;-1;3)$ và đi qua $M'(-1;0;-2)$

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{MM'}=(-2;2;-6)$$

$$[\vec{u}, \vec{u'}]=(6;9;1) \neq 0 \text{ và } [\vec{u}, \vec{u'}].\overrightarrow{MM'}=0$$

Suy ra d cắt d' .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $d': \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Đường thẳng d không song song đường thẳng d' .

B. Đường thẳng d trùng đường thẳng d' .

C. Đường thẳng d cắt đường thẳng d' .

D. Đường thẳng d chéo đường thẳng d' .

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

d có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 4)$ và đi qua $M(1; 7; 3)$

d' có VTCP $\vec{u'} = (3; -2; 1)$ và đi qua $M'(6; -1; -2)$

Từ đó ta có

$$\vec{MM'} = (5; -8; -5) \text{ và } [\vec{u}, \vec{u'}] = (9; 10; 7) \neq 0$$

Lại có $[\vec{u}, \vec{u'}] \cdot \vec{MM'} = 0$

Suy ra d cắt d'

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $d': \begin{cases} x = -1+t \\ y = -t \\ z = -2+3t \end{cases}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. Tọa độ giao điểm I của d và d' là $I(1; -2; 4)$.

B. Tọa độ giao điểm I của d và d' là $I(1; 2; 4)$.

C. Đường thẳng d cắt đường thẳng d' .

D. Đường thẳng d chéo đường thẳng d' .

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

$$\begin{aligned} \frac{-1+t-1}{-2} &= \frac{-t+2}{1} = \frac{-2+3t-4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{-2+t}{-2} &= \frac{-t+2}{1} = \frac{-6+3t}{3} \\ \Leftrightarrow t &= 2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra giao điểm I của d và d' là $I(1; -2; 4)$

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $d_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

B. Đường thẳng d_3 cắt đường thẳng d_2 .

C. Đường thẳng d_4 không cắt đường thẳng d_1 .

D. Đường thẳng d_3 cắt đường thẳng d_1 .

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1 = (3; -1; -1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; -2; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2 = (0; 0; 1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$.

Do $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_1$ nên hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau.

Ta có $\vec{M_1M_2} = (-3; 1; 2)$, $[\vec{u}_1, \vec{M_1M_2}] = (-5; -5; -5) = -5(1; 1; 1)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và d_2 khi đó (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là $x + y + z - 1 = 0$.

Gọi $A = d_1 \cap (\alpha)$ thì $A(1; -1; 1)$.

Gọi $B = d_2 \cap (\alpha)$ thì $B(-1; 2; 0)$.

Do $\vec{AB} = (-2; 3; -1)$ không cùng phương với $\vec{u}_1 = (1; -2; 1)$ nên đường thẳng AB cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 34. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}, \quad \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: Δ_1 cắt Δ_2 .

Vì $\frac{2}{-1} \neq \frac{2}{-2}$ nên vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 2; 3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; -2; 1)$ của Δ_2 . Tức là Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2 .

Lấy $M(1; -1; 0) \in \Delta_1$, $N(3; 3; -2) \in \Delta_2$. Ta có: $\vec{MN} = (2; 4; -2)$.

Khi đó: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = 0$.

Suy ra $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2 .

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ x - z = -1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = \frac{4}{5} \end{cases}$$

giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ:

DẠNG 3

TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG
TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT PHẲNG
TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có hai vector chỉ phương lần lượt là: $u_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $u_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u_1}, \vec{u_2})| = \frac{|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Chú ý :

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow u_1 \cdot u_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$
- Hai đường thẳng song song hoặc trùng với nhau thì góc giữa chúng là 0° .

2. Góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

Cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $u = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $n = (A; B; C)$. Khi đó, ta có:

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Chú ý : Đường thẳng song song hoặc trùng với mặt phẳng thì góc giữa chúng là 0° .

3. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ có hai vector pháp tuyến lần lượt là $n_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $n_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó, ta có:

$$\cos((P_1), (P_2)) = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Chú ý : Hai mặt phẳng song song hoặc trùng với nhau thì góc giữa chúng là 0° .

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 36. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB, CD . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**:

- A. $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$.
- B. $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$.
- C. $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}|}$.
- D. $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức ở lý thuyết.

Câu 37. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=3 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \\ z=-2+t \end{cases}$. Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

A. 30° . B. 120° . C. 150° . D. 60° .

Lời giải

Chọn D

Gọi $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ lần lượt là vector chỉ phương của đường thẳng $d_1; d_2$.

$$\vec{u}_1 = (1; 1; 0); \vec{u}_2 = (-1; 0; 1)$$

$$\cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}$$

Áp dụng công thức ta có

$$\Rightarrow (d_1, d_2) = 60^\circ$$

Câu 38. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 5x + 11y + 2z - 4 = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là:

- A. 60° . B. -30° . C. 30° . D. -60° .

Lời giải

Chọn C

Gọi $\vec{u}; \vec{n}$ lần lượt là vector chỉ phương, pháp tuyến của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) .

$$\vec{u} = (1; -2; 1); \vec{n} = (5; 11; 2)$$

$$\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 5 - 11 \cdot 2 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{5^2 + 11^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$$

Áp dụng công thức ta có

$$\Rightarrow (\Delta, (P)) = 30^\circ.$$

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng d và mặt phẳng $(P): x - y + 3 = 0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

A. 60°

B. 30°

C. 120°

D. 45°

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là $u = (-1; 2; 1)$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $n = (1; -1; 0)$

Gọi α là góc giữa Đường thẳng d và Mặt phẳng (P) . Khi đó ta có

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Do đó $\alpha = 60^\circ$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox ?

A. 60° .

B. 30° .

C. 120° .

D. 150° .

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có VTPT $n = (-\sqrt{3}; 1; 0)$

Trục Ox có VTCP $i = (1; 0; 0)$

Góc tạo bởi (P) với trục Ox

$$\sin((P); Ox) = |\cos((P); Ox)| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| |\vec{i}|} = \frac{|-\sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy góc tạo bởi (P) với trục Ox bằng 60° .

Câu 41. Cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 2 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0; (\beta): x - 2z - 3 = 0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó:

A. 60° .

B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d có phương trình:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{2} + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{3}{2} + t \end{cases}$$
. Suy ra VTCP của d là $\vec{u}_d(2; 1; 1)$

$$\sin(d, (P)) = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có

$$\Rightarrow (d, (P)) = 60^\circ$$

Câu 42. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$, $(\beta): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Cosin góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng:

- A. $\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{9}$ C. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ D. $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) và (β) .

Ta có $\vec{n}_\alpha(2; -1; 2); \vec{n}_\beta(1; 2; -2)$

Áp dụng công thức:

$$\cos(\alpha, \beta) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9}$$

Câu 43. Hai mặt phẳng nào dưới đây tạo với nhau một góc 60°

- A. $(P): 2x + 11y - 5z + 3 = 0$ và $(Q): x + 2y - z - 2 = 0$
 B. $(P): 2x + 11y - 5z + 3 = 0$ và $(Q): -x + 2y + z - 5 = 0$
 C. $(P): 2x - 11y + 5z - 21 = 0$ và $(Q): 2x + y + z - 2 = 0$
 D. $(P): 2x - 5y + 11z - 6 = 0$ và $(Q): -x + 2y + z - 5 = 0$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng.

$$\cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Xác định các vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) . Thay các giá trị vào biểu thức để tìm giá trị đúng. Dùng chức năng CALC trong máy tính bỏ túi để hỗ trợ việc tính toán nhanh nhất.

Câu 44. Tính tổng các giá trị tham số m để mặt phẳng $(P): (m+2)x + 2my - mz + 5 = 0$ và $(Q): mx + (m-3)y + 2z - 3 = 0$ hợp với nhau một góc $\alpha = 90^\circ$.

A. 6 B. 4 C. 8 D. -4

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(P), (Q)$ có vector pháp tuyến lần lượt là $n_P = (m+2; 2m; -m), n_Q = (m; m-3; 2)$

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n_P} \cdot \vec{n_Q} = 0 \Leftrightarrow (m+2)m + 2m(m-3) - 2m = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 6 \end{cases}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 5 = 0$ và $(Q): x - y + 2 = 0$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 135° .
- B. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 45° .
- C. Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.
- D. Điểm $M(0; 5; 0)$ thuộc mặt phẳng (P) .

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)

$$\cos \alpha = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Thay vào mặt phẳng (P) ta có: $2 \cdot 0 - 5 + 2 \cdot 0 + 5 = 0 \Rightarrow M \in (P)$

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x - y - 5 = 0$, và biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2; -1; -2)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 135° .
- B. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 45° .

C. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60° .

D. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 120° .

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_Q = (1; -1; 0)$.

Hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2; -1; -2) \Rightarrow (P)$ qua H và nhận $\vec{OH} = (2; -1; -2)$ làm vector pháp tuyến.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{OH}, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|2+1+0|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 3 = 0$, $(Q): x - y - z - 2 = 1$, $(R): x + 2y + 2z - 2 = 0$. Gọi $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ lần lượt là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) , (Q) và (R) , (R) và (P) . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$.

B. $\alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1$.

C. $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$.

D. $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Áp dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng. Sử dụng máy tính bỏ túi để tính góc rồi so sánh các giá trị đó với nhau.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; 1; 2)$, H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) . Tính số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: 45^0

(P) qua O và nhận $\vec{OH} = (2; 1; 2)$ làm VTPT

(Q): $x - y - 11 = 0$ có VTPT $n = (1; 1; 0)$

$$\cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{OH} \cdot \vec{n}|}{|\vec{OH}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ((P), (Q)) = 45^0$$

Ta có

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z - 5 = 0$. Xét mặt phẳng

(Q): $x + (2m - 1)z + 7 = 0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$

Mặt phẳng (P), (Q) có vector pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_P = (1; -2; 2)$, $\vec{n}_Q = (1; 0; 2m - 1)$

Vì (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$ nên

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} &= \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{n}_Q) \right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|1 + 2(2m - 1)|}{3\sqrt{1 + (2m - 1)^2}} \\ &\Leftrightarrow 2(4m - 1)^2 = 9(4m^2 - 4m + 2) \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 20m + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 50. Xác định m để hai mặt phẳng $(\alpha): (2m - 1)x - 3my + 2z + 3 = 0$ và

$(\beta): mx + (m - 1)y + 4z - 5 = 0$ vuông góc với nhau.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: