TỨ GIÁC ĐIỀU HÒA

Phan Nguyễn Văn Trường - Lục Đình Khánh - Bùi Hà Đăng Quang

Lớp 10 Toán trường Phổ Thông Năng Khiếu

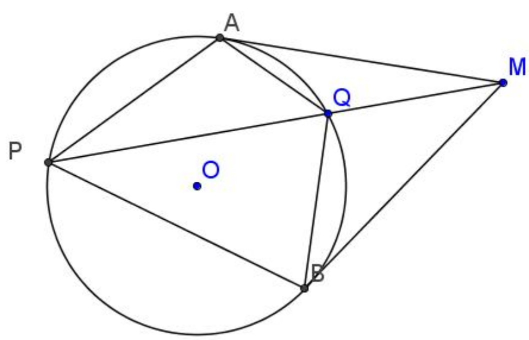
Trong quá trình học toán hình học chúng tôi phát hiện có một tứ giác khá đặc biệt và có nhiều tính chất đẹp, nhiều người thường gọi là "tứ giác đẹp", tuy nhiên vì tứ giác này có liên quan nhiều đến hàng điểm điều hòa nên cũng được gọi là "Tứ giác điều hòa". Trong bài viết nhỏ này chúng tôi xin giới thiệu một số tính chất của tứ giác điều hòa và ứng dụng của nó trong việc giải các bài toán hình học khác.

1. Định nghĩa và tính chất cơ bản

Định nghĩa. Tứ giác ABCD nội tiếp và thỏa AB/AD = CB/CD được gọi là tứ giác điều hòa.

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) điểm M nằm ngoài đường tròn. MA và MB là tiếp tuyến vẽ từ M đến (O), Một cát tuyến qua M cắt (O) tại P và Q. Khi đó APBQ là tứ giác điều hòa.

Chứng minh



Chúng ta chỉ cần chứng minh $\frac{AQ}{AP}=\frac{BQ}{BP}$

Ta có $\Delta MAQ \backsim \Delta MPA(g.g) \Rightarrow \frac{AQ}{AP}=\frac{MQ}{MP}$

Và $\Delta MBQ \backsim \Delta MPB(g.g) \Rightarrow \frac{BQ}{BP}=\frac{MQ}{MP}$

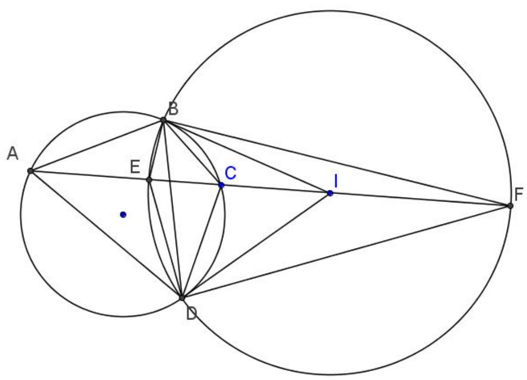
Suy ra $\frac{AQ}{AP}=\frac{BQ}{BP}$, do đó tứ giác AQBP là tứ giác điều hòa

Nhận xét. Qua ví dụ trên ta thấy nếu tứ giác nội tiếp có giao điểm hai tiếp tuyến vẽ từ hai đỉnh đối nằm trên đường chéo còn thì tứ giác đó điều hòa. Từ đây ta có thể đặt câu hỏi ngược lại: Nếu tứ giác APBQ là tứ giác điều hòa thì giao điểm hai tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp vẽ từ A và B có thuộc đường thẳng PQ không? Chúng ta sẽ có câu trả lời ở phần sau.

2. Tính chất.

1) Cho tứ giác điều hòa ABCD nội tiếp (O) có AB/BC = DA/DC = k, thì (O) trực giao với đường tròn Apolloius tỉ số k dựng trên đoạn AC.

Chứng minh



Gọi E, F lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài của góc B. Khi đó đường tròn Apollonius tỉ số k là đường tròn tâm I đường kính EF, rõ ràng B, D ∈ (I). Ta cần chứng minh IB là tiếp tuyến của (O) , Thực vậy, ta có (ACEF) = - 1 và I là trung điểm EF nên IE^2 = IA. IC mà tam giác IBE cân tại I, suy ra IE = IB, do đó IB^2 = IA.IC suy ra IB là tiếp tuyến của (O) (đccm)

2) Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi AC, tiếp tuyến tại B, tiếp tuyến tại D của (O) đồng quy. (AC, BD khác đường kính)

Chứng minh

⇐) Đúng theo ví dụ 1

⇒) Đúng theo tính chất 1

3) Cho ABCD là tứ giác điều hòa thì AC.BD = 2AB.CD = 2BC.AD

Chứng minh

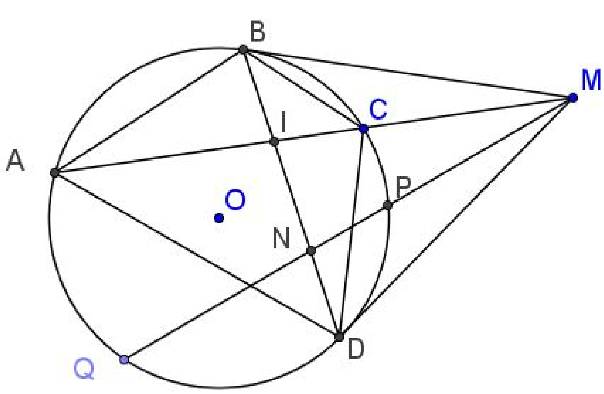
Tứ giác ABCD điều hòa nên ta có $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{CB}{CD} \Rightarrow AB.CD = AD.CB$

Mặt khác ta có ABCD nội tiếp nên theo định lý Ptolemy thì $AC.BD = AB.CD + AD.BC$

Do đó $AC.BD = 2AB.CD = 2AD.BC$

4) Cho tứ giác điều hòa ABCD nội tiếp (O), tiếp tuyến tại B và D cắt nhau tại M, I là giao điểm của AC và BD. Khi đó (MIAC) = - 1

Chứng minh



Ta có $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{S_{MCD}}{S_{MAD}} = \dfrac{CD.\sin\widehat{MDC}}{AD.\sin\widehat{MDA}}$

Và $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{S_{ICB}}{S_{ICB}} = \dfrac{BC\sin\widehat{IBC}}{BA.\sin\widehat{IBA}}$

Mà $\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{BC}{AB}, \sin\widehat{ABI}=\sin\widehat{ADM}, \sin\widehat{IBC}=\sin\widehat{MDC}$

Suy ra $\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{IC}{IA}\Rightarrow (MICA)=-1$

Nhận xét. Cho một điểm M nằm ngoài đường tròn, từ M vẽ hai tiếp tuyến tuyến MA, MB đến (O). Một cát tuyến qua M cắt (O) tại P, Q và cắt AB tại N thì (MNPQ) = -1

5) Cho tứ giác điều hòa ABCD nội tiếp O, gọi M là giao của hai tiếp tuyến của (O) tại B và D. Gọi I là giao điểm của OM và BD. Khi đó IB là phân giác của góc AIC

Chứng minh

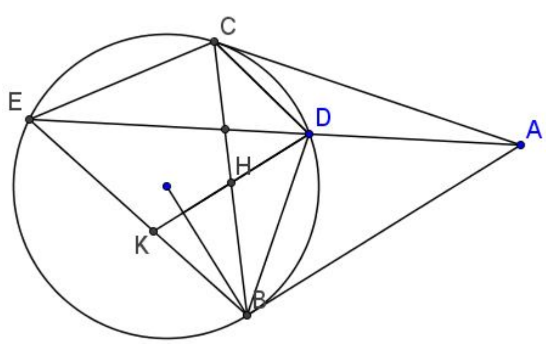
Ta có AC cắt BD tại K thì (MKAC) = - 1. Ta có I(MKAC) = - 1 và IM vuông góc IK nên IM, IK lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\angle AKC$

Tính chất 1, 2 cho ta các ý tưởng để chứng minh 3 điểm thẳng hàng hay 3 đường thẳng đồng quy, tính chất 3 là một tính chất khá đẹp và tính chất 4 là cho ta biết lý do tại sao tứ giác gọi là tứ giác điều hòa. Sau đây chúng ta xét một vài ví dụ ứng dụng của tứ giác điều hòa.

3. Áp dụng vào giải các bài toán hình học sơ cấp

Bài 1. Từ điểm A nằm ngoài (O), kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc OB cắt BC, BE tại H, K. Chứng minh : DH = HK.

Chứng minh



Gọi I là giao điểm của BC và ED, ta có tứ giác ECDB là tứ giác điều hòa nên B(EDIA) = - 1, mà DK//AB (cùng vuông góc với OB)

Do đó H là trung điểm của DK. @

Bài 2(TST 2001). Trong mặt phẳng cho hai đường tròn ω_1 và ω_2 cắt nhau tại A và B. Một tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc với ω_1 ở P và ω_2 ở T. Các tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng của B qua PT. Chứng minh rằng A, H, S thẳng hàng.

Chứng minh

Ta chỉ cần chứng minh APHT là tứ giác điều hòa.

Ta chứng minh APHT nội tiếp, thật vậy ta có:

$\angle BPT = \angle PAB$ và $\angle BTP = \angle BAT$, suy ra $\angle BPT + \angle BTP = \angle PAT$ hay $\angle PAT = 180^0 - \angle BPT = \angle 180^0 - \angle PHT$

Do đó tứ giác APHT nội tiếp.

Gọi M là giao điểm của AB và PT

Ta có $MB.MA = MP^2$ và $MB.MA = MT^2$ nên $MP = MT$

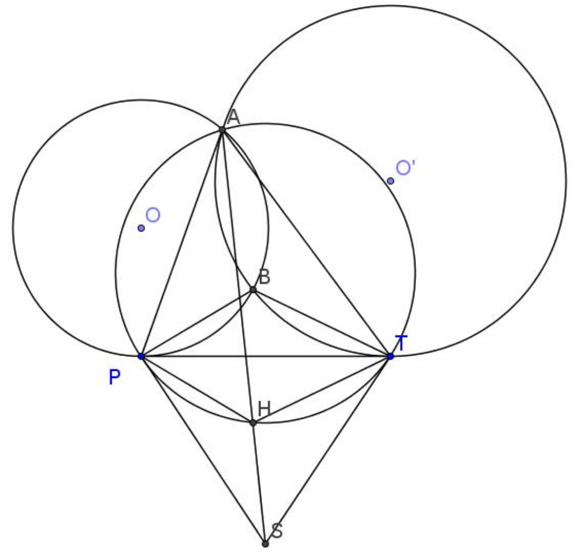
Ta có $\Delta MPB \sim \Delta MAP$, suy ra $BP/AP = MB/MP$

Tương tự thì $BT/AT = MB/MT$

Suy ra $BP/AP = BT/AT$, suy ra $BP/BT = AP/AT$

Hơn nữa ta có $BP = HP$ và $BT = HT$

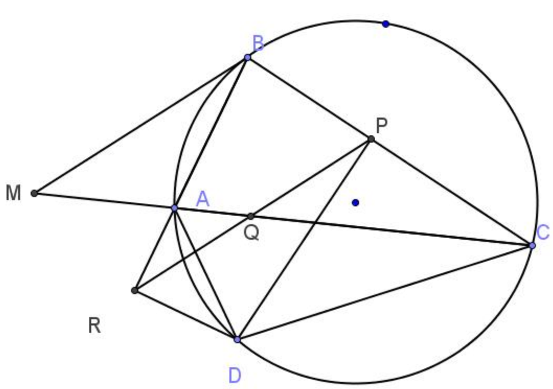
Do đó $AP/AT = HP/HT$



Từ đó ta có tứ giác APHT là tứ giác điều đòa, theo tính chất 2 thì A, H, S thẳng hàng. @

Bài 3. Giả sử ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q, R là chân các đường vuông góc hạ từ D lần lượt trên các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng tỏ rằng PQ = QR khi và chỉ khi phân giác của các góc $\angle ABC$ và $\angle ADC$ cắt nhau trên AC.

Chứng minh



Ta biết rằng P, Q, R thẳng hàng (đường thẳng Simson)

Qua B vẽ đường thẳng song song với PR cắt AC tại M

Phân giác của góc B và D cắt nhau tại một điểm trên AC khi và chỉ khi BA/BC = DA/DC và QP = QR khi và chỉ khi (MQAC) = - 1.

Vậy ta chỉ cần chứng minh tứ giác ABCD điều hòa khi và chỉ khi (MQAC) = - 1.

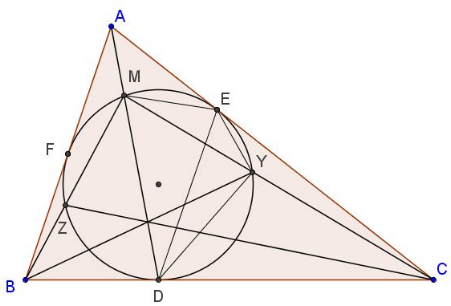
Ta có AM/AQ = AB/AR và CM/CQ = CB/CP

Mặt khác ΔDAR ~ ΔDCP (gg), suy ra AR/CP = DA/DC

Do đó (MQAC) = - 1 ⇔ AM/AQ = CM/CQ ⇔ AB/AR = CB/CP ⇔ AB/CB = AR/CP ⇔ AB/CD = DA/DC. @

Bài 4. Cho tam giác ABC. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC, AC và AB lần lượt tại D, E, F. AD cắt (I) tại điểm thứ hai là M, BM, CM cắt (I) tại Y và Z. Chứng minh rằng BZ, CY và AD đồng quy.

Chứng minh



Tứ giác MEYD là tứ giác điều hòa nên ta có

MY.DE = 2ME.DY , suy ra MY/YC = 2ME.DY/YC.DE

Tứ giác MFZD là tứ giác điều hòa nên ta có:

MZ.DF = 2MF.DZ, suy ra BZ/MZ = BZ.DF/2MF.DZ

Do đó

DC.YM.ZB/DB.YC.ZM= (DC/DB).(2ME.DY/YC.DE).(BZ.DF/2MF.DZ) (1)

Mặt khác tứ giác MEDF điều hòa nên ME/MF = DE/DF

Do đó (1) ⇔ VT = (DC/DB)(DY/DZ)(BZ/CY)

Mà CY/DY = CD/DM và BZ/BD = DZ/DM

Suy ra (DC/DB)(DY/DZ)(BZ/CY) = 1

Vậy DC.YM.ZB/DB.YC.ZM = 1 nên theo định lý Ceva thì MD, BY và CZ đồng quy. @

Từ tính chất này ta có thể suy ra thêm một tính chất: EF, YZ và BC đồng quy và ZF, YE và AD đồng quy.. Thật vậy nếu EF cắt BC tại K thì (KDBC) = - 1 và YZ cắt BC tại H thì (HDBC) = - 1 vì MD, BY và CZ đồng quy.

Do đó K trùng H, ta có điều cần chứng minh.

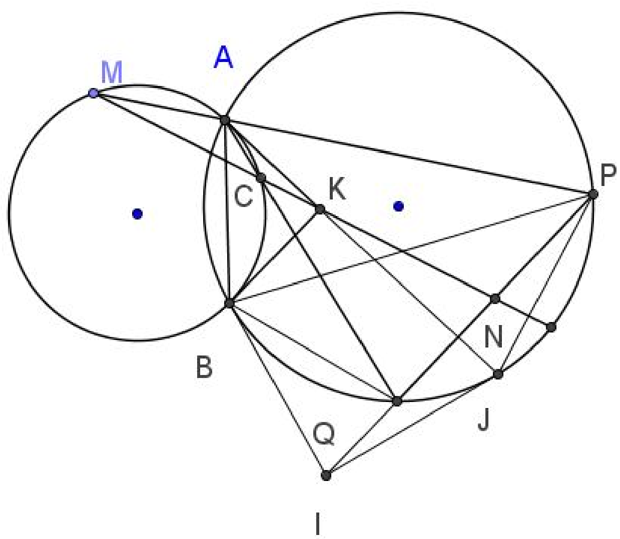
Khi đó xét hai tam giác BZF và CYE theo định lý Desarge thì ZF và EY cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AM.

Bài 5. (TST 2001) Trong mặt phẳng cho hai đường tròn ω_1 tâm O_1 và đường tròn ω_2 tâm O_2 cắt nhau tại hai điểm A và B. Các tiếp tuyến tại A và B của ω_1 cắt nhau tại K. Giả sử M là một điểm nằm trên ω_1 nhưng không trùng với A và B. Đường thẳng AM cắt lại ω_2 tại P, đường thẳng KM cắt ω_1 tại C và đường thẳng AC cắt ω_2 tại Q.

a) Chứng minh trung điểm PQ thuộc đường thẳng MC

b) Đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên ω_1

Chứng minh



a) Gọi N là giao điểm của MK và PQ, ta chứng minh N là trung điểm của PQ.

Ta có tứ giác AMBC là tứ giác điều hòa nên AC/AM = CB/MB.

Ta có ΔMBP ~ ΔCBQ(g.g), suy ra CB/MB = CQ/MP.

Từ đó ta có AC/AM = CQ/MP

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác APQ với cát tuyến MKN thì (NP/NQ).(MP/MA).(CA/CQ) = 1

Từ đó ta có NP = NQ hay N là trung điểm của PQ.

b) Gọi J là giao điểm của AK và (ω_2), suy ra J cố định. Ta chứng minh tứ giác BQJP điều hòa.

Ta có ∠CMB = ∠BAC =∠BPQ và ∠MBC = ∠CAP = ∠PBQ, suy ra ΔCBM ~ ΔQBP (g.g), từ đó BC/BM = BQ/BP.

Chứng minh tương tự ta cũng có AC/AM = JQ/JP

Mà BC/BM = AC/AM nên BQ/BP = JQ/JP, suy ra tứ giác BQJP là tứ giác điều hòa.

Do đó PQ đi qua giao điểm I của hai tiếp tuyến vẽ từ B và J của (ω_2). @

4. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Cho đường tròn (O), một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B, C là hai tiếp điểm), và hai cát tuyến AMQ, ANP đến (O) (M nằm giữa A, Q và N nằm giữa A, P). Chứng minh rằng BC, PM, QN đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm BC. P là điểm thỏa mãn ∠ABP = ∠PCB. Chứng minh rằng ∠BPM + ∠CPA = 180^0

Bài 3. Cho (O) và một điểm cố định nằm ngoài (O); kẻ tiếp tuyến MB và một cát tuyến MAC bất kì. Một đường thẳng d song song với MB cắt BA; BC tại N và P. Chừng minh rằng trung điểm I của NP thuộc một đường cố định.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoài nhau, AB là tiếp tuyến chung ngoài ($A \in (O_1)$ và $B \in (O_2)$). Gọi C là điểm đối xứng của A qua O_1O_2, D là trung điểm của AC. Gọi E là giao điểm của BD và (O_2). Chứng minh rằng CE tiếp xúc với (O_2)

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng qua A cắt tiếp tuyến tại B; C tại M; N và cắt (O) tại E. Gọi F là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định khi thẳng thay đổi nhưng luôn qua A.

Bài 6. Cho ABCD là tứ giác nội tiếp. Gọi L và N lần lượt là trung điểm của AC và BD, chứng minh rằng DB là phân giác của góc $\angle ANC$ khi và chỉ khi AC là phân giác của góc $\angle BLD$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Hàng điểm điều hòa – Vẻ đẹp của toán học*, **Kim Luân**

[2] Tài nguyên internet: http://diendantoanhoc.net, http://mathscope.org