

Bài 1. (6 điểm) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

d) Tìm x để $P > 0$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình

a) $\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$

b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

c) $|x-2| + |3| = 5$

Bài 3. (2 điểm) Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó

Bài 4. (7 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

a) Tứ giác $AMDB$ là hình gì ?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD . Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P

d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4 \text{ cm}, \frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$

Bài 5. (2 điểm)

a) Chứng minh rằng : $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

b) Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$4x^2 - 12x + 5 = (2x - 1)(2x - 5)$$

$$13x - 2x^2 - 20 = (x - 4)(5 - 2x)$$

$$21 + 2x - 8x^2 = (3 + 2x)(7 - 4x)$$

$$4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1)(2x + 3)$$

Điều kiện $x \neq \left\{ \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{-3}{2}; \frac{7}{4}; 4 \right\}$

a) Rút gọn $P = \frac{2x - 3}{2x - 5}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

+) $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2}$

+) $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$

c) Ta có: $1 \in \mathbb{Z}$

Vậy $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-1; -2; 1; 2\}$

$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3 \quad (tm)$

$x-5 = -1 \Leftrightarrow x = 4 \quad (ktm)$

$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6 \quad (tm)$

$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7 \quad (tm)$

d) $P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$

Ta có: $1 > 0$

Để $P > 0$ thì $\frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Bài 2.**a)**

$$\frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \cdot \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)} \right). \text{ DK : } x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 15x - 3(x+4)(x-1) = 3 \cdot 12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (tm)} \\ x = -4 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy $S = \{0\}$

b)

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1 \right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2 \right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3 \right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0$$

Do $\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} > 0$ nên $123-x=0 \Leftrightarrow x=123$

Vậy $S = \{123\}$

c) $\|x-2\|+3=5$

Ta có: $|x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0$ nên $\|x-2\|+3 = |x+2|-3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5$$

$$\Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$+) x-2=2 \Leftrightarrow x=4$$

$$+) x-2=-2 \Rightarrow x=0$$

$$S = \{0; 4\}$$

Bài 3.

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(km)$ ($x > 0$)

$$\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (km/h) \quad \left(3^h 20' = 3\frac{1}{3}h \right)$$

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là:

Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên $5km/h$ là: $\frac{3x}{10} + 5 (km/h)$

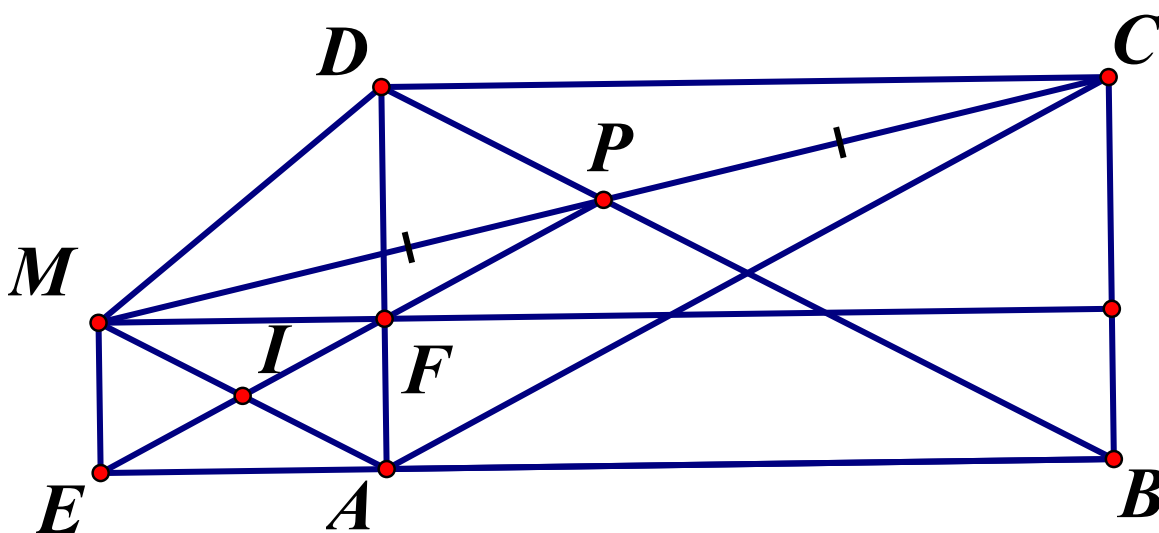
Theo đề bài ta có phương trình:

$$\left(\frac{3x}{10} + 5 \right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150 (km)$$

Vậy khoảng cách giữa A và B là $150(km)$

Vận tốc dự định là $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45 (km/h)$

Bài 4.



- a) Gọi O là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$
 $\Rightarrow PO$ là đường trung bình của tam giác CAM
 $\Rightarrow AM \parallel PO \Rightarrow$ tứ giác $AMDB$ là hình thang

- b) Do $AM \parallel BD$ nên $\angle OBA = \angle MAE$ (đồng vị)

Tam giác AOB cân ở O nên $\angle OBA = \angle OAB$

Gọi I là giao điểm 2 đường chéo của hình chữ nhật $AEMF$ thì tam giác AIE cân ở I nên $\angle PAE = \angle FEA$

Từ chứng minh trên : $\angle FEA = \angle OAB$, do đó $EF \parallel AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của tam giác MAC nên $IP \parallel AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E,F,P thẳng hàng

c) $\triangle MAF \sim \triangle DBA$ (g - g) nên $\frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB}$ không đổi

d) Nếu $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$ thì $\frac{PD}{9} = \frac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$

Nếu $CP \perp BD$ thì $\triangle CBD \sim \triangle DCP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{PB}{CP}$

Do đó: $CP^2 = PB \cdot PD$ hay $(2,4)^2 = 9 \cdot 16k^2 \Rightarrow k = 0,2$
 $PD = 9k = 1,8cm$

$PB = 16k = 3,2cm$

$BD = 5cm$

Chứng minh $BC^2 = BP \cdot BD = 16$

Do đó $BC = 4cm$; $CD = 3cm$.

Bài 5.

a) Ta có: $2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$

Vì $2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots)$
 $= 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (1)

Vì $2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots)$
 $= 2010 \cdot (\dots)$ chia hết cho 2010 (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

b)

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)} \geq 0 \quad (2)$$

$$\forall x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$