

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

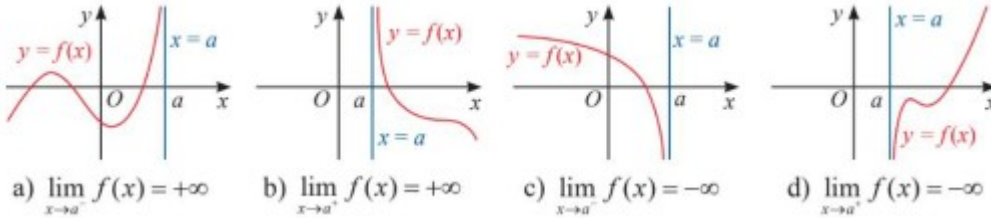
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

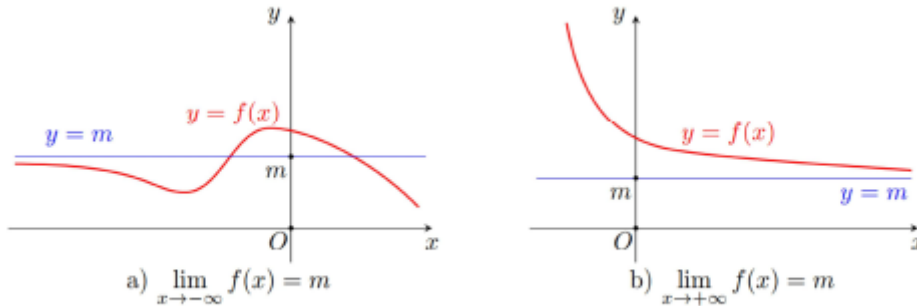
Từng trường hợp được minh họa trong hình dưới đây:



2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$.

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như Hình 5.

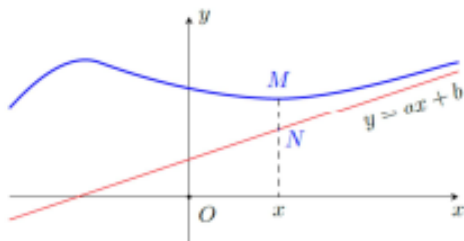


Hình 5

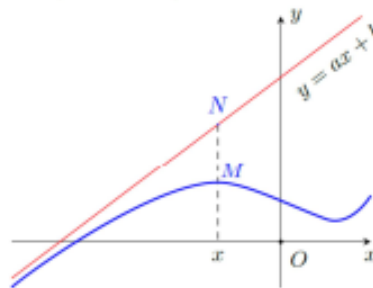
3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = ax + b, (a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ và điểm N thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có cùng hoành độ x . Khi đó, độ dài MN tiến tới 0 khi $x \rightarrow +\infty$ (Hình 16a) hay khi $x \rightarrow -\infty$ (Hình 16b).



Hình 16a



Hình 16b

***Chú ý:** Để xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có thể áp dụng công thức sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \quad \text{hoặc} \quad a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

(Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang $y = b$).

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được

$N(x) = \frac{50x}{x+4}$ ($x \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50}{1 + \frac{4}{x}} = 50$$

Ta có

Vậy một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá 50 bộ phận máy tính.

Câu 2. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 20 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 30 lít/phút.

- Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Làm tròn đến hàng phần trăm.
- Sau t phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Tính theo t .
- Nếu cứ bơm liên tục thì nồng đ muối trong bể như thế nào?



Hình ảnh mang tính chất minh họa
(Nguồn: Internet)

Lời giải

- Sau 20 phút, số gam muối trong bể là: $20 \times 30 \times 20 = 12000$ (gam).

Sau 20 phút, số lít nước trong bể là: $1000 + 30 \times 20 = 1600$ (lít).

Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể là: $\frac{12000}{1600} = \frac{15}{2} \approx 7,5$ (gam/lít).

b) Sau t phút, số gam muối trong bể là: $20 \times 30t = 600t$ (gam).

Sau t phút, số lít nước trong bể là: $1000 + 30t$ (lít).

Sau t phút, nồng độ muối trong bể là: $f(t) = \frac{600t}{1000 + 30t} = \frac{60t}{100 + 3t}$ (gam/lít).

c) Xét hàm số $f(t) = \frac{60t}{100 + 3t}$ Với t có đơn vị là phút và $t \geq 0$.

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60t}{100 + 3t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{\frac{100}{t} + 3} = 20$.

Nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y = 20$.

Vậy nồng độ muối trong bể luôn nhỏ hơn và ngày càng gần 20 (gam/lít).

Câu 3. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x) = 60000 + 250x$. Gọi $\bar{F}(x)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm ($x \geq 0$), khi đó, hãy tính chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm.

Lời giải

$$\bar{F}(x) = \frac{60000 + 250x}{x}$$

Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là $\bar{F}(x)$ (nghìn đồng).

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60000 + 250x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{60000}{x} + 250 \right) = 250$

Vậy chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm là không quá 250000 đồng.

Câu 4. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$; $f(t)$ được tính bằng nghìn người (Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Khi đó, số dân tối đa của thị trấn không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = 26$.

Vậy số dân tối đa của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Câu 5. Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là: $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng), khi đó $G(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm. Khi đó, chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 2$. Nên số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $G(x)$ là 2. Vậy chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá 2 triệu đồng.

Câu 6. Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với x người thì số

sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức $P(x) = \frac{5000x}{4x+25}$. Hãy tìm số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn?



Lời giải

Ta có: $P'(x) = \frac{5000 \cdot 25}{(4x+25)^2} > 0 \quad \forall x > 0$, suy ra hàm số $P(x) = \frac{5000x}{4x+25}$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5000x}{4x+25} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5000}{4 + \frac{25}{x}} = 1250.$$

Ta lại có:

Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1250$.

Vậy số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn không vượt quá 1250.

Câu 7. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức

$S(x) = 300 \left(2 + \frac{4}{x+2} \right)$ với $x \geq 1$. Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1; +\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 300 \left(2 + \frac{4}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(600 + \frac{\frac{1200}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = 600$$

Ta có:

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 600$.

Vậy số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn 600 sản phẩm.

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Câu 8. Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton được cho bởi công thức . Trong đó F là lực hấp

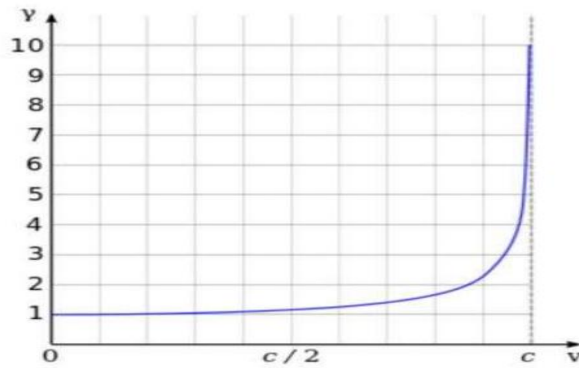
dẫn giữa 2 vật thể bất kì, G là hằng số hấp dẫn, m_1, m_2 là khối lượng các vật, r là khoảng cách giữa chúng. Đồ thị của công thức này có tiệm cận đứng là $r = 0$, điều này có nghĩa là khi r dần về 0 thì lực hấp dẫn tiến đến bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\lim_{r \rightarrow 0} F = \lim_{r \rightarrow 0} G \frac{m_1 m_2}{r^2} = +\infty$. Vậy điều này có nghĩa là khi r dần về 0 thì lực hấp dẫn tiến đến $+\infty$.

Câu 9. Một ứng dụng của hàm số trong vật lý là hệ số tương đối tính Lorentz được cho bởi công thức

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
, với v là vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu quán tính, c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Hàm này được sử dụng trong thuyết tương đối đặc biệt của Einstein để mô tả các hiệu ứng tương đối tính có đồ thị trông như hình bên.



Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, hãy cho biết khi hệ số tương đối tính dần về $+\infty$ thì vận tốc gần bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\lim_{v \rightarrow c} \gamma(v) = \lim_{v \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = +\infty$$

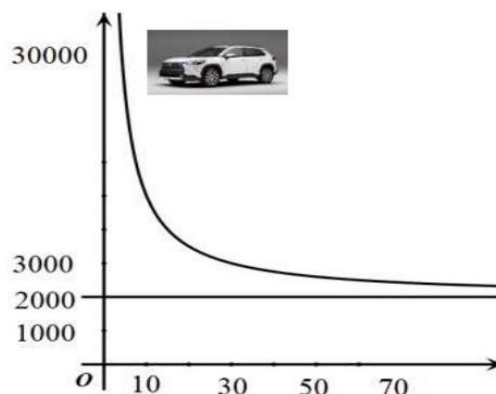
Ta có: nên $x = c$ là tiệm cận đứng của đồ thị. Vậy khi hệ số tương đối tính dần về $+\infty$ thì vận tốc gần bằng c .

Câu 10. Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30 000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô

tô đó là
$$f(t) = \frac{30000 + 2000t}{t} \text{ (USD)}$$
.

a) Sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng bao nhiêu (USD)?

b) Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó ngày càng bằng bao nhiêu?



Lời giải

a) Ta có:
$$f(t) = \frac{30000 + 2000t}{t}$$
.

Sau 15 năm thì $t = 15$. Nên
$$f(15) = \frac{30000 + 2000 \times 15}{15} = 4000$$
.

Vậy sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng 4000 (USD).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30000 + 2000t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{30000}{t} + 2000 \right) = 2000$$

b) Ta có:

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y = 2000$.

Vậy khi thời gian tăng lên, giá trị của xe ô tô đó ngày càng giảm về và gần bằng 2000 USD.

Câu 11. Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)\%$.

a) Xác định hàm số $f(x)$.

b) Khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá bao nhiêu %.

Lời giải

a) Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% có $200 \cdot \frac{15}{100} = 30$ (gam) muối tinh khiết. Khi thêm x (gam) muối tinh khiết vào 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% thì có $(x + 30)$ (gam) muối tinh khiết. Khi

đó, ta có hàm số là $f(x) = \frac{100(x + 30)}{x + 200}$.

b) Ta có $f'(x) = \frac{17000}{(x + 200)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$

Vì $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên khi x tăng thì $f(x)$ tăng. Nghĩa là khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì dung dịch có nồng độ phần trăm càng tăng.

Vì $x + 30 < x + 200$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ nên $\frac{x + 30}{x + 200} < 1$ dẫn đến $f(x) = \frac{100(x + 30)}{x + 200} < 100$.

Nghĩa là nồng độ phần trăm không vượt quá 100% khi cho thêm nhiều gam muối tinh khiết vào.

Câu 12. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} (f(t)$$

được tính bằng nghìn người) (Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt

Nam, 2020). Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là bao nhiêu?

b) Dân số của thị trấn đó không thể vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Lời giải

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là $f(55) = \frac{26 \cdot 55 + 10}{55 + 5} = 24$ nghìn người.

b) Ta có $f'(t) = \frac{120}{(t + 5)^2} > 0 (\forall t \neq -5)$ luôn nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$. Nên hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Ta lại có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = 26$. Do đó đồ thị hàm số $f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 26$.

Vì vậy dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người.

Câu 13. Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh trong

tháng thứ x được tính theo công thức $f(x) = 50 - \frac{30}{2+x}$, trong đó $x \geq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là bao nhiêu?
- Muốn số lượng xe bán ra trong tháng đạt mức từ 45 xe trở lên trong một tháng thì cần sau bao nhiêu tháng?
- Khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức bao nhiêu xe một tháng?

Lời giải

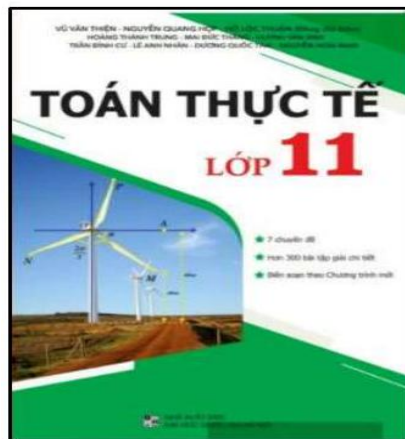
a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là $f(1) = 50 - \frac{30}{2+1} = 40$ (xe).

b) Ta có: $f(x) \geq 45 \Leftrightarrow \frac{30}{2+x} \leq 5 \Leftrightarrow 2+x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 4 \Rightarrow$ để bán được từ 45 xe trở lên trong mỗi tháng thì phải từ tháng thứ tư trở đi.

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(50 - \frac{30}{2+x} \right) = 50 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y = 50$.

Vì tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y = 50$ nên khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50xe / tháng.

Câu 14. Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi $t (t \geq 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?



Lời giải

Tổng số tiền cần bỏ ra để in t cuốn sách là: $7000 + 50t$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là $f(t) = \frac{7000 + 50t}{t}$.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 50$.

Suy ra $y = 50$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$. Vậy chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể thấp hơn 50000 đồng.

Câu 15. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A , công ty phải trả 6 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x (x \geq 1)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A . Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x) = \frac{P(x)}{x}$. Xem $F(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Lời giải

Một đồ chơi A công ty phải trả 6 USD nên x đồ chơi A công ty phải trả $6x$ (USD) ($x > 1$). Khi đó tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A là:

$$P(x) = 6x + 40000 \Rightarrow F(x) = \frac{P(x)}{x} = \frac{6x + 40000}{x}$$

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x + 40000}{x} \right) = 6$$

Suy ra $y = 6$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $F(x)$. Vậy chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn 6 USD.

Câu 16. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t + 5}{t + 2}, t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Lời giải

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t + 5}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20 + \frac{5}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = 20$$

Ta có

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 (nghìn người).

Câu 17. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{400x + 10}{100 - x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Để đạt được gần như loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là bao nhiêu ?

Lời giải

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{400x + 10}{100 - x} = +\infty$$

Suy ra, đường thẳng $x = 100$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = C(x)$.

Vậy để đạt được gần như loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là vô cùng lớn và gần như là không thể thực hiện được.

Câu 18. Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$, coi $x \in [0; +\infty)$.

Lời giải

Chi phí để sản xuất trung bình một sản phẩm là

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 25}{x} = 2x + 1 + \frac{25}{x} \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25}{x} = 0$.

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Câu 19. Một bể chứa 6 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Hãy xác định hàm số $f(t)$, coi $t \in [0; +\infty)$ và xác định nồng độ muối tối đa có trong bể.

Lời giải

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 20 \cdot t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $6000 + 20 \cdot t$ (lít).

Khi đó $f(t) = \frac{500t}{6000 + 20t} = \frac{25t}{3000 + t}$ (gam / lít).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{3000 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{3000}{t} + 1} = 25$$

Vậy nồng độ muối tối đa có trong bể là 25 (gam/lít).