**(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Thái Nguyên 2023-2024)**

**Thòi gian làm bài : 150 phút**

**Bài 1** (3 điểm). Rút gọn biểu thức 

**Bài 2** (6 điểm). Cho biểu thức .

a. Rút gọn biểu thức .

b. Tìm giá trị của  để .

c. Tìm giá trị nguyên của  để giá trị của biểu thức  là số nguyên.

d. So sánh  và .

**Bài 3** (3 điểm).

a. Trong mặt phẳng toạ độ , cho đường thẳng . Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đường thẳng  cắt  tại điểm , cắt  tại điểm  sao cho .

b. Giải hệ phương trình: .

**Bài 4** (6 điểm). Cho nửa đường tròn tâm , đường kính , điểm  di động trên nửa đường tròn đó . Gọi điểm  là hình chiếu vuông góc với điểm  trên đường thẳng . Vẽ

đường tròn đường kính , đường tròn đường kính . Đường thẳng  cắt đường tròn đường kính  tại điểm . Đường thẳng  cắt đường tròn đường kính  tại điểm .

a. Chứng minh: .

b. Gọi  lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm  qua các đường thẳng . Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng.

c. Chứng minh : 

d. Gọi  lần lượt là tâm của đường tròn đường kính  và . Cho . Xác định vị trí của điểm  để diện tích tứ giác IEFJ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó theo .

**Bài 5** (2 điểm).

a. Cho số tự nhiên  bất kỳ. Tìm tất cả các số nguyên tố  sao cho số  luôn viết được dưới dạng hiệu hai số chính phương.

b. Tìm các số nguyên  thoả mãn phương trình: 

**ĐÁP ÁN**

**Bài 1** (3 điểm).

Vậy 

**Bài 2** (6 điểm).

a.



Vậy  Với .

b. Ta có



c. Do  nên 

Do đó  mà 

+) Nếu 

 mà 



+) Nếu 

 mà 

.

Vậy để .

d. Xét hiệu 

Vì  và 

Ta có  do 

Vậy .

**Bài 3** (3 điểm).

a. Cho  ta được 

Cho  ta được

.

Suy ra, ta có: 

Ta có:



b. 



Đặt 

Ta có hệ phương trình 

Ta có 



Vậy  thoả mãn là .

**Bài 4**.(6 điểm)

A diagram of a triangle with lines and circles

Description automatically generated

a) Xét  vuông tại  có  (Vì  là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AH nên  ), áp dụng hệ thức về cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền ta có:  ME.MA.

Xét  vuông tại  có  (Vì  là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính  nên  ), áp dụng hệ thức về cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền ta có: 

 (Vì cùng bằng  )

b) Có  đối xứng với  qua  là đường trung trực của 

 tại  cân tại , có  là đường cao nên cũng là đường phân giác của 

CMTT ta có 

Xét đường tròn  đường kính , có  là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên  

 thẳng hàng.

c) Áp dụng một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có:







d) Tứ giác  có  nên là hình chữ nhật. Gọi  là giao điểm của  và   (Tính chất đường chéo hình chữ nhật)

Xét  và , có:  chung, 



CMTT ta có: 

 Tứ giác IEFJ là hình thang vuông

 Diện tích tứ giác IEFJ: 

Mà 

Diện tích tứ giác IEFJ lớn nhất khi và chi khi  lớn nhất  nằm chính giữa cung .

Khi đó 

Vậy diện tích tứ giác IEFJ lớn nhất bằng  khi  nằm chính giữa cung .

Khi đó .

Vậy diện tích tứ giác IEFJ lớn nhất bằng  khi  nằm chính giữa cung .

**Bài 5**

a. Giả sử  với 

Do  và  có cùng tính chẵn lẻ mà  nên  và  đều là số chẵn  hay .

Mặt khác, 

Vì  mà 

 : 2 mà  là số nguyên tố nên .

b. Ta có 



Đặt 



 mà  nên 

Mặt khác,  không chia hết cho 3 nên 

Khi đó từ (1) suy ra ta có: 



Mà  do 

Ta có bảng giá trị sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 |
|  | 3 | 1 |
|  |  | 1 |
|  | 1 | 1 |

Từ bảng trên ta thấy 



Vậy cặp  thoả mãn là: .