

Câu 1 (4,0 điểm): Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15$

b) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

Câu 2 (4,0 điểm):

a) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ (Với x, y, z, a, b, c khác 0).

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$

Câu 3 (4,0 điểm): Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$

b) $\frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$

Câu 4 (6,0 điểm): Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N.

a) Chứng minh rằng tứ giác AEMD là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\triangle CBH$ đồng dạng với $\triangle EAH$

c) Biết diện tích $\triangle CBH$ gấp bốn lần diện tích $\triangle EAH$. Chứng minh rằng: $AC = 2EF$.

d) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Câu 5 (2 điểm): Cho a, b, c là độ dài các cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác.

Chứng minh: $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Chữ ký của giám thị 1:.....

Chữ ký của giám thị 2:.....

Câu	Tóm tắt đáp án	Điểm
Câu 1 (4đ)	a) $a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15 = a^4 + 8a^3 + 15a^2 - a^2 - 8a - 15$ $= (a^4 + 8a^3 + 15a^2) - (a^2 + 8a + 15)$ $= a^2(a^2 + 8a + 15) - (a^2 + 8a + 15)$ $= (a^2 + 8a + 15)(a^2 - 1)$ $= (a + 3)(a + 5)(a + 1)(a - 1)$	0,5 0,5 0,5 0,5
	b) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ $= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$ $= [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]$ $= (a + b - c)(a + b + c)(c - a + b)(c + a - b)$	0,5 0,5 0,5 0,5
	a) Từ : $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$	0,25
Câu 2 (4đ)	Ta có : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 1$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	0,25
	b, Ta có: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32) \Leftrightarrow x^6 + (x^6 - 2x^3y + y^2) = 64$ $\Leftrightarrow (x^2)^3 + (x^3 - y)^2 = 64$	0,5 0,5
	Vì $x^2 \in \mathbb{N}$ và 64 chỉ được phân tích thành $64 = 0^2 + 4^2 = 0^2 + 8^2$ nên ta có: $\begin{cases} x^2 = 4 \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 = 0 \\ (x^3 - y)^2 = 8^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; x = -2 \\ y = 8; y = -8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 8; y = -8 \end{cases}$	0,75 0,25
Vậy pt đã cho có 4 nghiệm nguyên: $(x = 0; y = 8); (x = 0; y = -8); (x = 2; y = 8); (x = -2; y = -8)$		
Câu 3 (4đ)	a) Đặt $x^2 + x + 1 = y$ pt đã cho trở thành $y(y + 1) - 12 = 0$ $\Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$ $\Leftrightarrow (y - 3)(y + 4) = 0$ $\Leftrightarrow y = 3$ hoặc $y = -4$	0,25 0,25 0,5
	+ Với $y = 3$ ta được $x_1 = 1; x_2 = -2$	0,5
	+ Với $y = -4$, vô nghiệm	0,25

	KL: Vậy PT đã cho có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -2$	0,25
	b) $\frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$	0,5
	$\Leftrightarrow \left(\frac{x-5}{100} - 1\right) + \left(\frac{x-4}{101} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{102} - 1\right) = \left(\frac{x-100}{5} - 1\right) + \left(\frac{x-101}{4} - 1\right) + \left(\frac{x-102}{3} - 1\right)$	0,5
	$\Leftrightarrow (x-105) \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x = 105$	0,5
	KL: Vậy PT đã cho có nghiệm $x = 105$	
Câu 4 (6đ)		
	a) (1,5 điểm) Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ \widehat{BAH}) $AB = AD$ (gt) $\widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông) $\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF$ (g.c.g)	0,5
	$\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE$ (gt) Nên. $AE = DM$	0,5
	Lại có $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$) Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành	
	Mặt khác. $\widehat{BAE} = 90^\circ$ (gt) Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật	0,5
	b) (1,5 điểm) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH}$ hay $\frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH}$ ($AB = BC, AE = AF$)	0,75
	Lại có $\widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ \widehat{ABH}) $\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle EAH$ (c.g.c)	0,75
	c) (1,5 điểm) Từ $\triangle CBH \sim \triangle EAH$ (cmt)	1,0

	$\Rightarrow \frac{S_{\Delta CBH}}{S_{\Delta EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{ mà } \frac{S_{\Delta CBH}}{S_{\Delta EAH}} = 4 \text{ (gt)} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \text{ nên } BC^2 = (2AE)^2$ $\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB, F \text{ là trung điểm của } AD$	
	Do đó: $BD = 2EF$ hay $AC = 2EF$ (đpcm)	0,5
	d) (1,5 điểm) Do $AD \parallel CN$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có: $\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$	0,25
	Lại có: $MC \parallel AB$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có: $\Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$	0,5
	$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$	0,5
	$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (\text{đpcm})$	0,25
Câu 5 (2đ)	Ta có: $(x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{x + y}{xy} \geq \frac{4}{x + y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y} \quad (x, y > 0)$	0,5
	Áp dụng kết quả này ta được: $\frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} \geq \frac{4}{(p - a) + (p - b)} = \frac{4}{2p - a - b} = \frac{4}{c}$	0,5
	Tương tự ta có: $\frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} \geq \frac{4}{a}; \quad \frac{1}{p - c} + \frac{1}{p - a} \geq \frac{4}{b}$	0,25
	Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, thu gọn ta được: $\frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$	0,5
	Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hay tam giác đã cho là đều.	0,25

Lưu ý:

- Học sinh làm bài các cách khác nhau mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.
- Bài hình không có hình vẽ thì không chấm.
- Tổng điểm của bài cho điểm lẻ đến 0,25đ (ví dụ : 13,25đ ; 14,5đ; 16,75đ).