SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG, VẬN DỤNG CAO
KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2023
Môn: Toán

TÊN CHUYÊN ĐỀ: BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Người biên soạn: Vũ Thị Vui
Đơn vị công tác: Tổ Toán, Trường THPT Thuận Thành số 1.

I. Hệ thống kiến thức liên quan.

Các bước tìm GTLN-NN của hàm số trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Bước 1: Hàm số đã cho $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $\left(a;b\right)$, tại đó $f'\left(x\right)=0$ hoặc $f'\left(x\right)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f\left(a\right),f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(b\right)$.

Bước 3: Khi đó:

$\max\limits_{\left[a,b\right]} f\left(x\right)=max\left\{f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$.

$\min\limits_{\left[a,b\right]} f\left(x\right)=min\left\{f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),...,f\left(x_n\right),f\left(a\right),f\left(b\right)\right\}$.

Bước 4. Biện luận m theo giả thuyết đề để kết luận

Lưu ý:

- Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì $\underset{\left[a;b\right]}{Max}\, f\left(x\right)=f\left(b\right);\underset{\left[a;b\right]}{Min}\, f\left(x\right)=f\left(a\right)$
- Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì $\underset{\left[a;b\right]}{Max}\, f\left(x\right)=f\left(a\right);\underset{\left[a;b\right]}{Min}\, f\left(x\right)=f\left(b\right)$

II. Các dạng bài/câu thường gặp

Dạng 1: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|=a \quad \left(a>0\right)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

TH1: $Max=\left|m+K\right|\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+K\right|=a\\ \left|m+K\right|\ge\left|m+k\right|\end{cases}$

TH2: $Max=\left|m+k\right|\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+k\right|=a\\ \left|m+k\right|\ge\left|m+K\right|\end{cases}$

Ví dụ 1. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Lời giải

Đặt $g\left(x\right)=x^3-3x+m$.

$g'\left(x\right)=3x^2-3$; $g'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin\left[0;3\right]\\ x=1\in\left[0;3\right]\end{array}\right.$.

$g\left(0\right)=m;g\left(1\right)=-2+m;\ g\left(3\right)=18+m$.

Suy ra $\max\limits_{\left[0;3\right]} g\left(x\right)=18+m$; $\min\limits_{\left[0;3\right]} g\left(x\right)=-2+m$.

Để giá trị lớn nhất hàm số $y=f\left(x\right)$ là 16 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}18+m=16\\-2+m>-16\end{cases}\\\begin{cases}-2+m=-16\\18+m<16\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=-2\\m>-14\end{cases}\\\begin{cases}m=-14\\m<-2\end{cases}\end{array}\right.$.

Vậy $S=\left\{-2;-14\right\}$ nên tổng là $-2-14=-16$.

Dạng 2: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|=a \quad \left(a>0\right)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\qquad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y=a \Leftrightarrow \begin{cases}m+k=a\\m+k>0\end{cases} \vee \begin{cases}m+K=-a\\m+K<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=a-k\\m>-k\end{cases} \vee \begin{cases}m=-a-K\\m<-K\end{cases}$. Vậy $m\in S_1\cup S_2$.

Ví dụ 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^2+x+m\right|$ thỏa mãn $\min\limits_{[-2;\,2]} y=2$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{31}{4}$. **B.** -8. **<u>C</u>.** $-\dfrac{23}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Xét hàm số $u=x^2+x+m$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$, có: $u'=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

$$\max\limits_{[-2;2]} u=\max\left\{u\left(-2\right),u\left(-\frac{1}{2}\right),u\left(2\right)\right\}=m+6;\ \min\limits_{[-3;2]} u=\min\left\{u\left(-2\right),u\left(-\frac{1}{2}\right),u\left(2\right)\right\}=m-\frac{1}{4}.$$

Nếu $m-\dfrac{1}{4}\ge 0$ hay $m\ge \dfrac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y=m-\dfrac{1}{4}=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn).

Nếu $m+6\le 0$ hay $m\le -6$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y=-m-6=2 \Leftrightarrow m=-8$ (thỏa mãn).

Nếu $-6<m<\dfrac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y=0$ (không thỏa mãn).

Ta có: $S=\left\{-8;\dfrac{9}{8}\right\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-\dfrac{23}{4}$.

Dạng 3: Tìm m để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=K;\ \min\limits_{[\alpha;\beta]} f\left(x\right)=k\ \left(K>k\right)$.

Để $\max\limits_{[\alpha;\beta]} y\le M \Rightarrow \begin{cases}m+k\ge -M\\m+K\le M\end{cases} \Leftrightarrow -M-k\le m\le M-K$.

Ví dụ 3. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m để hàm số $y=\left|\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[0;2\right]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng

<u>A</u>. -195. **B.** 210. **C.** 195. **D.** -210.

Lời giải

Xét $u=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{19}{2}x^2+30x+m$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ có $u'=x^3-19x+30;\quad u'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5\\x=3\\x=2\end{array}\right.$.

Do đó: $\max\limits_{[0;2]} u=\max\left\{u(0);u(2)\right\}=\max\left\{m;m+6\right\}=m+6;\ \min\limits_{[0;2]} u=m.$

Do đó: $\max\limits_{[0;2]} y = \max\{|m|;|m+6|\} \le 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |m| \le |m+6| \le 20 \\ |m+6| \le |m| \le 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -13 \le m \le -6 \\ -20 \le m \le -13 \end{array}\right. \Leftrightarrow -20 \le m \le -6$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-20;-19;...,-6\}$. Vậy $S = -\sum\limits_{6}^{20} k = -195$.

Dạng 4: Tìm m để $\min\limits_{[\alpha;\beta]} y = |f(x)+m|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = K;\ \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = k\ (K > k)$.

Để

$$\min\limits_{[\alpha;\beta]} y \le a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \le a \\ m+k \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \ge -a \\ m+K \le 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le a-k \\ m \ge -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \ge -a-K \\ m \le -K \end{cases} \vee -K < m < -k.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = |2x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{[-1;3]} f(x) \le 3$?

A. 4. **B.** 8. **C.** 31. **D.** 39.

Lời giải

Xét $u = 2x^3 - 3x^2 + m$, ta có: $u' = 6x^2 - 6x$; $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Do đó: $\begin{cases} \min\limits_{[-1;3]} u = \min\{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \min\{m-5, m+27, m, m-1\} = m-5 \\ \max\limits_{[-1;3]} u = \max\{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \max\{m-5, m+27, m, m-1\} = m+27 \end{cases}$.

TH1: $m - 5 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 5 \Rightarrow \min\limits_{[-1;3]} f(x) = m - 5 \le 3 \Leftrightarrow m \le 8 \Rightarrow m \in \{5;6;7;8\}$.

TH2: $m + 27 \le 0 \Leftrightarrow m \le -27 \Rightarrow \min\limits_{[-1;3]} f(x) = -(m+27) \le 3 \Leftrightarrow m \ge -30 \Rightarrow m \in \{-30;-29;-28;-27\}$.

TH3: $(m-5)(m+27) < 0 \Leftrightarrow -27 < m < 5 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-30;-29;-28;...;7;8\}$.

Dang 5: Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y = |f(x)+m|$ đạt min.

Trước tiên tìm $\max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = K;\quad \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = k\ (K > k)$.

Ta có: $\max\{|m+K|, |m+k|\} \ge \dfrac{|m+K| + |m+k|}{2} \ge \dfrac{|m+K-m-k|}{2} = \dfrac{|K-k|}{2}$.

Suy ra $\max f(x)$ đạt min bằng $\dfrac{K-k}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -\dfrac{K+k}{2}$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ (với m là tham số thực). Hỏi $\max\limits_{[1;2]} y$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số : $t = x^3 - 3x^2$ với $x \in [1;2]$.

Ta có $t' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (1;2) \\ x = 2 \notin (1;2) \end{array}\right.$; $t(1) = -2$, $t(2) = -4$. Nên $\max\limits_{[1;2]} t = -2$ và $\min\limits_{[1;2]} t = -4$.

Do đó $\max\limits_{[1;2]} y = \max\limits_{[1;2]} |m+t| = \max\{|m-4|;|m-2|\}$

$= \max\{|m-4|;|2-m|\} \geq \dfrac{|m-4|+|2-m|}{2} \geq \dfrac{|(m-4)+(2-m)|}{2} = 1$.

Dấu bằng đạt tại $m-4 = 2-m \Leftrightarrow m = 3$.

Dạng 6: Tìm m để $\min\limits_{[a;b]} y = |f(x)+m|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x) = K;\ \min\limits_{[a;b]} f(x) = k\ (K > k)$.

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k$. Đề hỏi tìm min của $\min\limits_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là 0.

Ví dụ 6. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1;\ 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Ta có $y = f(x) = |-x^4+8x^2+m| = |x^4-8x^2-m| = \left|(x^2-4)^2 - 16 - m\right|$.

Đặt $t = (x^2-4)^2$, vì $x \in [-1;\ 3]$, suy ra $t \in [0;\ 25]$.

Khi đó $y = g(t) = |t-16-m|$.

Ta có $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = \min\limits_{[-0;25]} g(t) = \min\{|m-9|,|m+16|\}$.

Nếu $m-9 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$, khi đó $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = m-9 \geq 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f(x)\right) = 0$, khi $m = 9$.

Nếu $m+16 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -16$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = -m-16 \geq 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f(x)\right) = 0$, khi $m = -16$.

Nếu $(m-9)(m+16) < 0 \Leftrightarrow -16 < m < 9$, khi đó $\min\limits_{x\in[-1;3]} f(x) = 0$, khi đó $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f(x)\right) = 0$.

Vậy $\min\left(\min\limits_{[-1;3]} f(x)\right) = 0$, khi $-16 \leq m \leq 9$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, nên có 26 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 7: Cho hàm số $y = |f(x)+m|$.Tìm m để $\max\limits_{[a;b]} y \leq h.\min\limits_{[a;b]} y\ (h > 0)$ hoặc $Min + \max = a$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max\limits_{[a;b]} f(x) = K;\ \min\limits_{[a;b]} f(x) = k\ (K > k)$.

TH1: $|K+m| \leq h|k+m| \xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|K+m| \geq |k+m|} m \in S_1$.

TH2: $|k+m| \leq h|K+m| \xrightarrow[K+m \text{ cung dau } k+m]{|k+m| \geq |K+m|} m \in S_2$.

Vậy $m \in S_1 \cup S_2$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$g'(x)=4x^3-12x^2+8x$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	a	$\nearrow$	$a+1$	$\searrow$	a

TH1: $a \le -1 \Rightarrow m=-(a+1); M=-a \Rightarrow -2(a+1) \ge -a \Leftrightarrow a \le -2 \Rightarrow a \in \{-3;-2\}$.

TH2: $-1<a<0 \Rightarrow m=0; M>0 \Rightarrow M>2m$ (loại).

TH3: $a \ge 0 \Rightarrow m=a; M=a+1 \Rightarrow 2a \ge a+1 \Leftrightarrow a \ge 1 \Rightarrow a \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

IV. Hệ thống câu hỏi ôn tập

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(\sin x+1)+m|$ bằng 4. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Câu 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|\frac{x-m^2-m}{x+2}\right|$ thỏa $\max\limits_{[1;2]} y=1$. Tích các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** -4. **C.** 16. **D.** 4.

Câu 3. Cho hàm số $y=|x^2+x+m|$. Tổng tất cả giá trị thực của tham số m để $\min\limits_{[-2;\,2]} y=2$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$. **B.** -8. **C.** $-\frac{23}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=|x^4-4x^3+4x^2+a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3;3]$ sao cho $M \le 2m$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 5. Cho hàm số $y=\left|\frac{x^2-(m+1)x+2m+2}{x-2}\right|$ (với m là tham số thực). Hỏi $\max\limits_{[-1;1]} y$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-(m+1)x+m|$ trên $[2;m-1]$ nhỏ hơn 2020.

A. 2043210. **B.** 2034201. **C.** 3421020 **D.** 3412020.

Câu 7. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|-4\cos^2 x+2\sin x+m+4|$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

A. 12. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 15.

Câu 8. Biết đồ thị hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và $f\left(1\right)=-1;f'\left(1\right)=0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $\left|f\left(x\right)-m\right|\le 12$ nghiệm đúng $\forall x\in\left[0;2\right]$. Số phần tử của S là

A. 10. **B.** 16. **C.** 11. **D.** 0.

Câu 9. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left|x^4-4x^3+4x^2+m\right|$. Khi m thuộc $\left[-3;3\right]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^3+m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|+2\min\limits_{[0;1]}\left|f(x)\right|=10$.

A. 4. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 2.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Câu 1. Đặt $t=\sin x+1$ $\left(t\in\left[0;2\right]\right)$, khi đó $y=\left|f\left(\sin x+1\right)+m\right|=\left|f\left(t\right)+m\right|=\left|t^3-3t+m\right|$.

Xét hàm số $u\left(t\right)=t^3-3t+m$ liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ có $u'\left(t\right)=3t^2-3$.

$$u'\left(t\right)=0\Leftrightarrow 3t^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in\left[0;2\right]\\ t=-1\notin\left[0;2\right]\end{array}\right..$$

Ta có $u\left(0\right)=m;\,u\left(1\right)=m-2;\,u\left(2\right)=m+2$ $\Rightarrow\max\limits_{[0;2]}u\left(x\right)=m+2$, $\min\limits_{[0;2]}u\left(x\right)=m-2$.

Khi đó $\max y=\max\left\{\left|m-2\right|;\left|m+2\right|\right\}$.

TH1: $\left\{\begin{array}{l}\left|m-2\right|=4\\ \left|m-2\right|\ge\left|m+2\right|\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=6\\ m=-2\end{array}\right.\\ m\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-2$.

TH2: $\left\{\begin{array}{l}\left|m+2\right|=4\\ \left|m+2\right|\ge\left|m-2\right|\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-6\end{array}\right.\\ m\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=2$.

Vậy $S\in\left\{-2;\,2\right\}\Rightarrow -2+2=0$.

Câu 2. Xét $u=\dfrac{x-m^2-m}{x+2}$, ta có: $u'=\dfrac{2+m^2+m}{\left(x+2\right)^2}>0$, $\forall x\in\left[1;2\right]$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó $A=\max\limits_{[1;2]}u=u\left(2\right)=-\dfrac{m^2+m-2}{4}$; $a=\min\limits_{[1;2]}u=u\left(1\right)=-\dfrac{m^2+m-1}{3}$.

$$\max\limits_{[1;2]}y=\max\left\{\left|\frac{m^2+m-2}{4}\right|,\left|\frac{m^2+m-1}{3}\right|\right\}=1\Leftrightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Ta có: $S=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$. Vậy tích các phần tử của S bằng -4.

Câu 3. Xét hàm số $u=x^2+x+m$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$, có: $u'=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

$$\max\limits_{[-2;2]}u=\max\left\{u\left(-2\right),u\left(-\frac{1}{2}\right),u\left(2\right)\right\}=m+6;\ \min\limits_{[-3;2]}u=\min\left\{u\left(-2\right),u\left(-\frac{1}{2}\right),u\left(2\right)\right\}=m-\frac{1}{4}.$$

Nếu $m-\dfrac{1}{4}\ge 0$ hay $m\ge\dfrac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]}y=m-\dfrac{1}{4}=2\Leftrightarrow m=\dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn).

Nếu $m+6\le 0$ hay $m\le -6$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y=-m-6=2\Leftrightarrow m=-8$ (thỏa mãn).

Nếu $-6<m<\dfrac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y=0$ (không thỏa mãn).

Ta có: $S=\left\{-8;\dfrac{9}{8}\right\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-\dfrac{23}{4}$.

Câu 4. Xét hàm số $g(x)=x^4-4x^3+4x^2+a$.

$g'(x)=4x^3-12x^2+8x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$			$a+1$		
	a	↗		↘	a

TH1: $a\le -1\Rightarrow m=-(a+1);M=-a\ \Rightarrow -2(a+1)\ge -a\Leftrightarrow a\le -2\Rightarrow a\in\{-3;-2\}$.

TH2: $-1<a<0\Rightarrow m=0;M>0\ \Rightarrow M>2m$ (loại).

TH3: $a\ge 0\Rightarrow m=a;M=a+1\ \Rightarrow 2a\ge a+1\Leftrightarrow a\ge 1\Rightarrow a\in\{1;2;3\}$.

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Câu 5. Ta có $y=\left|\dfrac{x^2-x+2}{x-2}-m\right|=|t-m|$, trong đó $t=\dfrac{x^2-x+2}{x-2}\in[-2;-1],\forall x\in[-1;1]$.

$t'=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}\Rightarrow t'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in(-1;1)\\x=4\notin(-1;1)\end{array}\right.$.

$t(-1)=-\dfrac{4}{3},t(0)=-1,t(1)=-2$

Do đó $\max\limits_{[-1;1]} y=\max\limits_{[-1;1]}|t-m|=\max\{|m+2|,|m+1|\}=\max\{|m+2|,|-m-1|\}$

$\ge\dfrac{|m+2|+|-m-1|}{2}\ge\dfrac{|(m+2)+(-m-1)|}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Dấu bằng đạt tại $m+2=-m-1\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 6. +) Xét hàm số $f(x)=x^2-(m+1)x+m$ liên tục trên $[2;m-1]$ với $m>6$.

Ta có: $f'(x)=2x-(m+1);f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{m+1}{2}\in[2;m-1]$.

Khi đó: $f(2)=2-m;f\left(\dfrac{m+1}{2}\right)=-\dfrac{(m-1)^2}{4};f(m-1)=2-m.$

+) Vì $-\dfrac{(m-1)^2}{4}\le 2-m<0,\forall m>6$ nên

$\max\limits_{[2;m-1]} f(x)=\max\left\{f(2);f\left(\dfrac{m+1}{2}\right);f(m-1)\right\}=2-m$;

và $\min\limits_{[2;m-1]} f(x)=\min\left\{f(2);f\left(\frac{m+1}{2}\right);f(m-1)\right\}=-\frac{(m-1)^2}{4}$.

Do đó: $\min\limits_{[2;m-1]} y=\min\left\{|2-m|;\left|-\frac{(m-1)^2}{4}\right|\right\}=|2-m|$

+) Theo yêu cầu bài toán: $|2-m|<2020 \Leftrightarrow -2020<2-m<2020 \Leftrightarrow -2018<m<2022$

+) Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m>6$ nên $m\in\{7;8;9;\cdots;2021\}$.

+) Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m là: $\sum\limits_{n=7}^{2021} n=\frac{(7+2021)2015}{2}=2043210$

Câu 7. Ta có: $y=\left|-4\cos^2 x+2\sin x+m+4\right|=\left|4\left(1-\cos^2 x\right)+2\sin x+m\right|=\left|4\sin^2 x+2\sin x+m\right|$.

Đặt $t=\sin x$, do $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra $t\in[0;1]$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|4t^2+2t+m\right|$ trên đoạn $[0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=4t^2+2t+m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, ta có:

$f'(t)=8t+2$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{4}\notin[0;1]$.

$f(0)=m$; $f(1)=m+6$.

Trường hợp 1: Nếu $m\ge 0 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=m$. Kết hợp với giả thiết ta có $0\le m\le 4$. (1)

Trường hợp 2: Nếu $m+6\le 0 \Leftrightarrow m\le -6 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=-m-6$. Kết hợp với giả thiết ta có

$\begin{cases}-m-6\le 4\\ m\le -6\end{cases} \Leftrightarrow -10\le m\le -6$. (2)

Trường hợp 3: Nếu $m(m+6)<0 \Leftrightarrow -6<m<0 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y=0\le 4$. Trường hợp này thỏa mãn. (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $m\in[-10;4]$. Vì m là số nguyên nên $m\in\{-10,-9,-8,...,2,3,4\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc toạ độ, suy ra $f(0)=0 \Rightarrow c=0$ (I).

Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$.

Theo giả thiết $\begin{cases}f(1)=-1\\ f'(1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c=-1\\ 4a+2b=0\end{cases}$ (II).

Từ (I) và (II) suy ra $a=1;b=-2;c=0 \Rightarrow f(x)=x^4-2x^2$.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2-m$ trên đoạn $[0;2]$.

Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0;2]$ và có

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\in[0;2]\\ x=1\in[0;2]\\ x=-1\notin[0;2]\end{array}\right..$$

Khi đó $y(0)=-m$; $y(1)=-m-1$; $y(2)=-m+8$. $\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[0;2]} y=-m+8 \\ \min\limits_{[0;2]} y=-m-1 \end{cases}$.

Theo bài ra

$$\left|x^4-2x^2-m\right|\le 12, \forall x\in[0;2] \Leftrightarrow \max\left\{|-m-1|;|-m+8|\right\}\le 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |-m+8|\le 12 \\ |-m+8|\ge|-m-1| \end{cases} \\ \begin{cases} |-m-1|\le 12 \\ |-m-1|\ge|-m+8| \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4\le m\le 20 \\ m\le \dfrac{7}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} -13\le m\le 11 \\ m\ge \dfrac{7}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le m\le \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{7}{2}\le m\le 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow -4\le m\le 11$$. Suy ra S có 11 phần tử.

Câu 9. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Xét $u(x)=x^4-4x^3+4x^2+m$ liên tục trên $[0;2]$.

Ta có $u'(x)=4x^3-12x^2+8x$, $u'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có: $\begin{cases} u(0)=m \\ u(1)=m+1 \\ u(2)=m \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \min\limits_{[0;2]} u(x)=m \\ \max\limits_{[0;2]} u(x)=m+1 \end{cases}$.

$\min\limits_{[0;2]} f(x)=\min\left\{0;|m|;|m+1|\right\}$ hoặc $\min\limits_{[0;2]} f(x)=0$, với $m\in[-3;3]$ (*).

Trường hợp 1: $m(m+1)\le 0 \Leftrightarrow -1\le m\le 0$.

$\min\limits_{[0;2]} f(x)=0$

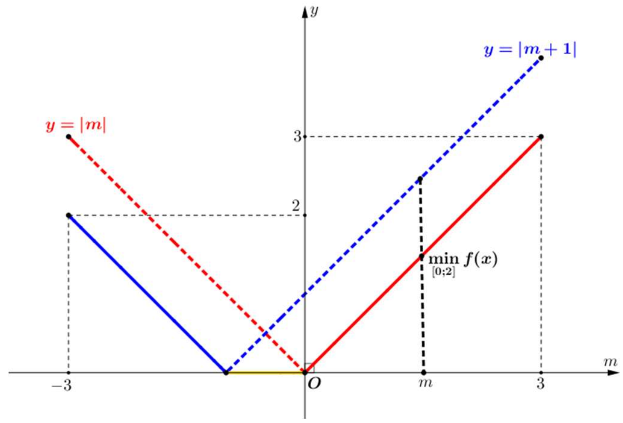
Trường hợp 2: $m>0$ kết hợp với (*) ta có: $0<m\le 3$.

$\min\limits_{[0;2]} f(x)=|m|$.

Trường hợp 3: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$ kết hợp với (*) ta có $-3\le m<-1$.

$\min\limits_{[0;2]} f(x)=|m+1|$.

Khi đó: $\min\limits_{[0;2]} f(x)=\begin{cases} |m| & , m\in(0;3] \\ |m+1| & , m\in[-3;-1) \\ 0 & , m\in[-1;0] \end{cases}$.



Dựa vào đồ thị ta thấy $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $m = 3$.

Câu 10. Ta xét $f(x) = x^4 - 2x^3 + m$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;1] \\ x = \dfrac{3}{2} \notin [0;1] \end{array}\right.$.

$f(0) = m; f(1) = m - 1$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m \le 0$ thì $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| = 1 - m;\ \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = -m$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + 2\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow (1 - m) + 2(-m) = 10 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa điều kiện).

- Nếu $m \ge 1$ thì $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| = m;\ \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = m - 1$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + 2\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow m + 2(m - 1) = 10 \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa điều kiện).

- Nếu $\dfrac{1}{2} \le m < 1$ thì $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| = m;\ \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + 2\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow m = 10$ (không thỏa điều kiện).

- Nếu $0 < m < \dfrac{1}{2}$ thì $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| = 1 - m;\ \min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 0$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + 2\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow 1 - m = 10 \Leftrightarrow m = -9$ (không thỏa điều kiện).

Do đó có hai giá trị $m = -3$ và $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]} |f(x)| + 2\min\limits_{[0;1]} |f(x)| = 10$ là 1.

CHUYÊN ĐỀ SỐ 2:

TÊN CHUYÊN ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM HỢP.

Người biên soạn: Nguyễn Bá Cao

Đơn vị công tác:Trường THPT Thuận Thành số 1.

I. Hệ thống kiến thức liên quan.

*** Công thức đạo hàm của hàm số hợp** $y = f(u(x))$ **:** $y' = u'(x).f'(u(x))$**.**

*** Một số quy tắc biến đổi đồ thị:**

Cho hàm số y = f(x) có đồ thị (C) . Khi đó, với số a > 0 ta có:

• Hàm số y = f(x) + a có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy lên trên a đơn vị.

• Hàm số y = f(x) - a có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy xuống dưới a đơn vị.
• Hàm số y = f(x + a) có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua trái a đơn vị.
• Hàm số y = f(x - a) có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua phải a đơn vị.
• Hàm số y = -f(x) có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Ox.
• Hàm số y = f(-x) có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Oy.
• Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đồ thị (C') bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy và bỏ phần (C) nằm bên trái Oy.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy qua Oy.

* Hàm số chẵn có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.
Hàm số lẻ có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

* Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max}\, f(x)=f(b);\underset{[a;b]}{Min}\, f(x)=f(a)$

* Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\underset{[a;b]}{Max}\, f(x)=f(a);\underset{[a;b]}{Min}\, f(x)=f(b)$

II. Các dạng bài/câu thường gặp

*** Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(u(x)),y = f(u(x))±h(x)… khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số y = f(x)**

*** Phương pháp giải**

Thực hiện theo một trong hai cách

Cách 1:

Bước 1. Đặt t = u(x).
Đánh giá giá trị của t trên khoảng K.

Chú ý: Có thể sử dụng khảo sát hàm số, bất đẳng thức để đánh giá giá trị của t = u(x).

Bước 2. Từ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số cho ta giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(t).

Bước 3. Kết luận.

Cách 2:

Bước 1. Tính đạo hàm $y'=u'(x)f'(u(x))$.

Bước 2. Tìm nghiệm $y'=u'(x)f'(u(x))=0$.

Chú ý: $f'\left(u(x)\right)=0$ ứng với $u(x)$ là hoành độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(u(x))$, $y=f(u(x))\pm h(x)$...

Ví dụ 1: Cho hàm số y = f(x) liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{21}{4}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x^2-2x)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $M.m > 10$. **B.** $\frac{M}{m} > 2$. **C.** $M - m > 3$. **D.** $M + m > 7$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đặt $t = x^2 - 2x$.

Ta có $x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le x-1 \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow -1 \le (x-1)^2 - 1 \le \frac{21}{4} \Rightarrow t \in \left[-1;\frac{21}{4}\right]$

Xét hàm số $y = f(t), t \in \left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

Từ bảng biến thiên suy ra

$m = \min\limits_{\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f(t) = f(1) = 2;\quad M = \max\limits_{\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{21}{4}\right) = 5$

$\Rightarrow \frac{M}{m} > 2$.

Chọn B.

Cách 2:

Ta có $y' = (2x-2)f'(x^2-2x) = 0$

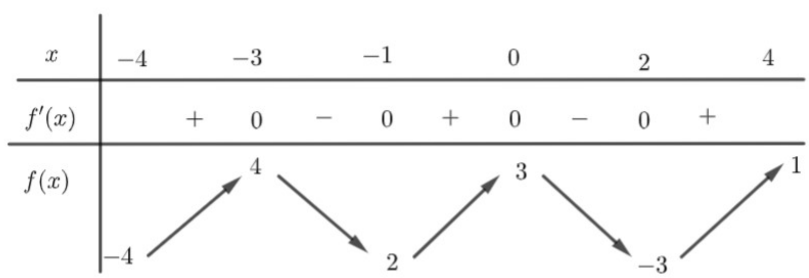
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=\frac{21}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{7}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \\ x=1\pm\sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Vẽ bảng biến thiên và kết luận được

$M = 5; m = 2 \Rightarrow \frac{M}{m} > 2$.

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4;4]$ như sau:



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f\left(|x|^3 + 3|x|\right)$ trên $[-1;1]$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Ta có $g(-x) = g(x)$ nên $g(x)$ chẵn hay đồ thị của hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục tung.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;1]} g(x) = \max\limits_{[0;1]} g(x) = \max\limits_{[0;1]}\left[f\left(x^3+3x\right)\right] = \max\limits_{[0;1]}\left[f\left(x^3+3x\right)\right]$

Xét hàm số $y = f\left(x^3+3x\right)$ trên $[0;1]$.

Đặt $t = x^3 + 3x \Rightarrow t \in [0;4] \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} y = \max\limits_{[0;4]} f(t) = 3$.

Chọn C

*** Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(u(x)),y = f(u(x))±h(x)… khi biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.**

*** Phương pháp giải**

+) Đối với hàm số $y = f\left(u(x)\right)$.

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u'(x)f'(u(x))$.

Bước 2. Tìm nghiệm $y' = u'(x)f'(u(x)) = 0$.

Chú ý: $f'\left(u(x)\right) = 0$ ứng với $u(x)$ là hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(u(x))$.

+) Đối với hàm số $y = f\left(u(x)\right) \pm h(x)$.

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u'(x)f'(u(x)) \pm h'(x)$.

Bước 2. Phân tích $y' = u'(x)f'(u(x)) \pm h'(x) = u'(x)\left[f'\left(u(x)\right) - \dfrac{h'(x)}{u'(x)}\right]$, $u'(x) \neq 0$.

Bước 3. Đặt $u(x) = t$ và đánh giá giá trị của t trên khoảng K là khoảng K'.

Đưa y' về dạng $y' = k(t)\left(f'(t) - g(t)\right)$ với $t \in K'$.

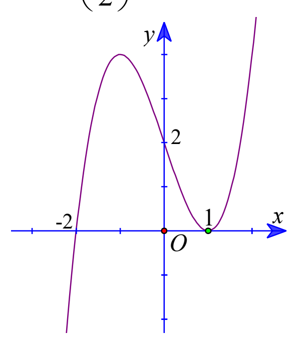
Chú ý: $f'(t) - g(t) = 0$ ứng với t là hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(\text{t})$ (là đồ thị $y = f'(x)$ đã cho) và đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Bước 4. Lập bảng biến thiên.

Bước 5. Kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(u(x)) \pm h(x)$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ trên đoạn $[-5;3]$ bằng



A. $f(-2)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(-4)$. **D.** $f(2)$

Hướng dẫn giải

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = -2 \\ \dfrac{x}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < -2 \Leftrightarrow x < -4.$$

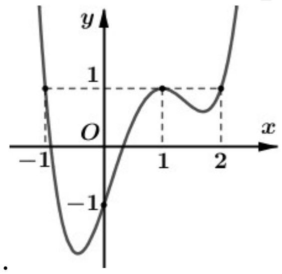
Bảng biến thiên

x	-5		-4		2		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-4)$	$\nearrow$		$\nearrow$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-5;3]$ bằng $g(-4)=f(-2)$.

Chọn A

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-2x+1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ bằng

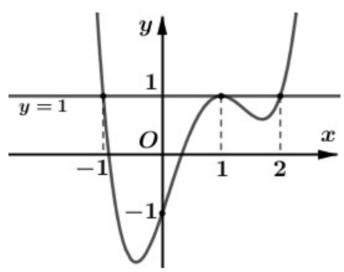


A. $f(0)-1$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(2)-1$. **D.** $f(-1)+2$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $g(x)=f(2x)-2x+1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Ta có $g'(x)=2f'(2x)-2, g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(2x)=1 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(2x)$ và đường thẳng $y=1$.



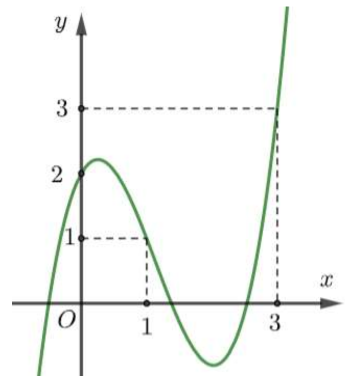
Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-1/2$		$1/2$		1
g'(x)		-	0	-	0
g(x)	$g(1/2)=f(-1)+2$	$\searrow$	$g(1/2)=f(1)$	$\searrow$	$g(1)=f(2)-1$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-2x+1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ bằng $g(1)=f(2)-1$.

Chọn C

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x)=f\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\left(x^2+8x+16\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

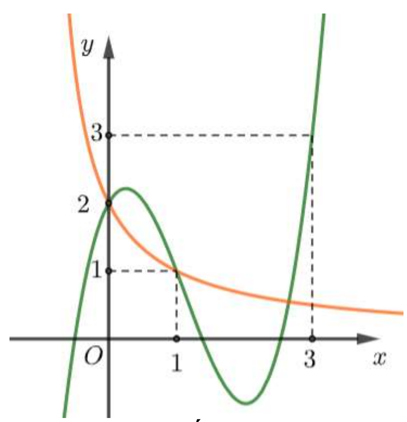
Ta có $g'(x)=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2x+8}{x^2+8x+16}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2}{x+4}$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{4}{x+4}$.

Đặt $t=\frac{x}{2}+1\Rightarrow t\in[0;3]$

Phương trình trở thành $f'(t)=\frac{4}{2t+2}=\frac{2}{t+1}$.

Vẽ đồ thị $y=\frac{2}{x+1}$ lên cùng một hệ tọa độ ta được:



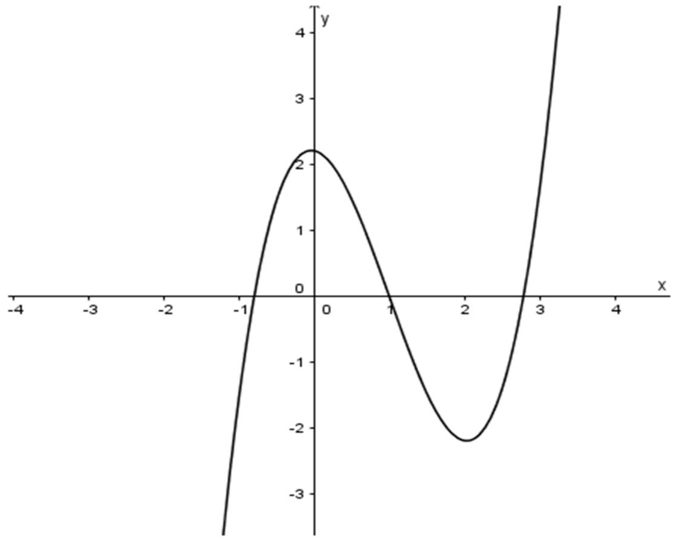
Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t=1\Rightarrow x=0$.

Chọn D

*** Bài toán 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(u(x)),y = f(u(x))±h(x)… khi biết đồ thị của hàm số $y=f'(x+a)$.**

*** Phương pháp giải: Từ đồ thị hàm số $y=f'(x+a)$ suy ra đồ thị hàm số $y=f'(x)$.Từ đó đưa về bài toán 2.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x+1)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới..

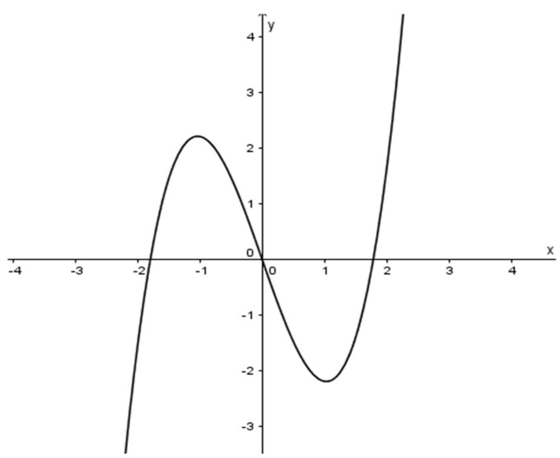


Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right]$ bằng

A. $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. **D.** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x+1)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f'(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f'(x+1)$ sang trái 1 đơn vị. Vậy đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Đặt $t = \dfrac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{2} = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Vì $x \in \left[-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right] \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1;1]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên

t	-1		0		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$

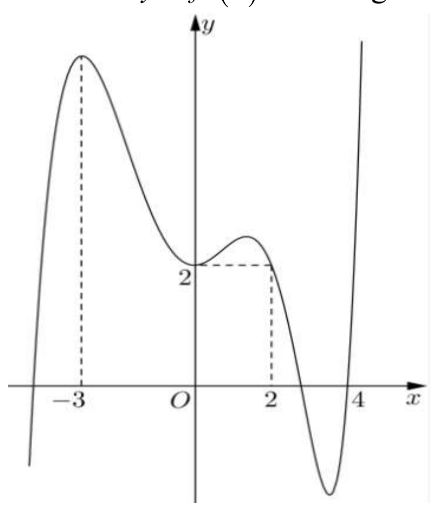
Ta có: $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=\max\limits_{[-1;1]} f(t) \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]} f\left(\dfrac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Chọn A.

III. Hệ thống câu hỏi ôn tập:

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-4x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};2\right]$ bằng

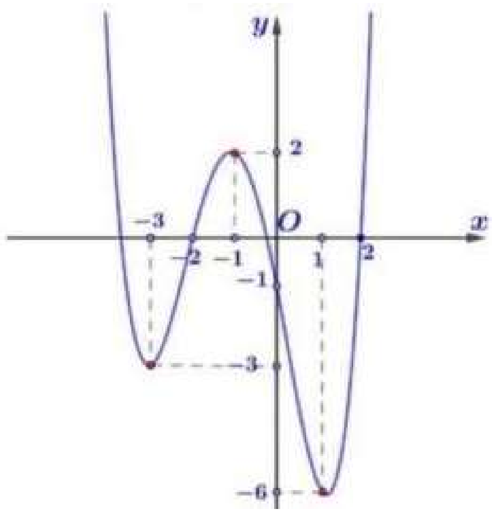
A. $f(0)$. **B.** $f(-3)+6$. **C.** $f(2)-4$. **D.** $f(4)-8$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 15. **B.** $\dfrac{25}{3}$. **C.** $\dfrac{19}{3}$. **D.** 12.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(3x)+3x^2-4x+1$ trên đoạn $\left[\dfrac{-2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$ bằng



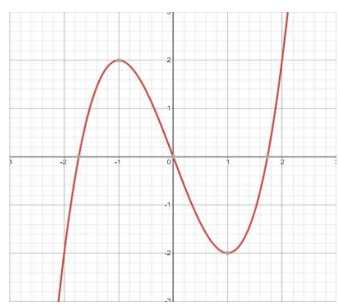
A. $f(0)+1$. **B.** $f(6)$. **C.** $f(2)-\frac{1}{3}$. **D.** $f(-3)+8$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trên đoạn $[-1;1]$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0	↗ ↘	0	↘ ↗	0	↗

A. $f(-1)$. **B.** $f(0)$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ

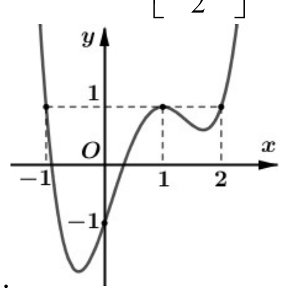


Hàm số $g(x)=f(x^2-1)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-1;\sqrt{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?

A. $x=\sqrt{2}$. **B.** $x=0$ **C.** $x=-1$. **D.** $x=\pm 1$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Giá trị nhỏ nhất

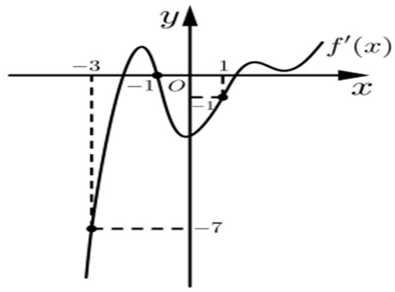
của hàm số $g(x)=f(2x)-2x+1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ bằng



.

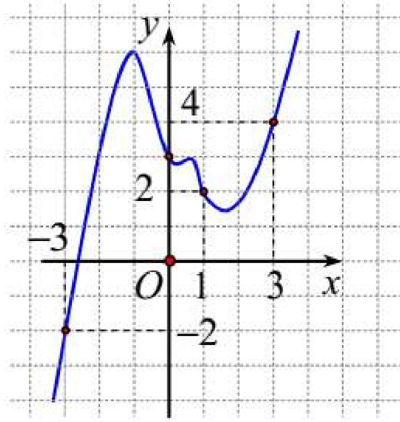
A. $f(0)-1$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(2)-1$. **D.** $f(-1)+2$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=12f(2x)+32x^3+12x^2-12x+2021$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$ bằng



A. $12f(-1)+2026$. **B.** $12f(-3)+1958$. **C.** $12f(1)+2022$. **D.** $f(-1)$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x-1)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=2f(x+1)-(x+1)^2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng



A. $f(0)-1$. **B.** $f(-3)-4$. **C.** $2f(2)-4$. **D.** $f(3)-16$.

Câu 9. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(x-1)+2$ như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x\right|+2\right)+2\cos 2x+4\sin x-1$ là:

A. -9. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên

x	-4	-3	-2	1	2	3	4
$f(x)$	0	-2	5	-6	1	-5	3

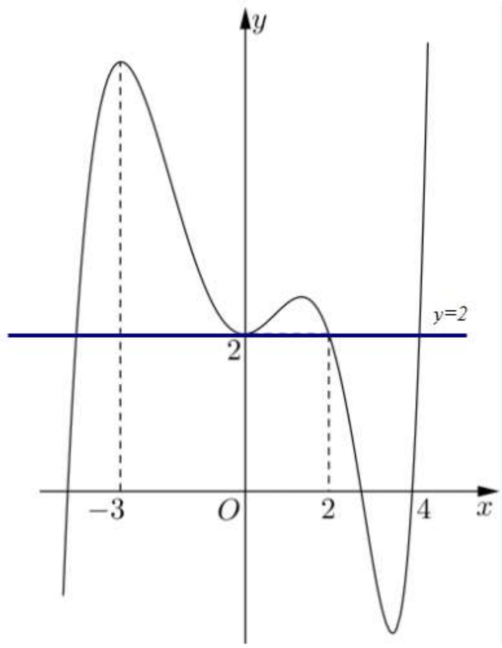
Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8 ?

A. 10. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 12.

HƯỚNG DẪN GIẢI.

Câu 1.

Chọn C



Ta có: $g'(x)=2f'(2x)-4$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2f'(2x)-4=0\Leftrightarrow f'(2x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=x_1<-3\\2x=0\\2x=2\\2x=x_2>4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<-\dfrac{3}{2}\\x=0\\x=1\\x_2>2\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$:

x	$-\infty$		x_1	$-\dfrac{3}{2}$		0		1		2	x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$	0	$+$	0	$-$		0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$			$\nearrow$			$f(2)-4$	$\searrow$			$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta có: trên $\left[-\dfrac{3}{2};2\right]$ hàm số $g(x)=f(2x)-4x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ và $\max\limits_{\left[-\frac{3}{2};1\right]} y=f(2)-4$.

Câu 2.

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'\left(4x-x^2\right).(4-2x)+x^2-6x+8=2(2-x)\left[f'(4x-x^2)+\dfrac{4-x}{2}\right]$

Xét thấy $\forall x \in [1;3] \Rightarrow 3 \le 4x - x^2 \le 4 \Rightarrow f'(4x - x^2) > 0$

Mặt khác $\dfrac{4-x}{2} > 0 \ \forall x \in [1;3]$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$g(1) = f(3) + \dfrac{19}{3} < f(4) + \dfrac{17}{3} = 5 + \dfrac{17}{3} = \dfrac{32}{3}$

$g(3) = f(3) + \dfrac{19}{3} < f(4) + \dfrac{19}{3} = 5 + \dfrac{19}{3} = \dfrac{34}{3}$

$g(2) = 5 + 7 = 12.$

$\Rightarrow g(1) < g(3) < g(2)$

Vậy $\max\limits_{[1;3]} g(x) = 12$ tại $x = 2.$

Câu 3.

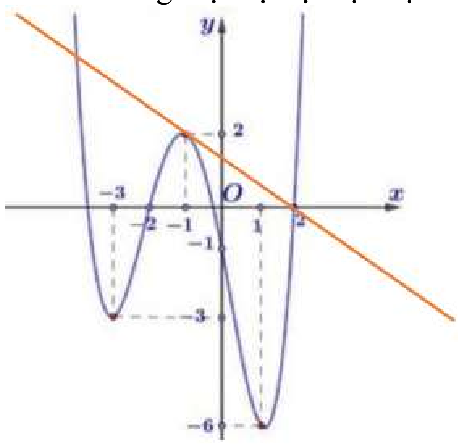
Chọn C

Ta có $g'(x) = 3f'(3x) + 6x - 4 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3x) = -2x + \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow f'(3x) = \dfrac{-2}{3}(3x) + \dfrac{4}{3}$ (1).

Đặt $3x = t \Leftrightarrow x = \dfrac{t}{3}$ vì $x \in \left[\dfrac{-2}{3}; \dfrac{2}{3}\right]$ nên $t \in [-2;2]$.

Phương trình (1) trở thành $f'(t) = \dfrac{-2}{3}t + \dfrac{4}{3}$.

Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ ta được:



Xét trên $[-2;2]$, $f'(t) = \dfrac{-2}{3}t + \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Do đó, trên $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right]$ có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = -1 \\ 3x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên hàm số $g(x)$ trên $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right]$

x	$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$g\left(-\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$		$\searrow$	$g\left(\frac{2}{3}\right)$

Từ bảng biến thiên, suy ra $\min\limits_{\left[\frac{-2}{3};\frac{2}{3}\right]} g(x) = g\left(\frac{2}{3}\right) = f(2) - \frac{1}{3}$.

Câu 4.

Chọn B

Ta có $x \in [-1;1] \Rightarrow 2x \in [-2;2]$.

Từ bảng biến thiên của $y = f'(x)$ thì bảng biến thiên $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta thấy $\forall x \in [-1;1]$ ta có $\begin{cases} f(2x) \le f(0) \\ -\sin^2 x \le 0 = \sin(0) \end{cases}$, do đó $g(x) \le g(0) = f(0)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Câu 5.

Chọn A

Ta có: $g'(x) = 2xf'(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

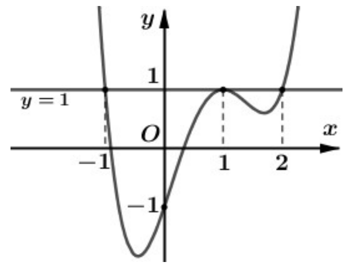
Khi đó: $g(-1) = 0; g(0) = 2; g(\sqrt{2}) = -2$

Câu 6.

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f(2x) - 2x + 1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Ta có $g'(x) = 2f'(2x) - 2, g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(2x)$ và đường thẳng $y = 1$.



Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-1/2$		$1/2$		1
g'(x)		-	0	-	0
g(x)	$g(1/2)=f(-1)+2$	↘	$g(1/2)=f(1)$	↘	$g(1)=f(2)-1$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-2x+1$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ bằng $g(1)=f(2)-1$.

Câu 7.

Chọn A

Ta có $g'(x)=24f'(2x)+96x^2+24x-12=12\left[2f'(2x)+8x^2+2x-1\right]$

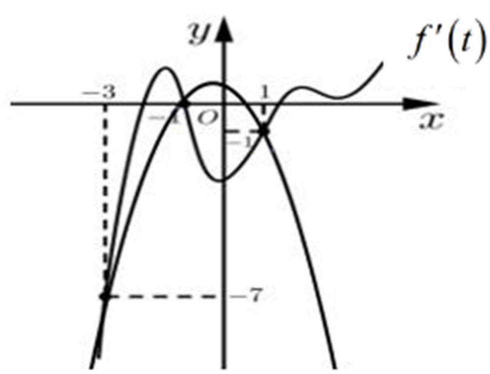
$g'(x)=0\Leftrightarrow 12\left[2f'(2x)+8x^2+2x-1\right]=0\Leftrightarrow 2f'(2x)+8x^2+2x-1=0(*)$

Đặt $t=2x, x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]\Rightarrow t\in[-3;1]$

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành phương trình sau:

$2f'(t)+2t^2+t-1=0\Leftrightarrow f'(t)=-t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}(**)$

Ta có đồ thị như sau:



$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-1 \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

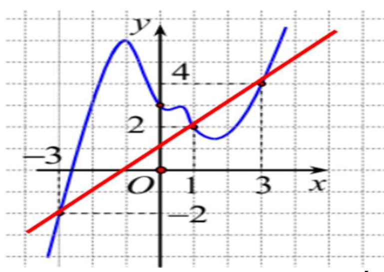
Dựa vào bảng biến thiên và đồ thị hàm số ta có giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ đạt tại $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right)=12f(-1)+2026$..

Câu 8.

Chọn C

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right..$$



Dựa vào hình vẽ ta có bảng biến thiên

x	-3		1		3
g'(x)	0	+	0	-	0
g(x)	$g(-3)$	$\nearrow$	g(1)	$\searrow$	g(3)

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ trên đoạn $[-3;3]$ là $g(1)=2f(1)-4$.

Câu 9.

Chọn D

$y = f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x - \cos x\right| + 2\right) + 2\cos 2x + 4\sin x - 1$

$= f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x - \cos x\right| + 2\right) + 2 - \left(2\sin x - 1\right)^2$

$\le f\left(-\left|\sqrt{3}\sin x - \cos x\right| + 2\right) + 2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

Đặt $t - 1 = -\left|\sqrt{3}\sin x - \cos x\right| + 2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{3}\sin x - \cos x\right| = 3 - t$

Mà $0 \le \left|\sqrt{3}\sin x - \cos x\right| \le 2$ nên $0 \le 3 - t \le 2 \Leftrightarrow 1 \le t \le 3$

$g(t) = f(t-1) + 2 \le 4$

$g(t) = 4 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Vậy $y_{\max} = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$

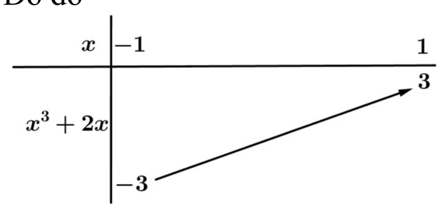
Câu 10.

Chọn A

Đặt $t = x^3 + 2x \Rightarrow t' = 3x^2 + 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $t = x^3 + 2x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó



$x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [-3;3]$

$f\left(x^3 + 2x\right) = f(t)$ với $t \in [-3;3]$.

Ta có $\max\limits_{x\in[-1;1]} g(x) = \left|f(t) + 3f(m)\right| = 8$

$\left[\begin{array}{l} \max\limits_{[-1;1]} g(x) = 5 + 3f(m) = 8 \\ \min\limits_{[-1;1]} g(x) = -6 + 3f(m) = -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(m) = 1 \\ f(m) = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên với $m \in [-4;4]$ ta có:

Với $f(m) = 1$ phương trình có 4 nghiệm.

Với $f(m) = -\dfrac{2}{3}$ phương trình có 6 nghiệm.

Vậy có tất cả 10 giá trị của m thoả mãn.

CHUYÊN ĐỀ SỐ 3:
TÊN CHUYÊN ĐỀ: TÌM GTLN, GTNN TRONG BÀI TOÁN THỰC TẾ

Người biên soạn: Hà Thị San
Đơn vị công tác:Trường THPT Thuận Thành số 1

I. Hệ thống kiến thức liên quan.

1. *Định nghĩa:* Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên miền D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f\left(x\right)\le M,\forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f\left(x_0\right)=M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f\left(x\right)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f\left(x\right)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f\left(x\right)\ge m,\forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f\left(x_0\right)=m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f\left(x\right)$hoặc $m=\min\limits_{D} f\left(x\right)$

2. *Định lý:*

Mọi hàm số **liên tục** trên một **đoạn** đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$ ta làm như sau:

$*$ Tìm các điểm $x_1;\ x_2;...;\ x_n$ thuộc $\left(a;b\right)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

$*$ Tính $f\left(x_1\right); f\left(x_2\right);...; f\left(x_n\right); f\left(a\right); f\left(b\right)$.

$*$ So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $\left[a;b\right]$.

*** Nếu:**

1) $y'>0,\forall x\in\left[a;b\right]\Rightarrow\begin{cases} \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \\ \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \end{cases}$

2) $y'<0,\forall x\in\left[a;b\right]\Rightarrow\begin{cases} \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \\ \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \end{cases}$

Chú ý

$*$ Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

$*$ Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

$*$ Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.

*** Với bài toán đặt ẩn phụ ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ.**

3. Phương pháp:

Đưa yêu cầu bài toán về mối quan hệ hàm số, lập bảng biến thiên để tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của hàm số với điều kiện ràng buộc cho trước.

Chú ý:

Ta cũng có thể sử dụng các bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Một số bất đẳng thức thường dùng.

1. Bất đẳng thức $AM-GM$:
   - Cho hai số thực $a,b\ge 0$ ta có: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ hay $a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

     Dấu $"="$ xãy ra khi và chỉ khi $a=b$.
   - Cho ba số thực $a,b,c\ge 0$ ta có: $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$ hay $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$.

     Dấu $"="$ xãy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki :
   - Cho hai bộ số thực $(a;b),(x;y)$ ta có: $|ax+by|\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$.

     Dấu $"="$ xãy ra khi và chỉ khi $ay=bx$.
   - Cho hai bộ số thực $(a;b;c),(x;y;z)$ ta có:

     $|ax+by+cz|\le\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$

     Dấu $"="$ xãy ra khi và chỉ khi $a:b:c=x:y:z$.

II. Các dạng bài/câu thường gặp

DẠNG 1: TÌM GTLN, GTNN TRONG LĨNH VỰC VẬT LÍ, HOÁ HỌC, SINH HỌC

Ví dụ 1. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=3t^2-t^3$. Tìm thời điểm t (giây) tại đó vận tốc $v(\text{m/s})$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

Ta có $v=S'(t)=6t-3t^2=-3(t-1)^2+3\le 3$, $\forall t\ge 0$. Dấu $"="$ xảy ra khi $t=1$

Vậy vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại thời điểm $t=1\ (s)$.

Ví dụ 2. Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức:

$$h(t)=-\frac{1}{3}t^3+5t^2+24t\quad (t>0)$$

Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Lời giải

Xét : $h(t)=-\frac{1}{3}t^3+5t^2+24t\quad (t>0)$

Ta có: $h'(t)=-t^2+10t+24$

$h'(t)=0\Leftrightarrow -t^2+10t+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=12\\ t=-2\in(0;+\infty)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

t	0		12		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		$\nearrow$	$h_{\max}$	$\searrow$	

Để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Ví dụ 3. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F(x)=\frac{1}{40}x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

Lời giải

Xét hàm số : $F(x)=\frac{1}{40}x^2(30-x) \qquad (0<x<30)$.

$\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{40}\left(-3x^2+60x\right)$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{40}\left(-3x^2+60x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in(0;30) \\ x=20 \end{array}\right.$

BBT.

x	0		20		$+\infty$
F'(x)		+	0	-	
F(x)		$\nearrow$	100	$\searrow$	

Ta có huyết áp giảm nhiều nhất $\Leftrightarrow F(x)$ lớn nhất trên $(0;+\infty)$. Dựa vào BBT ta thấy $\underset{(0;+\infty)}{\text{Max}}\, F(x)=F(20)=100$ nên liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là $x=20$.

Ví dụ 4. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t)=\frac{t}{t^2+1}\ (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Lời giải

Xét hàm số $c(t)=\frac{t}{t^2+1}$, $(t>0)$.

$c'(t)=\frac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}$.

$c'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$.

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Với $t=1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bênh nhân cao nhất.

Ví dụ 5. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là $300km$. Vận tốc của dòng nước là $6km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\left(km/h\right)$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E\left(v\right)=cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. $12km/h$. **B.** $6km/h$. **C.** $15km/h$. **D.** $9km/h$.

Lời giải

Chọn D

Vận tốc của cá bơi khi ngược dòng là: $v-6$ (km/h).

Thời gian để cá bơi vượt khoảng cách 300km là $t=\dfrac{300}{v-6}$.

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là**:**

$E\left(v\right)=cv^3.\dfrac{300}{v-6}=300c.\dfrac{v^3}{v-6}\left(jun\right), v>6$.

$E'\left(v\right)=600cv^2\dfrac{v-9}{\left(v-6\right)^2}\Leftrightarrow E'\left(v\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0\left(loai\right)\\v=9\end{array}\right.$.

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

$\Rightarrow E_{\min}\Leftrightarrow v=9$

DẠNG 2: TÌM GTLN, GTNN TRONG LĨNH VỰC SẢN XUẤT, KINH DOANH.

Ví dụ 1. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu.

Lời giải

Gọi x (lít) $\left(0<x<10\right)$ là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10-x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{32}{x}+\dfrac{72}{10-x}$, $x\in\left(0;10\right)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Xét hàm số $f(x)$ ta có: $f'\left(x\right)=-\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{72}{\left(10-x\right)^2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{72}{(10-x)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-20 \notin (0;10) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=\dfrac{32}{x}+\dfrac{72}{10-x}$, $x\in(0;10)$

x	0		4		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta có sau ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Ví dụ 2. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2.000.000$ đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê, mỗi căn hộ thêm 50.000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

A. $115.250.000$. **<u>B</u>.** $101.250.000$. **C.** $100.000.000$. **D.** $100.250.000$.

Lời giải

Chọn B

Ở tháng thu nhập của công ty cao nhất, gọi số căn hộ bị bỏ trống là x thì số tiền thuê mỗi phòng là $2.000.000+50.000x$, khi đó số tiền thu được là

$f(x)=(2.000.000+50.000x)(50-x)=-50.000x^2+500.000x+100.000.000$.

Ta cần tìm $x\in(0;50)$ để $f(x)$ lớn nhất.

Ta có $f'(x)=-100.000x+500.000$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=5$

Bảng biến thiên

x	0		5		50
y'		$+$	0	$-$	
y	$100.000.000$	$\nearrow$	$101.250.000$	$\searrow$	0

Vậy mỗi tháng lợi nhuận cao nhất thu được của công ty là $101.250.000$

Ví dụ 3. Một xưởng in có 15 máy in được cài đặt tự động và giám sát bởi một kỹ sư, mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong 1 giờ, chi phí cài đặt và bảo dưỡng cho mỗi máy in cho 1 đợt hàng là 48.000 đồng, chi phí trả cho kỹ sư giám sát là 24.000 đồng/giờ. Đợt hàng này xưởng in nhận 6000 ấn phẩm thì số máy in cần sử dụng để chi phí in ít nhất là

<u>A</u>. 10 máy. **B.** 11 máy. **C.** 12 máy. **D.** 9 máy.

Lời giải

<u>Chọn A</u>

Gọi x $(0<x<15)$ là số máy in cần sử dụng để in lô hàng.

Chi phí cài đặt và bảo dưỡng là $48000x$.

Số giờ in hết số ấn phẩm là $\dfrac{6000}{30x}$, chi phí giám sát là $\dfrac{6000}{30x}.24000+\dfrac{48000}{x}$.

Tổng chi phí in là $P(x)=48000x+\dfrac{4800000}{x}$.

$P'(x) = 48000 - \dfrac{4800000}{x^2}$; $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -10\ (L) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		15
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$\searrow$	$P(10)$	$\nearrow$	

Vậy chi phí in nhỏ nhất là 10 máy.

Ví dụ 4. Một cửa hàng cà phê sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sa khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20.000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18.000 đồng. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi cốc cà phê với giá bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất?

A. 22.000 đồng. **B.** 25.000 đồng. **C.** 31.000 đồng. **D.** 29.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: + Gọi $x (x \geq 20.000)$ là giá một cốc cà phê, $(0 < y \leq 2.000)$ là số cốc cà phê bán trong một tháng.

+ Vì nếu bán với giá 20.000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc nên ta có $\dfrac{x-20000}{y-2000} = \dfrac{21000-20000}{1900-2000} \Leftrightarrow \dfrac{x-20000}{y-2000} = -10 \Leftrightarrow x = 40000 - 10y$.

+ Ta lại có lợi nhuận là: $L = xy - 18000y = (40000-10y)y - 18000y = 22000y - 10y^2$

$L = 22000 - 20y$ $L = 0 \Leftrightarrow y = 1100(tm) \Rightarrow x = 29.000(tm)$.

Cách 2: Gọi số tiền tăng là x (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được tính theo hàm số sau:

$f(x) = (20+x)(2-0,1x) - 18(2-0,1x) = (2-0,1x)(2+x) = -0,1x^2 + 1,8x + 4$.

$f'(x) = -0,2x + 1,8$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9$.

Lập BBT ta thấy được tại $x = 9$ thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất, hay lợi nhuận cao nhất.

Vậy số tiền bán để đạt lợi nhuận cao nhất là: 20+9=29 nghìn.

Ví dụ 5. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Số con cá phải thả trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất là

A. 15. **B.** 12. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải

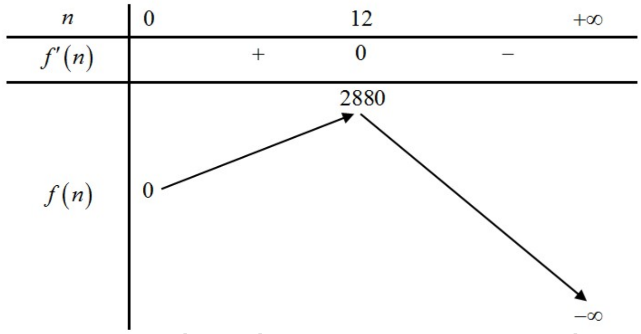
Chọn B

Cân nặng của n con cá là : $f(n) = n.P(n) = 480n - 20n^2$.

Xét hàm số $f(n) = -20n^2 + 480n$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(n) = -40n + 480 = 0 \Leftrightarrow n = 12$.

Lập bảng biến thiên :

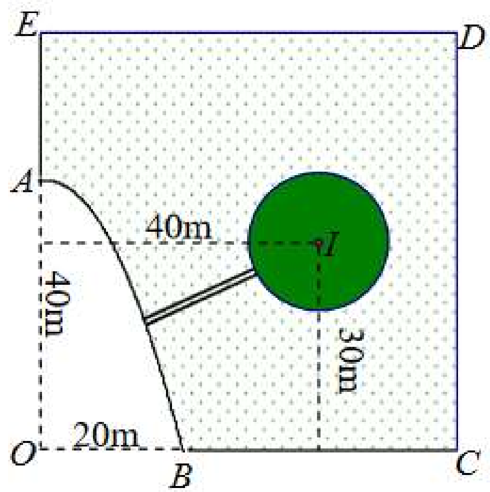


Vậy thu hoạch sản lượng cá nhiều nhất thì phải thả trên mặt hồ 12 con cá.

DẠNG 3: TÌM GTLN, GTNN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH HỌC PHẲNG

Ví dụ 1. Một cái ao hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính $10\,\text{m}$. Người ta muốn bắc một câu cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết :

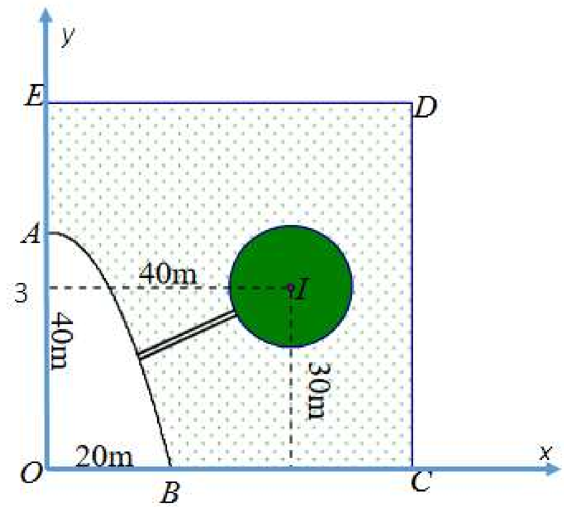
- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là $40\,\text{m}$ và $20\,\text{m}$;
- Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách đường thẳng AE và BC lần lượt $40\,\text{m}$ và 30 m.



A. $l \approx 17,7\,\text{m}$. **B.** $l \approx 25,7\,\text{m}$. **C.** $l \approx 27,7\,\text{m}$. **D.** $l \approx 15,7\,\text{m}$.

Lời giải :

Chọn A



Gán trục tọa độ Oxy sao cho $\begin{cases} A \in Oy \\ B \in Ox \end{cases}$ cho đơn vị là 10m.

Khi đó mảnh vườn hình tròn có phương trình $(C):(x-4)^2+(y-3)^2=1$ có tâm $I(4;3)$

Bờ AB là một phần của Parabol $(P): y=4-x^2$ ứng với $x \in [0;2]$

Vậy bài toán trở thành tìm MN nhỏ nhất với $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (C) \end{cases}$.

Đặt trường hợp khi đã xác định được điểm N thì $MN+MI \geq IM$, vậy MN nhỏ nhất khi $MN+MI=IM \Leftrightarrow N$; M ; I thẳng hàng.

Bây giờ, ta sẽ xác định điểm N để IN nhỏ nhất

$N \in (P) \Leftrightarrow N(x;4-x^2)$ $IN=\sqrt{(4-x)^2+(1-x^2)^2}$ $\Leftrightarrow IN^2=(4-x)^2+(1-x^2)^2$

$\Leftrightarrow IN^2=x^4-x^2-8x+17$

Xét $f(x)=x^4-x^2-8x+17$ trên $[0;2]$ $\Leftrightarrow f'(x)=4x^3-2x-8$

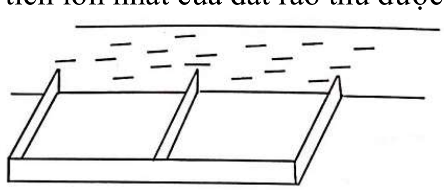
$f'(x)=0$ $\Leftrightarrow x \approx 1,3917$ là nghiệm duy nhất và $1,3917 \in [0;2]$

Ta có $f(1,3917)=7,68$; $f(0)=17$; $f(2)=13$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0;2]$ gần bằng $7,68$ khi $x \approx 1,3917$

Vậy $\min IN \approx \sqrt{7,68} \approx 2,77$ $\Leftrightarrow IN=27,7$m $\Leftrightarrow MN=IN-IM=27,7-10=17,7$m.

Ví dụ 2. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



A. $3125\,m^2$. **B.** $50\,m^2$. **C.** $1250\,m^2$. **D.** $6250\,m^2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$).
Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).

Số tiền phải làm là: $x.3.50000 + y.60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \dfrac{500 - 5x}{2}$.

Diện tích đất: $S = x.y = x.\dfrac{500-5x}{2} = 250x - \dfrac{5}{2}x^2$

Ta có: $S' = 250 - 5x$.

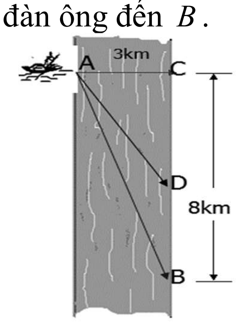
$S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

x	0		50		$+\infty$
S'		+	0	−	
S	0	↗	6250	↘	$-\infty$

Vậy: $\max\limits_{(0;+\infty)} S = 6250\ (m^2)$ khi $x = 50$.

Ví dụ 3. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{73}}{6}$. **D.** $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

❍ Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

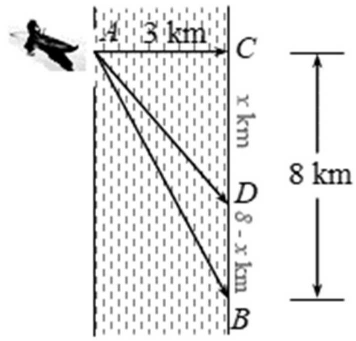
Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AC: $\dfrac{3}{6} = 0,5$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường CB: $\dfrac{8}{8} = 1$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là 1,5 (giờ).

❍ Cách 2: chèo trực tiếp trên quãng đường $AB = \sqrt{3^2+8^2} = \sqrt{73}$ mất $\dfrac{\sqrt{73}}{6} \approx 1^h 26'$.

❍ Cách 3:



Gọi $x\ (\text{km})$ là độ dài quãng đường BD; $8-x\ (\text{km})$ là độ dài quãng đường CD.

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD=\sqrt{x^2+9}$ là: $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\dfrac{8-x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\dfrac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0;\,8)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\dfrac{1}{8}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9}=4x\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{9}{\sqrt{7}}$		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\frac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

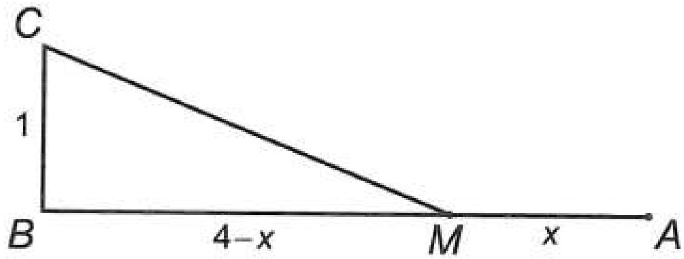
Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1^{\text{h}}20'$.

Ví dụ 4. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 1 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 4km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

A. 120 triệu đồng **B.** 164,92 triệu đồng **C.** 114,64 triệu đồng **D.** 106,25 triệu đồng

Hướng dẫn giải



Gọi M là điểm trên đoạn thẳng AB để lắp đặt đường dây điện ra biển nối với điểm C

Đặt $AM = x \Rightarrow BM = 4 - x \Rightarrow CM = \sqrt{1+(4-x)^2} = \sqrt{17-8x+x^2}, x \in [0;4]$

Khi đó tổng chi phí lắp đặt là $y = x.20 + 40\sqrt{x^2-8x+17}$ (đơn vị: triệu đồng)

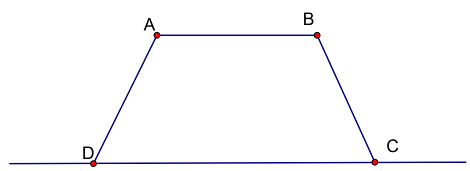
$y' = 20 + 40.\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+17}} = 20.\dfrac{\sqrt{x^2-8x+17}+2(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-8x+17} = 2(4-x) \Leftrightarrow x = \dfrac{12-\sqrt{3}}{3}$

Ta có $y\left(\dfrac{12-\sqrt{3}}{3}\right) = 80 + 20\sqrt{3} \approx 114,64; y(0) = 40\sqrt{17} \approx 164,92; y(4) = 120$

Do đó chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc là 114,64 triệu đồng. **Chọn C**

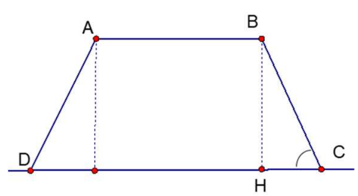
Ví dụ 5. Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



A. $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$. **C.** $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ đường cao BH, gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x \in (0°;90°)$.

Diện tích mảnh vườn là:

$S = \dfrac{1}{2}BH(AB+CD) = \dfrac{1}{2}BC.\sin x(2.AB + 2BC.\cos x) = \dfrac{1}{2}AB^2(2\sin x + \sin 2x)$

Xét hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ với $x \in (0^0;90^0)$ có $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -1\end{array}\right.$

Do $x\in\left(0^0;90^0\right)$ nên ta nhận $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=60^0$. Ta có bảng biến thiên:

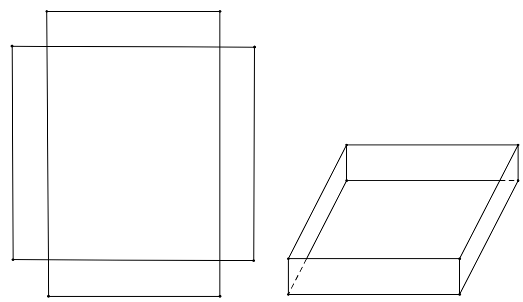
x	0^0		60^0		90^0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\max\limits_{\left(0^0;90^0\right)} f(x)\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được tại $x=60^0$.

$\Rightarrow \max S=108\sqrt{3}\left(m^2\right)$ khi góc ở đáy CD của hình thang bằng 60^0 $\left(\widehat{C}=\widehat{D}=60^0\right)$.

DẠNG 4: TÌM GTLN, GTNN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN.

Ví dụ 1. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=\frac{8-2\sqrt{21}}{3}$ **B.** $x=\frac{10-2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $x=\frac{9+\sqrt{21}}{9}$. **D.** $x=\frac{9-\sqrt{21}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có : $h=x\ (cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là:
$10-2x\ (cm)$ và $8-2x\ (cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S=(10-2x)(8-2x)\left(cm^2\right)$. Ta có:

$$\begin{cases} x>0 \\ 10-2x>0 \\ 8-2x>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ x<4 \end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;4)$$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.(10-2x).(8-2x)$

Xét hàm số: $y=x.(10-2x).(8-2x)\ \forall x\in(0;4)$

Ta có : $y'=12x^2-72x+80$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=\frac{9+\sqrt{21}}{3}>4 & (l) \\ x=\frac{9-\sqrt{21}}{3} & (n) \end{array}\right.$$

x	0		$\frac{9-\sqrt{21}}{3}$		4
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

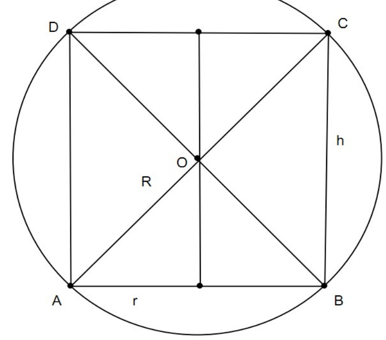
Suy ra với $x=\frac{9-\sqrt{21}}{3}$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất.

Ví dụ 2. Người ta cần chế tạo một ly dạng hình cầu tâm O, đường kính $2R$. Trong hình cầu có một hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Nước chỉ chứa được trong hình trụ. Hãy tìm bán kính đáy r của hình trụ để ly chứa được nhiều nước nhất.

A. $r=\frac{R}{\sqrt{3}}$. **B.** $r=\frac{R\sqrt{6}}{3}$. **C.** $r=\frac{2R}{3}$. **D.** $r=\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B



.

Gọi h và r là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Bài toán quy về việc tính h và r phụ thuộc theo R khi hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong hình tròn (O,R) thay đổi về $V=\pi r^2 h$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $AC^2=AB^2+BC^2 \Leftrightarrow 4R^2=4r^2+h^2$.

$V=\pi\left(R^2-\frac{1}{4}h^2\right)h=\pi\left(-\frac{1}{4}h^3+R^2h\right)\ (0<h<2\mathrm{R})$.

$V'=\pi\left(-\frac{3}{4}h^2+R^2\right)\Leftrightarrow h=\pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

x	0		$\frac{2\mathrm{R}}{\sqrt{3}}$		$2\mathrm{R}$
y'		$+$	0	-	
y					

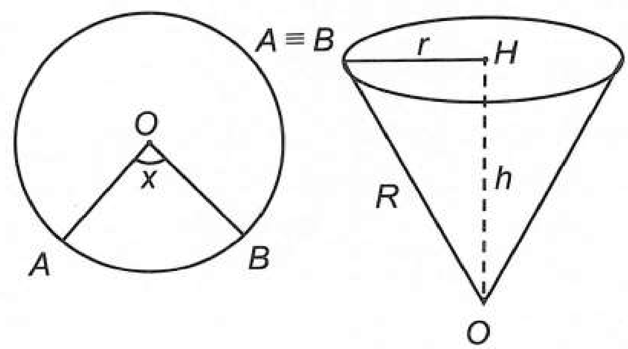
.

Vậy $V=V_{\max}=\frac{4}{9}\pi R^3\sqrt{3}\Leftrightarrow h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Lúc đó $r^2=R^2-\frac{1}{4}.\frac{4\mathrm{R}^2}{3}=\frac{2\mathrm{R}^2}{3}\Rightarrow r=\frac{R\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 3. Bác Hoàng có một tấm thép mỏng hình tròn, tâm O, bán kính 4 dm. Bác định cắt ra một hình quạt tròn tâm O, quấn rồi hàn ghép hai mép của hình quạt tròn lại để tạo thành một đồ vật dạng mặt nón tròn xoay (tham khảo hình vẽ). Dung tích lớn nhất có thể của đồ vật mà bác Hoàng tạo ra bằng bao nhiêu? (bỏ qua phần mối hàn và độ dày của tấm thép)

A. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$



D. $\frac{64\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$

Hướng dẫn giải

Khi hàn hai mép của hình quạt tròn, độ dài đường sinh của hình nón bằng bán kính của hình quạt tròn, tức là $OA = 4dm$

Thể tích của hình nón $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.\left(16-h^2\right).h$ với $0 < h < 4$

Ta có $V'(h) = \frac{1}{3}\pi.\left(16-3h^2\right) \Rightarrow V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

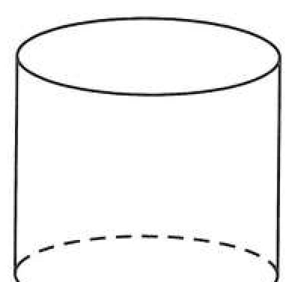
h	0		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		4
$V'(h)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$V(h)$	0	↗	$\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra thể tích lớn nhất của hình nón là $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$. **Chọn A**

Ví dụ 4. Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất

A. $R = \frac{1}{2}m; h = 8m$ **B.** $R = 1m; h = 2m$ **C.** $R = 2m; h = \frac{1}{2}m$ **D.** $R = 4m; h = \frac{1}{5}m$

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết ta có

$V = \pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng phi là

$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi\left(R^2 + \frac{2}{R}\right)$

Xét hàm số $f(R) = R^2 + \frac{2}{R}$ với $R \in (0; +\infty)$

Ta có $f'(R) = 2R - \frac{2}{R^2} = \frac{2\left(R^3-1\right)}{R^2}$

$f'(R)=0 \Leftrightarrow R=1$

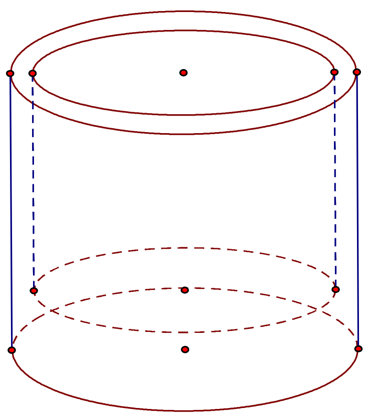
Bảng biến thiên

R	0		1		$+\infty$
$f'(R)$	||	$-$	0	$+$	
$f(R)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi $R=1 \Rightarrow h=2$

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì $R=1m; h=2m$. **Chọn B**

Ví dụ 5. Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày $1,5$ cm, thành xung quanh cốc dày $0,2$ cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là 480π cm^3 thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh ?



A. $75,66\pi$ cm^3. **B.** $80,16\pi$ cm^3. **C.** $85,66\pi$ cm^3. **D.** $70,16\pi$ cm^3.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính và chiều cao hình trụ bên trong lần lượt là $\Rightarrow$, h ta có: $y \Rightarrow h=\dfrac{480}{r^2}$.

Thể tích hình trụ bên ngoài là: $V=\pi(r+0,2)^2.(h+1,5)=\pi(r+0,2)^2.\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right)$.

Thể tích thủy tinh là: $\pi(r+0,2)^2.\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right)-480\pi$.

Xét $f(r)=\pi(r+0,2)^2.\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right)$, $r>0$.

$\Rightarrow f'(r)=2\pi(r+0,2)\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right)+\pi(r+0,2)^2.\left(-\dfrac{960}{r^3}\right)$

$f'(r)=0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right)=(r+0,2).\dfrac{960}{r^3} \Leftrightarrow 3=\dfrac{192}{r^3} \Leftrightarrow r=4$.

r	0		4		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$		$\frac{27783}{50}\pi$		$+\infty$

Vậy thể tích thủy tinh người ta cần ít nhất là $\frac{27783}{50}\pi - 480\pi \approx 75,66\pi \left(\text{cm}^3\right)$.

III. Những lỗi học sinh thường mắc.

- Đặt ẩn phụ không đánh giá đúng điều kiện của ẩn phụ.
- Lập hàm số sai.
- Không đặt điều kiện cho biến số

IV. Hệ thống câu hỏi ôn tập:

Câu 1. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in…) được cho bởi $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ 2018 $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

A. 20.000 đ. **B.** 15.000 đ. **C.** 10.000 đ. **D.** 22.000 đ.

Câu 2. Có hai chiếc cọc cao $10\,m$ và $30\,m$ lần lượt đặt tại hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng $24\,m$. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giang dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?

A. $AM = 4\,m,\ BM = 20\,m.$ **B.** $AM = 12\,m,\ BM = 12\,m.$

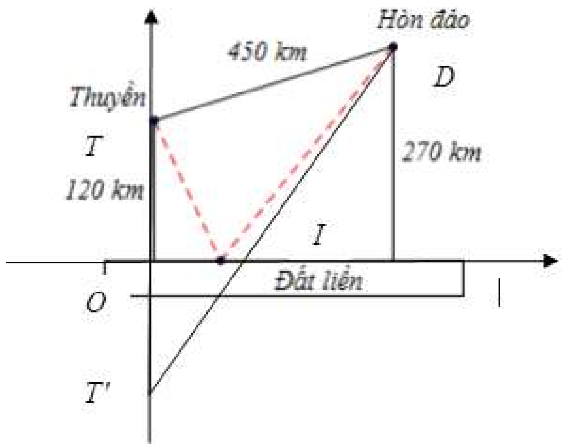
C. $AM = 6\,m,\ BM = 18\,m.$ **D.** $AM = 7\,m,\ BM = 17\,m.$

Câu 3. Trong lĩnh vực thuỷ lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thuỷ động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S, ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thuỷ động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thuỷ động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật)

A. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$ **B.** $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\frac{S}{2}}$

C. $x = \sqrt{2S}, y = \sqrt{\frac{S}{4}}$ **D.** $x = \sqrt{4S}, y = \sqrt{\frac{S}{4}}$

Câu 4. Một con thuyền đang ở ngoài khơi cách đất liền $120km$ và cách hòn đảo $450km.$ Hòn đảo cách đất liền $270km$. Con thuyền cần cập bến để tiếp nhiên liệu rồi mang quà Tết ra đảo. Tìm quãng đường ngắn nhất mà con thuyền đó đi (làm tròn đến hàng đơn vị).



A. 623 km . **B.** 584 km . **C.** 711 km . **D.** 576 km .

Câu 5. Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy hình vuông không nắp có thể tích là 4 lít. Tìm kích thước của hộp đó để lượng vàng dùng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau.

A. Cạnh đáy bằng 3, chiều cao bằng 4. **B.** Cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng 2.

C. Cạnh đáy bằng 4, chiều cao bằng 3. **D.** Cạnh đáy bằng 2, chiều cao bằng 1.

Câu 6. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn đường kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 7. Một trang chữ của một tạp chí cần diện tích là $384cm^2$. Lề trên, lề dưới là 3cm; lề phải, lề trái là 2cm. Khi đó chiều ngang và chiều dọc tối ưu của trang giấy lần lượt là:

A. $24cm,\ 25cm.$ **B.** $15cm,\ 40cm.$

C. $20cm,\ 30cm.$ **D.** $22,2cm,\ 27cm.$

Câu 8. Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4\ \text{m}$ được đặt ở độ cao $1,8\ \text{m}$ so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn ảnh). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Tính khoảng cách từ vị trí đó đến màn ảnh.

A. $2,4\ \text{m}$. **B.** $\frac{84}{193}\ \text{m}$.

C. $1,8\ \text{m}$. **D.** $1,4\ \text{m}$.

Câu 9. Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 *đồng/m*^{2}. Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là.

A. 75 triệu đồng. **B.** 85 triệu đồng.

C. 90 triệu đồng. **D.** 86 triệu đồng.

Câu 10. Một người bán buôn Thanh Long Đỏ ở Chợ Đọ- Bắc Ninh nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 nghìn $/\text{kg}$ thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 nghìn $/\text{kg}$ thì khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó khách lại mua ít hơn mức trung bình $5\ \text{kg}$, và như vậy cứ giảm giá 2000 nghìn $/\text{kg}$ thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó khách lại mua nhiều hơnmức trung bình $5\ \text{kg}$. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 nghìn $/\text{kg}$. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

A. 16000 nghìn $/\text{kg}$.
B. 24000 nghìn $/\text{kg}$.
C. 22000 nghìn $/\text{kg}$.
D. 12000 nghìn $/\text{kg}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Câu 1.

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $T(x)=C(x)+0,4x=0,0001x^2+0,2x+10000$.

$M(x)=\dfrac{T(x)}{x}=0,0001x+\dfrac{10000}{x}+0,2\geq 2+0,2=2,2$ vạn đồng $=22.000$ đồng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 0,0001x=\dfrac{10000}{x} \Leftrightarrow x=10000$.

Câu 2.

Chọn C

Đặt $AM=x(0<x<24)\Rightarrow BM=24-x$. Ta có

$CM=\sqrt{CA^2+AM^2}=\sqrt{x^2+100}$

$MD=\sqrt{MB^2+BD^2}=\sqrt{(24-x)^2+900}$.Suy ra tổng độ dài hai sợi dây là:

$CM+MD=\sqrt{(24-x)^2+900}+\sqrt{x^2+100}=f(x),(0<x<24)$

Khảo sát hàm ta được: $x=6(m)=>BM=18(m)$.

Câu 3.

Chọn A

Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương. Theo bài ra ta có: S = xy;

$\ell=2y+x=\dfrac{2S}{x}+x$. Xét hàm số $\ell(x)=\dfrac{2S}{x}+x$. Ta có $\ell'(x)=\dfrac{-2S}{x^2}+1=$

$\dfrac{x^2-2S}{x^2}$.

$\ell'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2S=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2S}$, khi đó y = $\dfrac{S}{x}=\sqrt{\dfrac{S}{2}}$.

Dễ thấy với x, y như trên thì mương có dạng thuỷ động học, vậy các kích thước của mương là $x=\sqrt{2S}$, y = $\sqrt{\dfrac{S}{2}}$ thì mương có dạng thuỷ động học.

Câu 4.

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi vị trí thuyền và đảo lần lượt là $T; D.$.

Gọi T' là điểm đối xứng với T qua trục $Ox.$.

Khi đó quãng đường thuyền phải đi là: $TI+ID=T'I+ID$ ngắn nhất là $T'D$.

Ta có: $T'(0;-120); D\left(\sqrt{450^2-150^2};270\right) \Rightarrow T'D = 576.$

Câu 5.

Chọn D

Gọi x là cạnh của đáy hộp.

h là chiều cao của hộp.

$S(x)$ là diện tích phần hộp cần mạ.

Khi đó, khối lượng vàng dùng mạ tỉ lệ thuận với S(x).

Ta có: $S(x) = x^2 + 4xh(1)$; $V = x^2h = 4 \Rightarrow h = 4/x^2 (2)$..

Từ (1) và (2), ta có $S(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.

Dựa vào BBT, ta có $S(x)$ đạt GTNN khi $x = 2$.

Câu 6.

Chọn A

Độ dài đoạn dây bằng 60cm, cạnh hình vuông bằng a, bán kính đường tròn bằng r nên ta có: $4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow r = \frac{30-2a}{\pi}(1)$.

Gọi S là tổng diện tích của hình vuông và hình tròn, suy ra $S = a^2 + \pi r^2 (2)$.

Thay (1) vào (2) ta được $S = a^2 + \frac{(30-2a)^2}{\pi}$.

Khi đó $S' = 2a - \frac{4(30-2a)}{\pi} = \frac{(2\pi+8)a-120}{\pi}$.

Cho $S' = 0 \Leftrightarrow a = \frac{60}{\pi+4}$.

Bảng biến thiên.

x	0		$\frac{60}{\pi+4}$		60
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy S nhỏ nhất khi $a = \frac{60}{\pi+4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi+4}$. Vậy $\frac{a}{r} = 2$

Câu 7.

Chọn C

Gọi $a, b(cm)(a > 0, b > 0)$ là độ dài chìu dọc và chìu ngang của trang chữ suy ra kích thước trang giấy là $a+6, b+4$

Ta có: $a.b = 384 \Rightarrow b = \frac{384}{a}(1)$

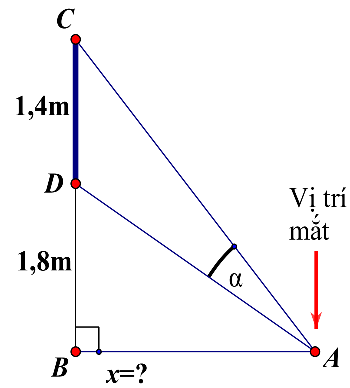
Diện tích trang sách là: $S = (a+6)(b+4) \Leftrightarrow S = 4a + \frac{2304}{a} + 408$

Theo bất đẳng thức CAUCHY ta có: $\Leftrightarrow S \geq 2\sqrt{4a.\frac{2304}{a}} + 408 = 600$

Suy ra $MinS = 600 \Leftrightarrow 4a = \dfrac{2304}{a} \Leftrightarrow a = 24$, suy ra chiều dọc và chiều ngang tối ưu là: $30cm, 20cm$

Câu 8.

Chọn A



☑ Đặt $AB = x$ là khoảng cách cần tìm (hình vẽ) ta có:

$BC = BD + DC = 1,8m + 1,4m = 3,2m$.

$AD = \sqrt{x^2 + (1,8)^2}$, $AC = \sqrt{x^2 + (3,2)^2}$.

Áp dụng hệ quả của định lý Cô-Sin cho tam giác ACD ta có:

$$\cos\alpha = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD.AC} = \frac{x^2 + (1,8)^2 + x^2 + (3,2)^2 - (1,4)^2}{2\sqrt{x^2 + (1,8)^2}\sqrt{x^2 + (3,2)^2}}.$$

$$= \frac{x^2 + (2,4)^2}{\sqrt{x^2 + (1,8)^2}\sqrt{x^2 + (3,2)^2}}$$

Sử dụng chức năng CALC trên máy tính cầm tay bấm SHIFT $\to$ cos :

$\cos^{-1}\left(\dfrac{x^2 + 2.4^2}{\sqrt{x^2 + 1.8^2}\sqrt{x^2 + 3.2^2}}\right)$ lần lượt thử các phương án ta thấy khi $x = 2,4m$ thì góc α lớn nhất.

Câu 9.

Chọn A

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x(m)$ và $h(m)$ là chiều cao bể. Bể có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}m^3 \Leftrightarrow 2x^2h = \dfrac{500}{3} \Leftrightarrow h = \dfrac{250}{3x^2}$..

Diện tích cần xây là: $S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x\dfrac{250}{3x^2} + 2x^2 = \dfrac{500}{x} + 2x^2$..

Xét hàm $S(x) = \dfrac{500}{x} + 2x^2, (x > 0) \Rightarrow S'(x) = \dfrac{-500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Lập bảng biến thiên suy ra $S_{\min} = S(5) = 150$..

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min} = 150$..

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là: $150.500000 = 75000000$ đồng.

Câu 10.

Chọn C

Gọi $2000x$ nghìn $/\text{kg}$ là mức giá thay đổi tăng hoặc giảm so với giá bán bình quân.

Giá bán sau khi thay đổi là $20000+2000x$ nghìn $/\text{kg}$.

Số lượng người mua sau khi thay đổi giá là $90-x$.

Khối lượng khách mua trung bình sau khi giảm giá là $60-5x$ kg.

Số tiền thuế phải nộp sau khi thay đổi giá: $2200(90-x)(60-5x)$.

Số tiền thu được sau khi thay đổi giá là

$T(x)=(90-x)(60-5x)(20000+2000x)-2200(90-x)(60-5x)$

$=(17800+2000x)(90-x)(60-5x)=\left(10x^3-931x^2+1722x+96120\right).1000$.

Điều kiện $\begin{cases} x\le 90 \\ x\le 12 \\ x\ge 8,9 \end{cases} \Leftrightarrow 8,9\le x\le 12$.

Ta có $T'(x)=\left(30x^2-1862x+1722\right).1000$.

$T'(x)=0 \Leftrightarrow 15x^2-931x+861=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 0,94(N) \\ x\approx 61,13(L) \end{array}\right.$.

$T\left(\dfrac{89}{10}\right)=T(12)=0$, $T(0,94)=96924000$

Do đó $x\approx 1$ thì lợi nhuận cao nhất.

Do đó giá bán tốt nhất là 22000 nghìn $/\text{kg}$.