

Chủ đề 2. TỌA ĐỘ VECTO' TRONG KHÔNG GIAN

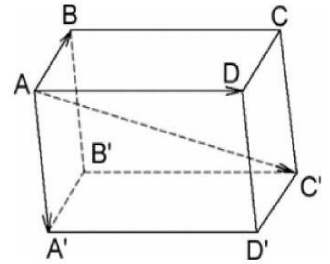
Bài 5. CÂU TOÁN VỀ VECTO' VÀ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. VECTO' TRONG KHÔNG GIAN

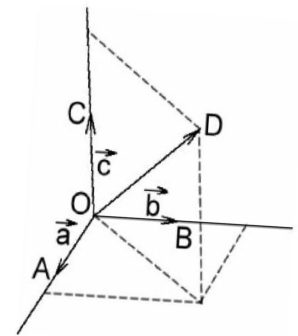
1) Quy tắc hình hộp:

Nếu hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có ba cạnh xuất phát từ A là AB, AD, AA' và có đường chéo là AC' thì khi đó ta có quy tắc hình hộp là:

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$$


2) Phân tích một vectơ theo 3 vectơ không đồng phẳng:

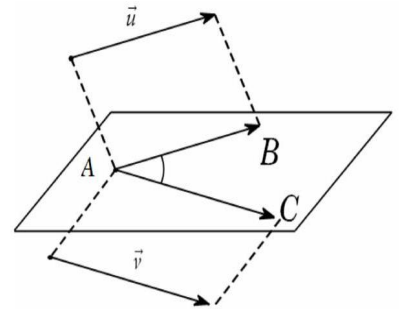
Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng a, b, c . Khi đó với mọi vectơ x ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $x = ma + nb + pc$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.



3) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:

a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho u và v là hai vectơ khác 0 . Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\vec{AB} = u, \vec{AC} = v$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ ($0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$) là góc giữa hai vectơ u và v trong không gian, kí hiệu là (u, v) .



b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Tích vô hướng của hai vectơ u và v là một số, được ký hiệu $u \cdot v$ và được xác định bởi $u \cdot v = |u| |v| \cos(u, v)$ từ đó suy ra cosin góc giữa hai

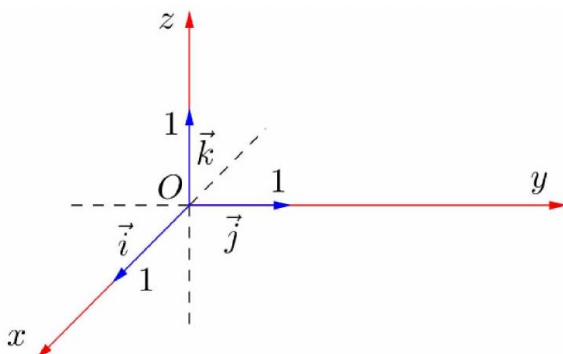
vectơ u và v là

$$\cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{|u| |v|}$$

Đặc biệt khi $u \perp v \Leftrightarrow \cos(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \cdot v = 0$.

II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1) Hệ trục tọa độ:



Trong không gian $Oxyz$, cho vector a . Khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ sao cho:
 $a = a_1i + a_2j + a_3k$

Ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ đó là tọa độ của vector a đối với hệ tọa độ $Oxyz$ cho trước và viết
 $a = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $a(a_1; a_2; a_3)$.

2) Tọa độ vector:

Cho $a = (a_1; a_2; a_3), b = (b_1; b_2; b_3)$

$$\vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3) \text{ với } k \in R$$

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k sao cho

$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$$

Hoặc $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ với $b_1, b_2, b_3 \neq 0$.

+ Tích vô hướng của 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

+ Độ dài vector: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

3) Tọa độ của điểm

Cho ba điểm $A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B); C(x_C; y_C; z_C)$

Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

4) Tích có hướng của 2 vector và ứng dụng:

Trong không gian Oxyz cho hai vector: $a = (a_1; a_2; a_3); b = (b_1; b_2; b_3)$

Vector tích có hướng của a và b là: $\vec{[a, b]} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

Vector tích có hướng của a và b là:

*Chú ý: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

a) Tính chất:

a cùng phương $b \Leftrightarrow [a, b] = 0$

$[a, b] \perp a, b$

a, b, c đồng phẳng $\Leftrightarrow [a, b] \cdot c = 0$

b) Ứng dụng:

Diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [AB, AC]$

Thể tích tứ diện: $V_{A-BCD} = \frac{1}{6} [AB, AC] \cdot AD$

Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = [AB, AD] \cdot AA'$

5) Phương trình mặt cầu:

a) **Định nghĩa 1:** Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

***Chú ý:** Phương trình mặt cầu tâm $O(0; 0; 0)$ bán kính R có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

b) **Định nghĩa 2:** Mỗi phương trình có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

6) Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

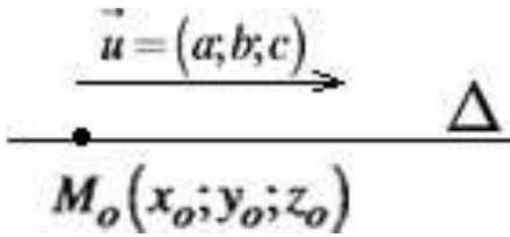
+ Cho mặt phẳng (α) đi qua $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và có vector pháp tuyến $n = (A; B; C)$.

+ Phương trình tổng quát của (α) là: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$

hay: $Ax + By + Cz + D = 0$

7) Phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ qua $M_o(x_o; y_o; z_o)$
VTCP $u = (a; b; c)$



$$\Delta: \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_o + ct \end{cases}$$

- Phương trình tham số:

• Phương trình chính tắc: $\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$ với $a; b; c \neq 0$.

PHẦN B. CÂU TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Theo định luật II Newton: gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $F = ma$, trong đó $a \text{ (m/s}^2\text{)}$ là vector gia tốc, $F \text{ (N)}$ là vector lực tác dụng lên vật, $m \text{ (kg)}$ là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5 \text{ kg}$ một gia tốc 100 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có $F = ma$ suy ra $F = ma = 0,5 \cdot 100 = 50 \text{ (N)}$.

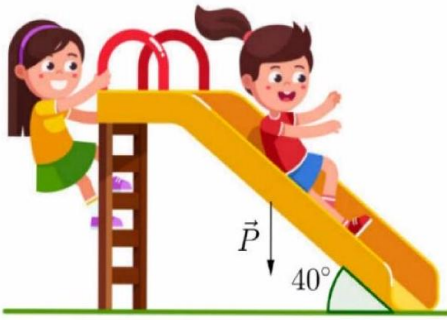
Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5 \text{ kg}$ một gia tốc 100 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là 50 N .

Câu 2. Một em bé cân nặng $m = 20 \text{ kg}$ trượt trên cầu thang trượt dài 2 m . Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 40° .

a) Tính độ lớn của trọng lực $P = mg$ tác dụng lên em bé, biết $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.

b) Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực F có độ dịch chuyển d được tính theo công thức

$A = F \cdot d$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực P khi em bé trượt hết chiều dài cầu trượt (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

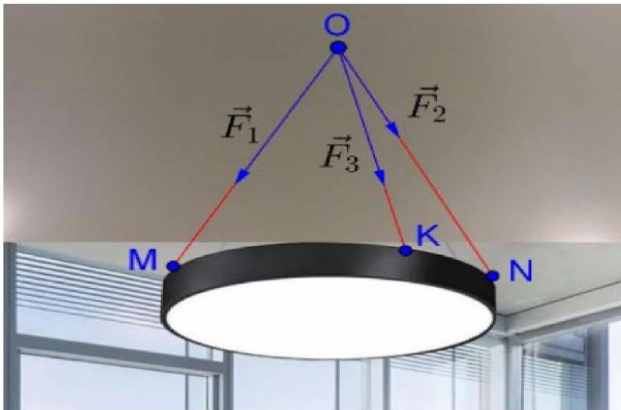
a) Ta có $P = mg$ suy ra $P = mg = 20 \cdot 10 = 200 \text{ (N)}$.

Vậy trọng lực tác dụng lên em bé là 200 N.

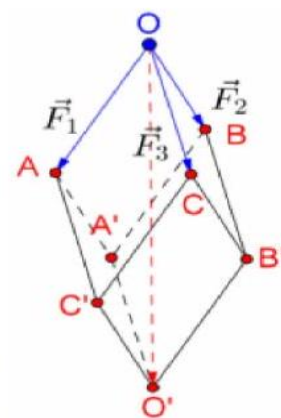
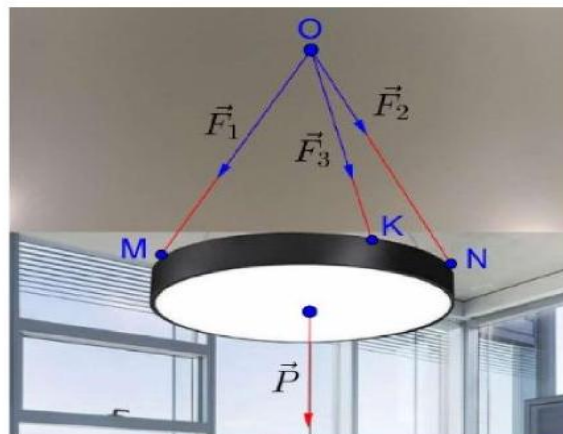
b) Ta có $A = P \cdot s \cdot \cos(P, s) = 200 \cdot 2 \cdot \cos 80^\circ \approx 69 \text{ (J)}$.

Vậy công sinh bởi trọng lực P khi em bé trượt hết chiều dài cầu trượt là 306 J.

Câu 3. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm M, N, K trên đường tròn sao cho lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OM, ON, OK đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 20\sqrt{3} \text{ (N)}$. Tính trọng lượng của chiếc đèn đó.



Lời giải



Gọi A, B, C lần lượt là các điểm sao cho $\vec{OA} = \vec{F}_1, \vec{OB} = \vec{F}_2, \vec{OC} = \vec{F}_3$. Lấy các điểm A', B', C', O' sao cho $\vec{OAC'C} \cdot \vec{BA'O'B'}$ là hình hộp. Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp, ta có:
 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OO'}$

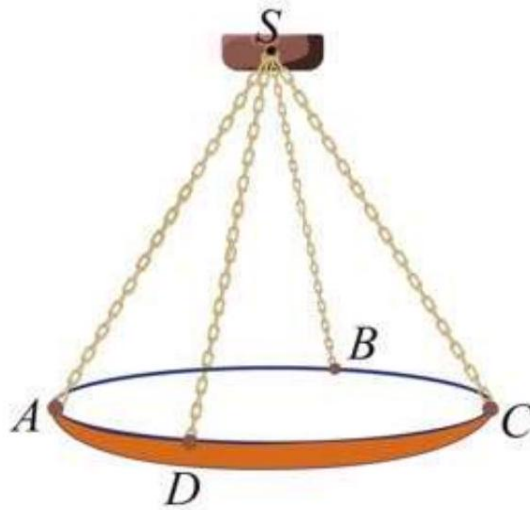
Mặt khác lực các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ đôi một vuông góc nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 20\sqrt{3} \text{ (N)}$ nên hình hộp $\vec{OAC'C} \cdot \vec{BA'O'B'}$ có ba cạnh $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ đôi một vuông góc nhau và bằng nhau. Vì thế hình lập phương $\vec{OAC'C} \cdot \vec{BA'O'B'}$ có độ dài cạnh bằng $20\sqrt{3}$ suy ra độ dài đường chéo $\vec{OO'} = 20\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$, ở đó P là trọng lượng tác dụng lên chiếc đèn.

Vậy trọng lực của chiếc đèn là $P = |\vec{P}| = |\vec{OO'}| = 20\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 60 \text{ (N)}$.

Câu 4. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 8 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}, \vec{SD}$ sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\angle ASC = 60^\circ$ (Hình).

Biết $P = mg$ trong đó g là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $9,8 \text{ m/s}^2$, P là trọng lực tác động vật có đơn vị là N , m là khối lượng của vật có đơn vị kg . Tính độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích (tính chính xác đến hàng phần mười).



Lời giải

Ta có $P = 8 \cdot 9,8 = 78,4 \text{ N}$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SA = SB = SC = SD$

Mà $\angle ASC = 60^\circ \Rightarrow$ Tam giác SAC đều

Gọi O là trung điểm AC .

Ta có: Hợp lực của 4 sợi xích là: $\vec{F} = \vec{SA} + \vec{SC} + \vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO} + 2\vec{SO} = 4\vec{SO}$

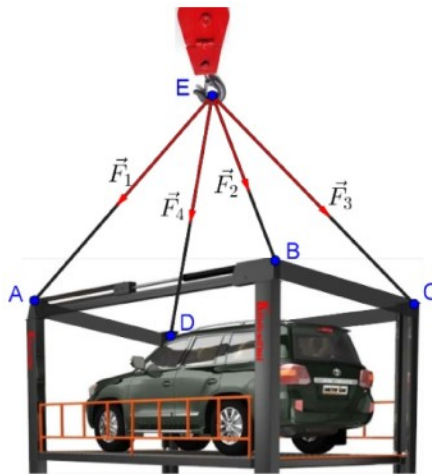
Để đèn chùm đứng yên thì hợp lực của các sợi xích phải cân bằng với trọng lực hay $4\vec{SO} = \vec{P}$ hay $4SO = P \Leftrightarrow SO = 19,6$

$$SAC : SA = \frac{\sqrt{3}}{2} SO = \frac{19,6 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 17$$

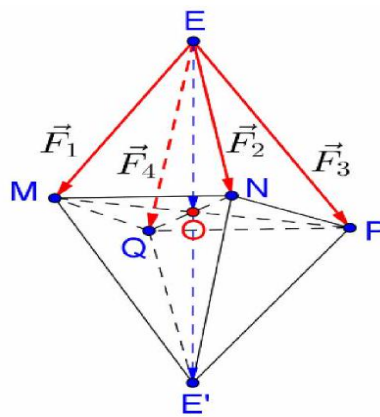
Xét tam giác đều

Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là 17 N .

Câu 5. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° (Hình 4). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $5000\sqrt{3} \text{ (N)}$ và trọng lượng của khung sắt là 3000 (N) .



Lời giải



Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm sao cho

$$\vec{EM} = \vec{F}_1, \vec{EN} = \vec{F}_2, \vec{EP} = \vec{F}_3, \vec{EQ} = \vec{F}_4$$

Gọi O là giao điểm của MP và NQ , E' là điểm đối xứng của E qua O , ta có:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = 5000\sqrt{3} \text{ (N)}$$

các mặt bên của hình chóp $E.MNPQ$ là tam giác cân bằng nhau.

Vì các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° nên các tam giác $\triangle MEP, \triangle NEQ$ là tam giác đều, bằng nhau.

$$EO = \frac{EM \sqrt{3}}{2} = \frac{5000\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 7500 \text{ (N)}$$

Suy ra:

$$P = (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) + (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) = \vec{EE'} + \vec{EE'} = 2\vec{EE'} = 4\vec{EO}$$

Mặt khác:

$$P = 4EO = 4.7500 = 30000 \text{ (N)}$$

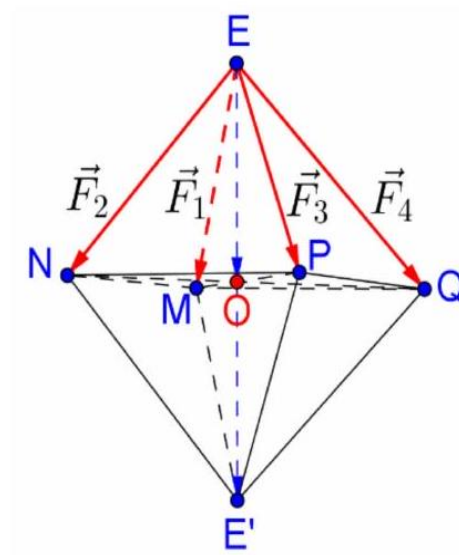
Suy ra

$$\text{Vậy trọng lượng của chiếc xe là: } 30000 - 3000 = 27000 \text{ (N)}$$

Câu 6. Một kiện hàng có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$. Kiện hàng đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° (Hình 5). Chiếc cần cẩu kéo kiện hàng lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của kiện hàng (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng F_1, F_2, F_3, F_4 đều có cường độ là $1000\sqrt{2} \text{ (N)}$



Lời giải



Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm sao cho $EM = F_1, EN = F_2, EP = F_3, EQ = F_4$

Gọi O là giao điểm của MP và NQ, E' là điểm đối xứng của E qua O , ta có:

$|F_1| = |F_2| = |F_3| = |F_4| = 1000\sqrt{2} \text{ (N)}$
các mặt bên của hình chóp $E.MNPQ$ là tam giác đều bằng nhau.

Vì các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° nên các tam giác $\triangle MEP, \triangle NEQ$ là tam giác cân, bằng nhau.

$$EO = EN \cdot \sin 45^\circ = 1000\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1000 \text{ (N)}$$

Suy ra:

$$P = (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) + (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) = \vec{EE'} + \vec{EE'} = 2\vec{EE'} = 4\vec{EO}$$

Mặt khác:

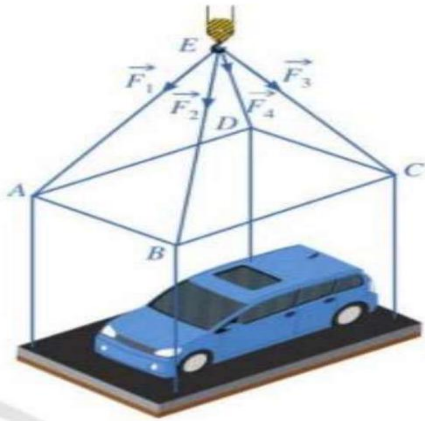
$$P = 4 \cdot OE = 4 \cdot 1000 = 4000 \text{ (N)}$$

Suy ra

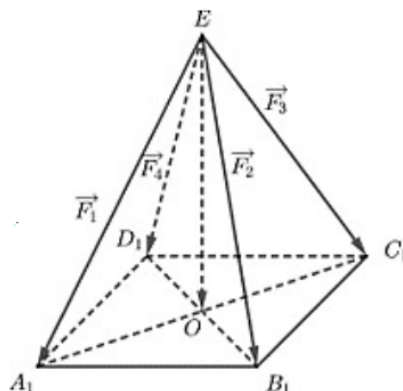
$$4000 \text{ (N)}$$

Vậy trọng lượng của kiện hàng là

Câu 7. Một chiếc ô tô Hyundai Grand i10 được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 45° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết khối lượng chiếc xe ô tô Hyundai grand i10 là 1051 kg và trọng lượng khung sắt là 2490 N; cường độ các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ là bằng nhau. Tính cường độ lực căng F_1 (tính chính xác đến hàng phần mười).



Lời giải



Ta đơn giản hoá mô hình Câu toán thông qua hình vẽ sau ($\vec{EO}$ cùng hướng với vector trọng lực của ô tô và khung sắt).

Trọng lượng xe bằng 10510 N.

Theo giả thiết ta có $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4| = 13000$

Mặt khác $\left| \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} \right| = \left| \overrightarrow{4EO} \right| = 4EO$

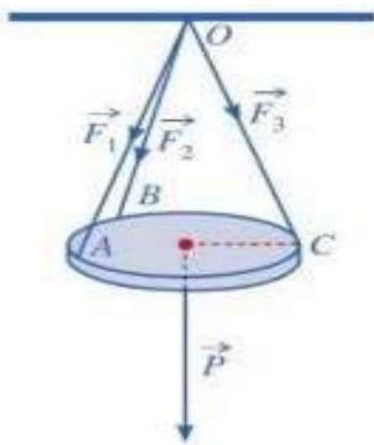
Suy ra $EO = 3250$

Ta có $(ED, (ABCD)) = EDO = 45^\circ$

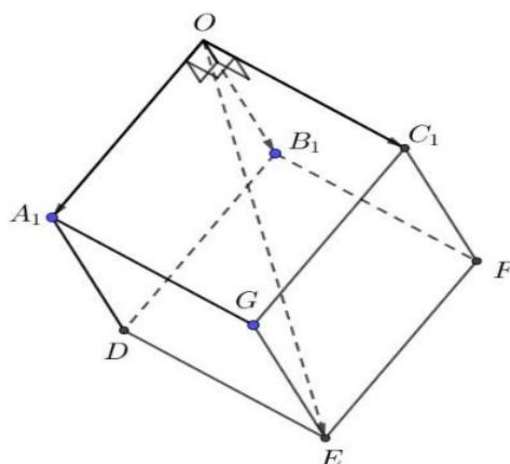
$\Rightarrow ED = \frac{EO}{\sin 45^\circ} = 3250 \cdot \sqrt{2} \approx 4596,2$

Cường độ lực căng F_1 là $4596,2 \text{ N}$

Câu 8. Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng F_1, F_2, F_3 lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|F_1| = |F_2| = |F_3| = 20 \text{ (N)}$ (xem hình vẽ). Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó (tính chính xác đến hàng phần mười).



Lời giải



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$

Dựng hình hộp $OA_1GC_1 \cdot B_1DEF$

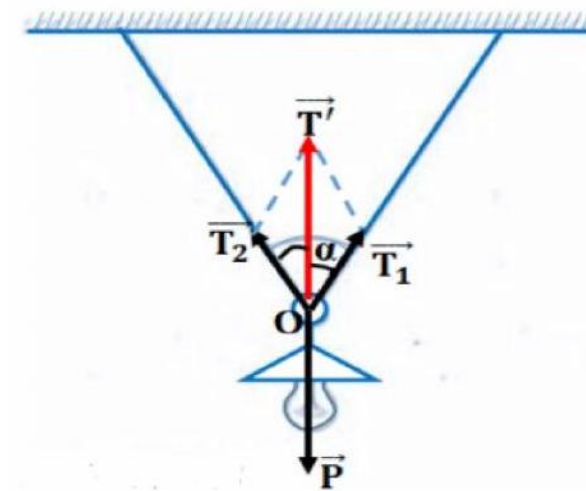
Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OE}$

Vì các lực căng F_1, F_2, F_3 đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $|F_1| = |F_2| = |F_3| = 20 \text{ (N)}$ nên hình hộp $OA_1GC_1 \cdot B_1DEF$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Do đó $OA_1GC_1 \cdot B_1DEF$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 20. Suy ra độ dài đường chéo bằng $20\sqrt{3} \approx 34,6$. Vậy trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó bằng 34,6 N.

Câu 9. Người ta treo một bóng đèn có khối lượng $m = 1 \text{ kg}$ bằng cách luồn sợi dây qua một cái móc của đèn và hai đầu dây được gắn chặt trên trần nhà. Hai nửa sợi dây có chiều dài bằng nhau và hợp với nhau một góc bằng 60° . Tính lực căng của mỗi nửa sợi dây là bao nhiêu? Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Lời giải



Ta có $P = mg$ nên $P = |P| = m|g| = 10 \text{ N}$

Bóng đèn ở vị trí cân bằng nên $P + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$ hay $P = \vec{T}'$ với $T_1 + T_2 = T'$.

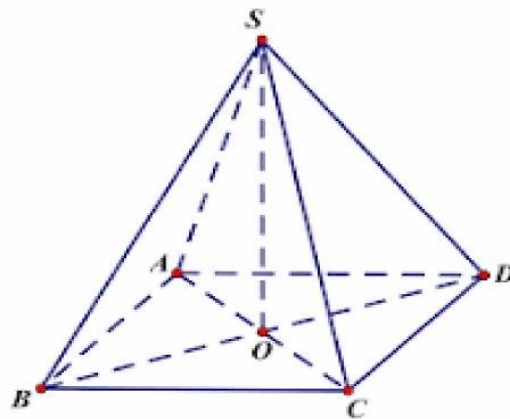
Suy ra $T' = P = 10 \text{ N}$. Vì $T_1 = T_2$ và $(T_1, T_2) = 60^\circ$ nên $\frac{T'}{2} = T_1 \cdot \cos(30^\circ) \Rightarrow T_1 = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10. Người ta vận chuyển một thùng hàng có dạng hình hộp chữ nhật bằng cách móc 4 dây cáp vào 4 góc trên của thùng hàng và đầu còn lại móc vào cần cẩu như hình vẽ. Biết rằng các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau là 60° . Chiếc cần cẩu kéo thùng hàng lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng F_1, F_2, F_3, F_4 chịu được tối đa lực căng là 5000 N. Hỏi cần cẩu

nâng được thùng hàng có khối lượng (đơn vị kg) tối đa là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$



Lời giải



Theo hình vẽ ta có các vector $\vec{AS}, \vec{BS}, \vec{CS}, \vec{DS}$ biểu thị các lực căng F_1, F_2, F_3, F_4 .

Khi đó $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{AS} + \vec{BS} + \vec{CS} + \vec{DS}$

$$= -(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}) = -((\vec{SA} + \vec{SC}) + (\vec{SB} + \vec{SD})) = -(2\vec{SO} + 2\vec{SO}) = -4\vec{SO}$$

Vì các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau là 60°

nên $\triangle SAC$ cân và $\angle ASC = 60^\circ$ do đó $\triangle SAC$ tam giác đều suy ra $SO = SA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4| = 4SO = 4 \cdot SA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot 5000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10000\sqrt{3} \text{ N}$

$$P = mg \Rightarrow P = m \cdot g = 10m$$

Để cần cẩu nâng được thùng hàng thì

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4| \geq P \Rightarrow 10000\sqrt{3} \geq 10m \Rightarrow m \leq 1000\sqrt{3} \text{ kg.}$$

Vậy $m \leq 1732 \text{ kg}$

Câu 11. Một sân Tennis với hệ trục tọa độ $Oxyz$ được chọn như hình bên dưới (Hình 1).

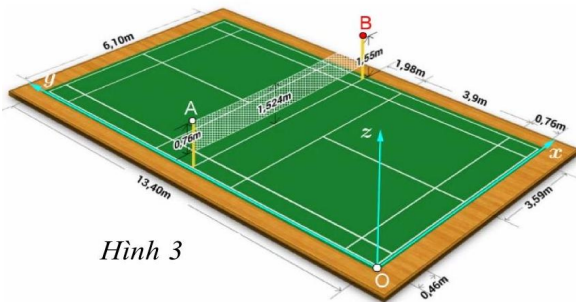
- a) Mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?
b) Trục Oz có vuông góc với mặt sân không?



Lời giải

- a) Sân nằm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) .
b) Trục Oz vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) nên trục Oz vuông góc với mặt sân.

Câu 12. Một sân cầu lông có kích thước cho trong hình bên dưới (Hình 3), với hệ trục tọa độ $Oxyz$ được đã chọn. Em hãy xác định tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$.



Hình 3

Lời giải

Ta thấy chiều dài và chiều rộng của sân cầu lông có kích thước lần lượt là 13,40 m và 6,10 m, chiều cao của các cột có đỉnh tại điểm A và B cùng bằng 1,55 m. Trong hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta có:

$$A(0; 6,7; 1,55), B(6,10; 6,7; 1,55)$$

Khi đó $\overrightarrow{AB} = (6,1; 0; 0)$.

Câu 13. Một căn phòng với hệ trục tọa độ $Oxyz$ được chọn như hình bên dưới (Hình 2).

Em hãy cho biết mặt bên phải (nơi ánh sáng chiếu vào) của căn phòng nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?

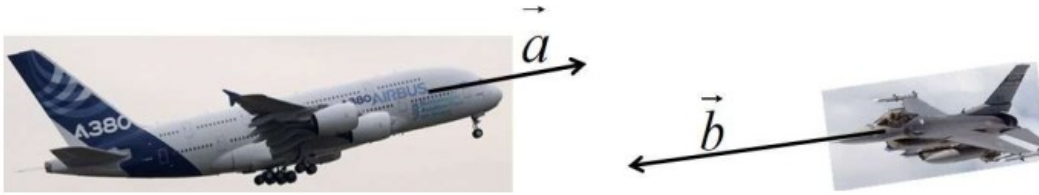


Lời giải

Mặt bên phải (nơi ánh sáng chiếu vào) của căn phòng nằm trong mặt phẳng (Oyz) .

Câu 14. Cho biết máy bay Airbus chở hành khách đang bay với vector vận tốc $a = (300; -200; 400)$

(đơn vị: km/h). Một máy bay quân sự B bay ngược hướng và có tốc độ gấp 3 lần tốc độ của máy bay A .



a) Tìm tọa độ vector vận tốc b của máy bay B .

b) Tính tốc độ của máy bay B .

Lời giải

a) Vì máy bay B bay ngược hướng và có tốc độ gấp 3 lần tốc độ của máy bay A nên $b = -3a$.

Do đó: $b = (-3 \cdot 300; -3 \cdot (-200); -3 \cdot 400)$ hay $b = (-900; 600; -1200)(\text{km/h})$.

b) Trong một giờ, quãng đường máy bay B di chuyển được là:

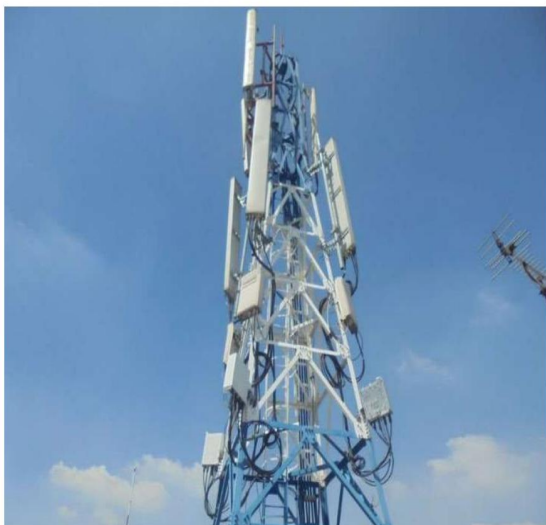
$$|b| = \sqrt{(-900)^2 + 600^2 + (-1200)^2} \approx 1615,55 (\text{km})$$

Vậy vận tốc của máy bay B xấp xỉ $1615,55 \text{ km/h}$.

Câu 15. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt ở vị trí $I(1; -2; -3)$ và được thiết kế bán kính phủ sóng là 5000 m.

a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian.

b) Nhà bạn Minh Hiền và bạn Trúc Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1; 2; 0)$ và $N(-3; 1; 0)$. Hỏi Minh Hiền và Trúc Linh dùng điện thoại tại nhà thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?



Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$$

b) Ta có: $IM = \sqrt{(1-1)^2 + (2+2)^2 + (0+3)^2} = 5$

Vì $IM = R = 5$ nên điểm $M(1; 2; 0)$ nằm trên mặt cầu. Vậy bạn Minh Hiền có thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Ta có: $IN = \sqrt{(-3-1)^2 + (1+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{34} > 5$

Vì $IN > R$ nên điểm $N(-3; 1; 0)$ nằm ngoài mặt cầu. Vậy bạn Trúc Linh không thể sử dụng dịch vụ của trạm này.

Câu 16. Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thổi xôi,... Bác An tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 5 \text{ m}$ và $AD = 12 \text{ m}$. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác An xây vị trí B thấp hơn vị trí A là 5 cm , vị trí D thấp hơn vị trí A là 8 cm . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ để xác định xem vị trí C thấp hơn vị trí A bao nhiêu cm? (làm tròn đến cm).



Lời giải

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{500^2 - 5^2} \approx 500 \text{ cm}$$

$$AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{1200^2 - 8^2} \approx 1200 \text{ cm}$$

Dựa vào hình vẽ ta có: $A(0; 0; 0); B(500; 0; -5); D(0; 1200; -8)$

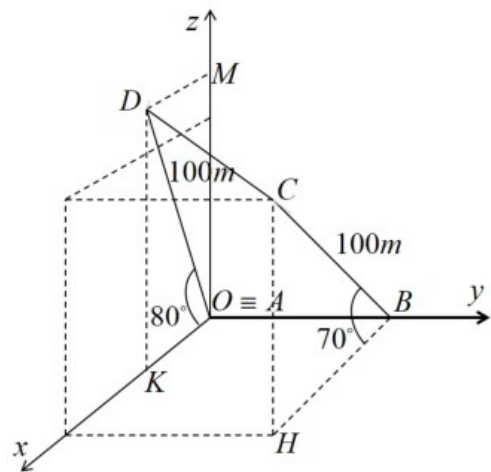
$$\overrightarrow{AD} = (0; 1200; -8); \overrightarrow{BC} = (x_C - 500; y_C; z_C + 5)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_C - 500 = 0 \\ y_C = 1200 \\ z_C + 5 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 500 \\ y_C = 1200 \\ z_C = -13 \end{cases} \Rightarrow C(500; 1200; -13)$$

Vậy vị trí C thấp hơn vị trí A là 13 cm .

Câu 17. Vào dịp tết Nguyên Đán, một số thành phố thường tổ chức bắn pháo hoa. Có 2 ống bắn pháo hoa A và B được đặt trong 2 mặt phẳng song song với nhau và cách nhau 2 m , ng bắn A đặt nghiêng so với mặt đất một góc 80° và ống bắn B nghiêng so với mặt đ t một góc 70° . Hai pháo A và B được bắn đồng thời và cùng đi được quãng đường 100 m thì nổ. Người ta tính toán rằng để tạo ra hiệu ứng đẹp nhất thì vị trí nổ của 2 quả pháo A và B không cách

nhau quá 50 m . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Hỏi với cách đặt vị trí như trên thì khi nổ, hai quả pháo A và B cùng nổ có tạo ra hiệu ứng đẹp nhất chưa? (ta xem như 2 quả pháo hoa bắn theo đường thẳng và tốc độ bay như nhau).



Lời giải

$$\sin \angle OKD = \frac{DK}{DO} \Rightarrow DK = 100 \cdot \sin 80^\circ \approx 98,5 \text{ m}$$

$$\cos \angle OKD = \frac{OK}{DO} \Rightarrow OK = 100 \cdot \cos 80^\circ \approx 17,4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow D(17,4; 0; 98,5)$$

$$\sin \angle BHC = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH = 100 \cdot \sin 70^\circ \approx 94 \text{ m}; \cos \angle BHC = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = 100 \cdot \cos 70^\circ \approx 34,2 \text{ m}$$

$$\Rightarrow C(34,2; 4; 94)$$

Vậy với cách đặt vị trí như trên thì khi nổ hai quả pháo A và B cùng nổ tạo ra hiệu ứng đẹp nhất.

Câu 18. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng radar của nước X được đặt trên bán đảo Y ở vị trí $I(-2; 1; -1)$ và được thiết kế phát hiện máy bay của địch ở khoảng cách tối đa 500 km .

- Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian.
- Hai chiếc máy bay do thám của hai nước A và B đang bay ở vị trí có tọa độ lần lượt là $M(-200; 100; -250)$ và $N(350; -100; 300)$. Hỏi radar của nước X có thể phát hiện ra hai chiếc máy bay do thám của nước A và B không?

Lời giải

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của radar trong không gian là:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 250000$$

b) Ta có $IM = \sqrt{(-200+2)^2 + (100-1)^2 + (-250+1)^2} \approx 335,6 < 500$

Vì $IM < R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu. Vậy chiếc máy bay do thám của nước A có thể bị phát hiện bởi trạm radar này.

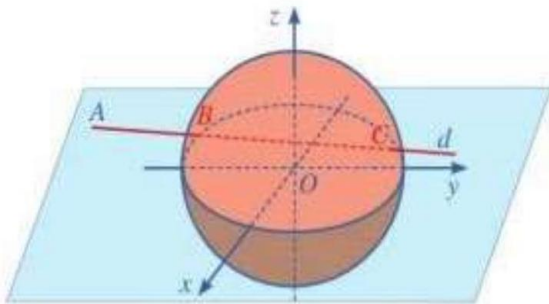
Ta có: $IN = \sqrt{(350+2)^2 + (-100-1)^2 + (300+1)^2} \approx 474 < 500$

Vì $IN < R$ nên điểm N nằm trong mặt cầu. Vậy chiếc máy bay do thám của nước B có thể bị phát hiện bởi trạm radar này.

Câu 19. Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay Cam Ranh - Khánh Hòa ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km. Một máy bay của hãng Việt Nam Airlines đang chuyển động theo đường thẳng d có

phương trình
$$\begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



a) Sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian.

b) Xác định quãng đường mà máy bay nhận được tín hiệu của đài kiểm soát không lưu.

c) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với đài kiểm soát không lưu.

Lời giải

c) Ranh giới vùng phủ sóng của đài kiểm soát không lưu là mặt cầu (S) tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R = 600$ km.

Vậy: $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 600^2$

$d: \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -200 + 80t \\ z = 10 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) Thay

vào $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 600^2$

Ta có: $(S): (100t - 1000)^2 + (80t - 200)^2 + 10^2 = 600^2$

$$\Leftrightarrow 16400t^2 - 232000t + 680100 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 10 \Rightarrow A(0;600;10) \\ t \approx 4,15 \Rightarrow B(-585;132;10) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(-585 - 0)^2 + (132 - 600)^2 + (10 - 10)^2} \approx 749 \text{ km}$$

Vậy quãng đường mà máy bay nhận được tín hiệu của đài kiểm soát không lưu khoảng 768 km.

c) Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(-292,5;366;10)$

Khoảng cách ngắn nhất giữa máy bay với trạm kiểm soát không lưu là:

$$OI = \sqrt{(-292,5)^2 + (366)^2 + 10^2} \approx 469 \text{ km}$$

