

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên, đồ thị của hàm số y, y'

- Định lý cực trị

□ **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

□ **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$

đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$

đạt **cực đại** tại điểm x_0 .

□ **Định lý 3:** Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

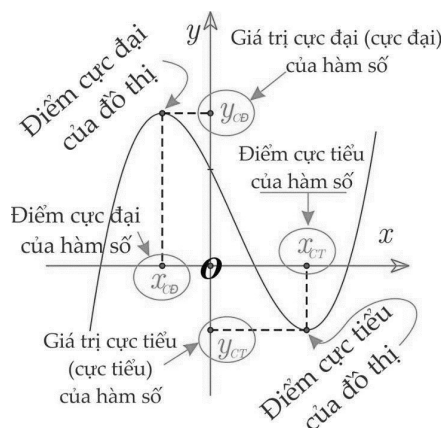
Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

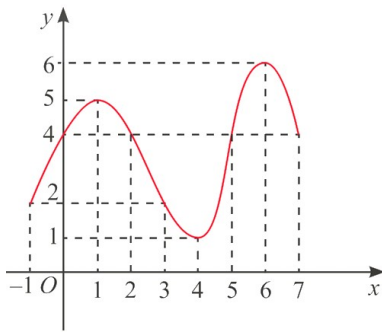
□ Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$ (hay y_{CD} hoặc y_{CT}). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

□ Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$$



Câu 1. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho ở Hình.



Câu 2. Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-1; 4)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	-1	1	2	3	4
$f'(x)$		-	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

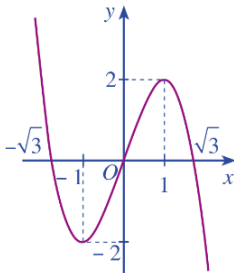
$x_0 = 2$ là điểm cực tiểu hay điểm cực đại của hàm số đã cho? Tìm giá trị cực trị tương ứng.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$

Xác định các cực trị của hàm số $f(x)$.

Câu 4. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở Hình, hãy chỉ ra các điểm cực trị của hàm số đó.



Dạng 2. Tìm cực trị của hàm số khi biết y, y'

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

🔧 **Phương pháp:** Sử dụng 2 quy tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dung định lý 1

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dung định lý 2

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

- + Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
- + Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Câu 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Câu 6. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

Câu 7. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$.

Câu 8. Tìm điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.

Câu 9. Tìm điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xác định số điểm cực trị của hàm số đã cho

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Dạng 3. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m?$

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\begin{cases} y'' > 0 \rightarrow x_0 = CT \\ y'' < 0 \rightarrow x_0 = CD \end{cases}$

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 13. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019) Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

Câu 14. (THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2 - 2019) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + (3m-1)x^2 + m^2x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Dạng 4. Tìm m để hàm số có n cực trị

□ Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.

□ Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

+ Hàm số có hai điểm cực trị khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$

+ Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

□ Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.

+ Hàm số có ba cực trị khi $ab < 0$. + Hàm số có 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

Câu 15. (Chuyên Sơn La - Lần 2 - 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-3)x^2 + m + 1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu

- Câu 16.** (Quang Trung - Bình Phước - Lần 5 - 2019) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị
- Câu 17.** (THPT Ba Đình 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu?
- Câu 18.** (THPT Yên Định Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

Dạng 5. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'

- Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.
- Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

- Câu 19.** (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc- 2018) Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Viết phương trình đường thẳng AB
- Câu 20.** (Mã 104 - 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- Câu 21.** (Lương Văn Chánh - Phú Yên – 2018) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m + 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Dạng 6. Tìm m để hàm số bậc 3 có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

★ **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

🔧 **Phương pháp:**

— **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases}$ và giải hệ này sẽ tìm được $m \in D_1$.

— **Bước 3.** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo Viét, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

// **Lưu ý:**

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

- Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x; m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và B .
 - Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.
- Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

- Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.
- Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**cùng phía, khác phía d**):

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d .
- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d .

Trường hợp đặc biệt:

- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.
- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhằm được nghiệm).

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**đối xứng và cách đều**):

★ **Bài toán 1.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Gọi $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ
$$\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2.$$

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ **Bài toán 2.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

□ **Lưu ý:** Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB .

- Câu 22.** Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?
- Câu 23.** (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.
- Câu 24.** (Chuyên Hạ Long 2019) Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?
- Câu 25.** (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số; gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .
- Câu 26.** (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ khi $m = a$ và $m = b$. Hãy tính tổng $a + b$.

Dạng 7. Tìm m để hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước
Một số công thức tính nhanh “thường gặp”
 liên quan cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

1 cực trị: $ab \geq 0$		3 cực trị: $ab < 0$	
$a > 0$: 1 cực tiểu	$a < 0$: 1 cực đại	$a > 0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi $\angle BAC = \alpha$, luôn có: $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán kính

đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$

- Câu 27.** (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m + 4$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?
- Câu 28.** (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.
- Câu 29.** (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5) Tìm tất cả các giá trị m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng 120° .
- Câu 30.** (CHUYÊN ĐHSPTN - 2018) Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC
- Câu 31.** (Liên Trường - Nghệ An -2018) Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.
- Câu 32.** (THPT Triệu Thị Trinh - 2018) Cho hàm số: $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị lập thành tam giác có một góc bằng 120° .
- Câu 33.** Hãy tìm tất cả của tham số e để hàm số $y = 3x^4 + 2x^3 + ex$ có đúng ba điểm cực trị

Dạng 8. Tìm m để hàm số bậc 2 trên bậc 1 có cực trị thỏa mãn yêu cầu bài toán

- Câu 34.** (ĐHQG Hà Nội - 2020) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu
- Câu 35.** (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{2x - 2m}$ có cực đại và cực tiểu

Dạng 9. Bài toán cực trị hàm số chứa dấu tuyệt đối

Bài toán: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

$$y = f(x) = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$$

(Áp dụng định nghĩa).

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f'(x) = 0(2) \end{cases}$$

Số nghiệm của ⁽¹⁾ chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành $y = 0$. Còn số nghiệm của ⁽²⁾ là số cực trị của hàm số $y = f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra ⁽²⁾. Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của ⁽¹⁾ và ⁽²⁾ chính là số cực trị cần tìm.

- Câu 36. (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị
- Câu 37. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m - 1|$ với m là tham số thực. Tìm số giá trị nguyên trong khoảng $[-2; 2]$ của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị
- Câu 38. (Mã 103 - 2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng 3 điểm cực trị?
- Câu 39. (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2022)** Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-20; 20]$ sao cho hàm số $y = -2x + 2 + a\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại?

Dạng 10. Số điểm cực trị của hàm hợp không chứa dấu GTĐ

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ (Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$). Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u' \cdot f'(u)$

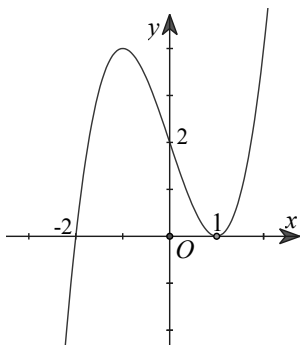
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$$

Bước 2. Giải phương trình

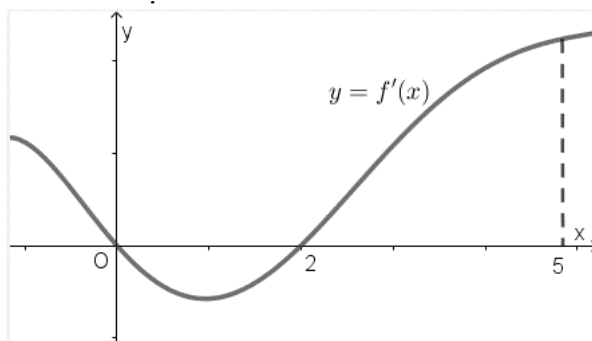
Bước 3. Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

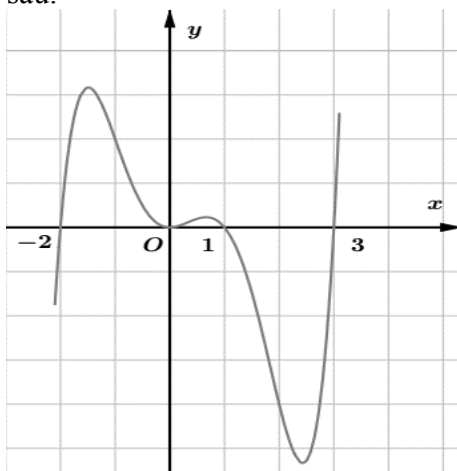
- Câu 40. (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



Câu 41. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$



Câu 42. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu 2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 43. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4[f(x-1)]^2$

Câu 44. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2^{-\frac{1}{x^4}} [f(2x+1)]^3$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

Dạng 11. Số điểm cực trị của hàm hợp chứa dấu GTĐĐ

Bài toán tìm cực trị của hàm số $g(x) = |f[u(x)] + h(x)|$

Bước 1. Tìm cực trị của hàm số $v(x) = f[u(x)] + h(x)$

Bước 2. Sử dụng phương pháp biến đổi đồ thị hàm số trị tuyệt đối để tìm số cực trị của hàm số $g(x)$

Câu 45. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = -\frac{1}{\ln 2}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-4	-1	$-\infty$

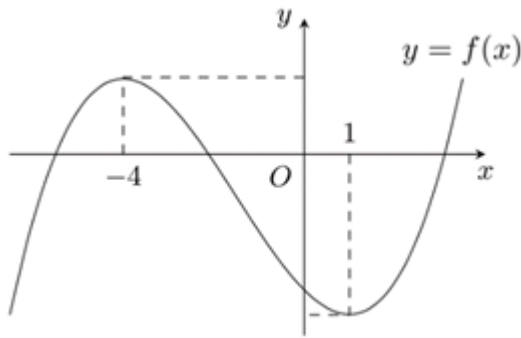
Hàm số $g(x) = \left| f(-x^2) - x^2 + \frac{2x^2}{\ln 2} \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 46. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2021) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1	-3	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(|x^3|) - 3|x|$.

Câu 47. (Cụm Ninh Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 4|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



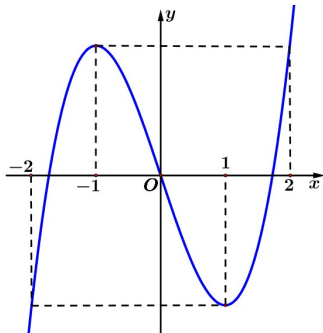
Câu 48. (Sở Quảng Bình - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$, ($a \neq 0$) với các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c > 2019$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x - 2019)|$ với $g(x) = f(x) - 2020$

Câu 49. (Sở Nam Định - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

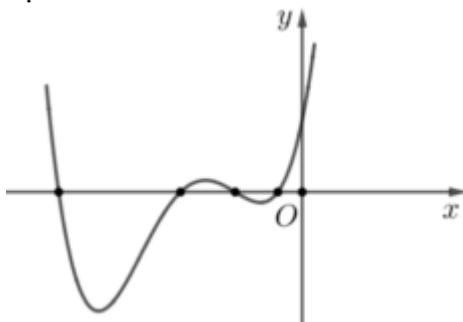
x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = |2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 50. (THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = \sqrt{4 - f^2(x)}$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Câu 51. (Sở Bắc Giang 2022) Biết rằng $f(0) = 0$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x^6) - x^3|$ có bao nhiêu điểm cực đại?

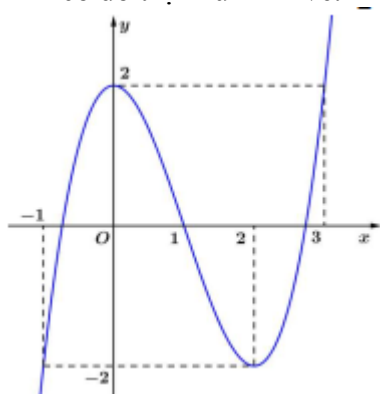


Câu 52. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 2|x| - 4)$

Câu 53. (Sở Thái Nguyên 2022) Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

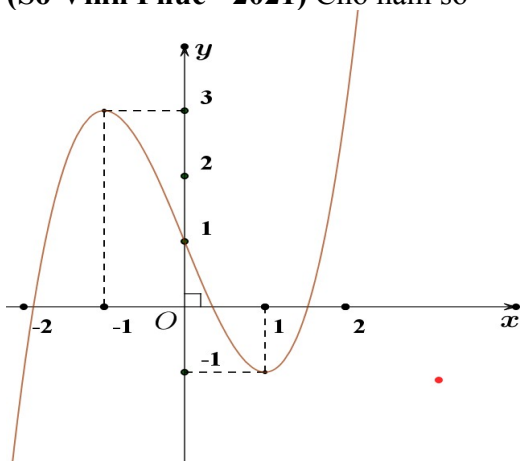


Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$

Dạng 12. Tìm m để hàm số f(u) không chứa dấu GTTĐ thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 54. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - a)(13x - 15)^3$. Tìm tập hợp các giá trị của a để hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right)$ có 6 điểm cực trị

Câu 55. (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10, 10]$ để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 2021$ có đúng 1 cực trị?

Câu 56. (Sở Hưng Yên 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+3)^2(x^2 - x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 6x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Câu 57. (THPT Đồng Lộc - Hà Tĩnh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, và có bảng xét đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$g(x) = f\left(\sqrt{x^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) - m\right)$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có ít nhất 4 điểm cực trị.

Câu 58. (THPT Phan Châu Trinh - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1)$ có đúng 8 cực trị?

Câu 59. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị

Dạng 13. Tìm m để hàm số f(u) chứa dấu GTTĐ thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 60. (Mã 102 - 2021 Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-8)(x^2 - 9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

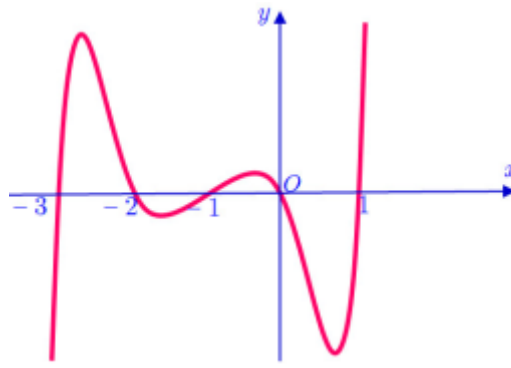
Câu 61. (Chuyên Bắc Giang - Lần 4 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Câu 62. (Chuyên Long An - 2021) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây

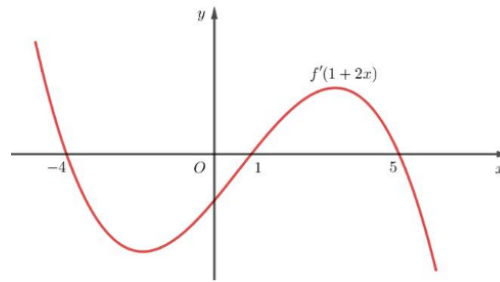
x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-4	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(|6x - 5|) + 2021 + m|$ có 3 điểm cực đại?

Câu 63. (Đại học Hồng Đức 2022) Cho hàm đa thức $y = [f(x^2 + 2x)]'$ có đồ thị cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m với $2022m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2|x-1| - 2x + m)$ có 9 điểm cực trị?



Câu 64. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (a \neq 0)$, hàm số $y = f'(1+2x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 5 điểm cực trị?