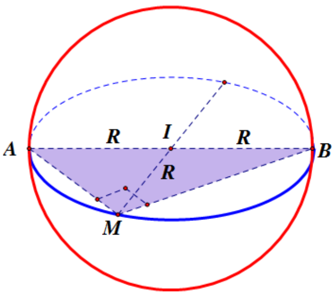
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

MẶT CẦU

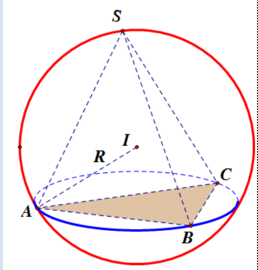


☞**Hình thành:** Quay đường tròn tâm I, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$ quanh trục AB, ta có mặt cầu như hình vẽ.

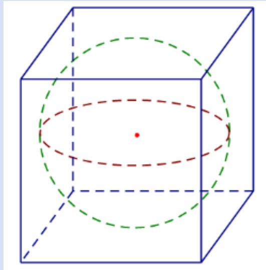
Một số công thức:

- **Tâm I, bán kính** $R=IA=IB=IM$.
- **Đường kính** $AB=2R$.
- **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm I, bán kính R.
- **Diện tích** mặt cầu: $\boxed{S=4\pi R^2}$.
- **Thể tích** khối cầu: $\boxed{V=\dfrac{4\pi R^3}{3}}$.

Mặt cầu ngoại tiếp đa diện
Mặt cầu nội tiếp đa diện



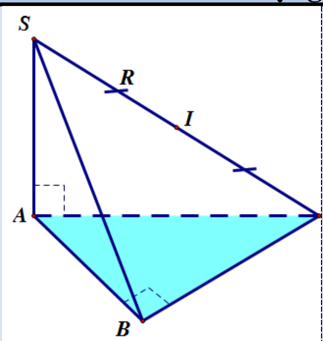
Mặt cầu ngoại tiếp đa diện là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.



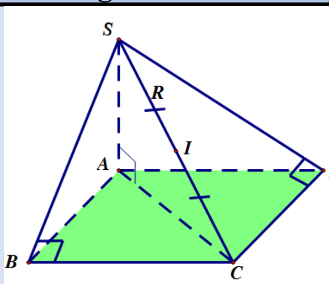
Mặt cầu nội tiếp đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

CÁCH TÌM BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP THƯỜNG GẶP

1. Hình chóp có các đỉnh nhìn một cạnh dưới một góc vuông.



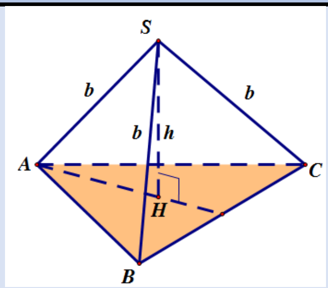
- Xét hình chóp có $SA\perp(ABC)$ và $\widehat{ABC}=90^0$.
- Ta có $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^0$ $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=90^0$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R=\dfrac{SC}{2}}$.



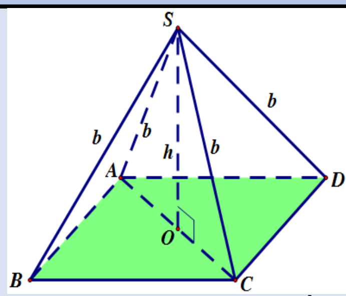
- Xét hình chóp có $SA\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật hoặc hình vuông.
- Ta có: $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=\widehat{SDC}=90^0$

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R=\dfrac{SC}{2}}$.

2. Hình chóp đều.



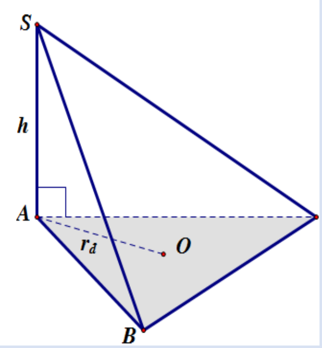
- Xét hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và đường cao $SH=h$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R=\dfrac{b^2}{2h}}$.



- Xét hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao $SO=h$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R=\dfrac{b^2}{2h}}$.

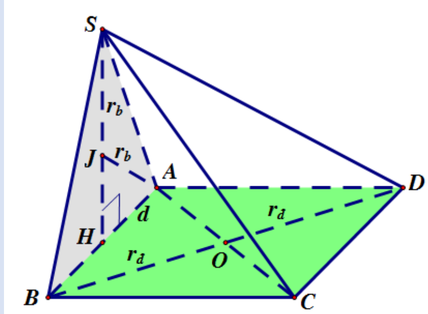
3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy.



- Xét hình chóp có $SA \perp$ (đáy) và $SA = h$; bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là r_d.

- Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $\boxed{R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_d^{\,2}}}$.
- Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Nếu đáy là hình vuông cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Nếu đáy là hình chữ nhật cạnh a, b thì $r_d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.



- Xét hình chóp có mặt bên $(SAB) \perp$ (đáy), bán kính ngoại tiếp đáy là r_d, bán kính ngoại tiếp ΔSAB là r_b, $d = AB = (SAB) \cap$ (đáy). (đoạn giao tuyến)
- Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $\boxed{R = \sqrt{r_d^{\,2} + r_b^{\,2} - \frac{d^2}{4}}}$.

Dạng 1. Khối cầu ngoại tiếp khối lăng trụ

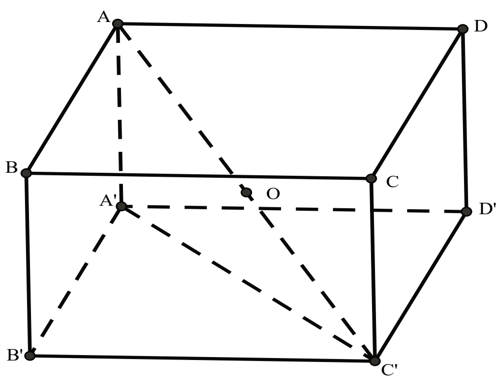
Câu 1. **(THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019)** Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c nội tiếp một mặt cầu. Tính diện tích S của mặt cầu đó

A. $S = 16\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi$. **B.** $S = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi$.

C. $S = 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi$. **D.** $S = 8\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi$.

Lời giải

Chọn B



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $r = OA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là

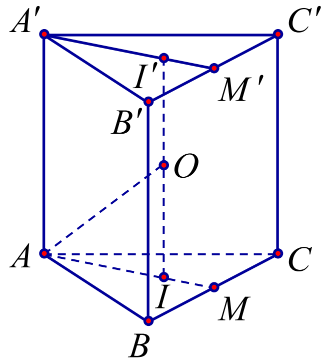
$$S = 4\pi r^2 = 4\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}\right)^2 \pi = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\pi.$$

Câu 2. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối cầu đi qua các đỉnh của lăng trụ.

A. $\frac{1}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$. **B.** $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$.

C. $\frac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + b^2\right)^3}$. **D.** $\frac{\pi}{18\sqrt{2}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là tâm hai đáy, O là trung điểm của II'. Khi đó ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Ta có: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, IO = \dfrac{b}{2}$ suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là

$R = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{b^2}{4}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{4a^2 + 3b^2}$

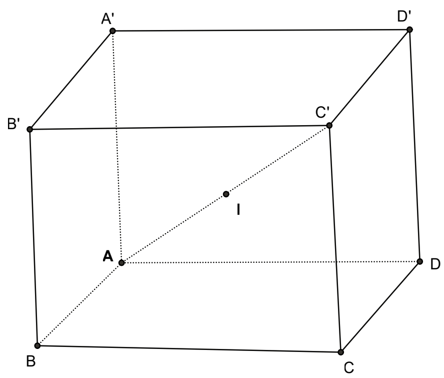
Vậy $V_{(O;R)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}\sqrt{\left(4a^2 + 3b^2\right)^3}$.

Câu 3. Một mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 4a$, $AD = 5a$, $AA' = 3a$. Mặt cầu trên có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$. **B.** $6a$. **C.** $2\sqrt{3}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



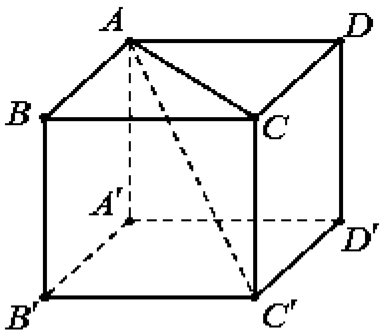
Gọi I là tâm của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp này là $R = IA = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \dfrac{5\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chữ nhật có ba kích thước $1, 2, 3$ là

A. $\dfrac{9\pi}{8}$. **B.** $\dfrac{9\pi}{2}$. **C.** 36π. **D.** $\dfrac{7\sqrt{14}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AC' = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2} = \sqrt{14}$.

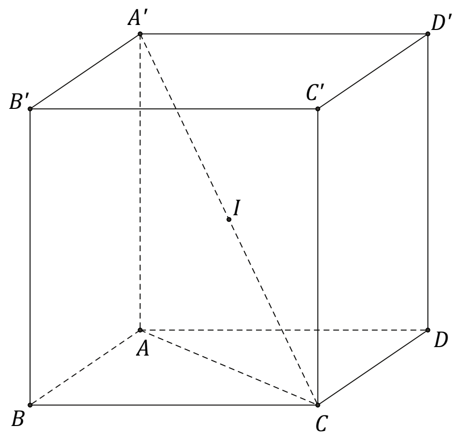
Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật nhận đường chéo AC' là đường kính, do đó bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{1}{2}AC' = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$. Vậy thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \dfrac{14\sqrt{14}}{8} = \dfrac{7\sqrt{14}\pi}{3}$.

Câu 5. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp của một hình lập phương có cạnh bằng $2a$

A. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = 2a\sqrt{3}$. **D.** $R = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. I là tâm của hình lập phương. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình lập phương.

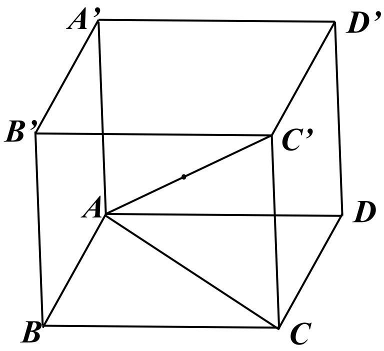
Ta có $R = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 6. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a, $a\sqrt{3}$ và $2a$.

A. $8a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $16\pi a^2$. **D.** $8\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Xét khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O, với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $AA' = 2a$. Dễ thấy O cách đều các đỉnh của khối hộp này nên mặt cầu ngoại tiếp khối hộp có tâm O, bán kính $R = \dfrac{AC'}{2}$.

Ta có

$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$, $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{AC'}{2} = a\sqrt{2}$.

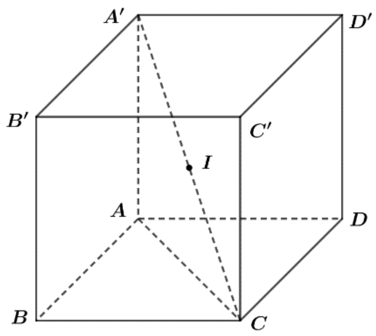
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp này là $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.

Câu 7. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = AA' = 2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng

A. $9\pi a^2$. **B.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{9\pi a^2}{4}$. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ cũng là trung điểm của một đường chéo $A'C$ (giao các đường chéo) của hình hộp.

Hình hộp chữ nhật có độ dài 3 cạnh dài, rộng, cao là: $AD = 2a$, $AB = a$, $AA' = 2a$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là: $R = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{\sqrt{AD^2 + AB^2 + AA'^2}}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

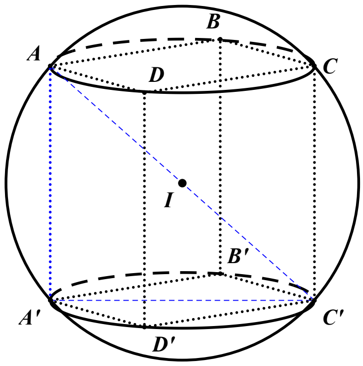
$\Rightarrow S_{\text{mc}} = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 = 9\pi a^2$.

Câu 8. Cho hình lập phương có cạnh bằng a. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương đó bằng

A. $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **B.** $V = 4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là trung điểm của đường chéo AC' và $R = IA = \dfrac{AC'}{2}$

Khối lập phương cạnh a nên:

$AA' = a,\ A'C' = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu cần tính là:

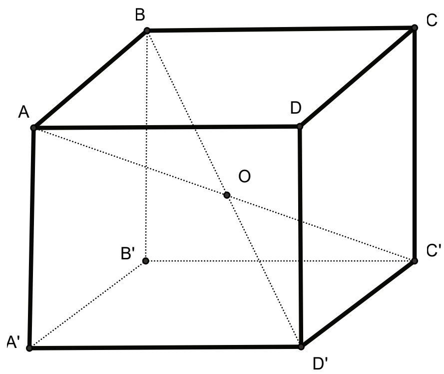
$V = \dfrac{4}{3}.\pi.R^3 = \dfrac{4}{3}.\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{4}{3}\pi.a^3\dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\pi.a^3\sqrt{3}}{2}$ *(đvtt)*.

Câu 9. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $3\pi a^2$. **B.** πa^2. **C.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



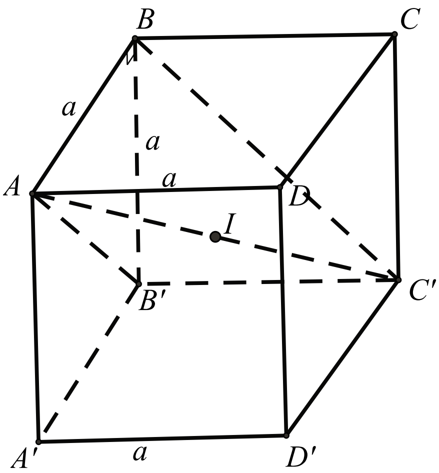
Gọi O là tâm của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $R = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$.

Câu 10. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R = a\sqrt{3}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AC'.

Ta có $\Delta ABC'$ vuông tại B (vì $AB \perp (BB'C'C)$) và $\Delta AB'C'$ vuông tại B' (vì $B'C' \perp (ABB'A')$).

Khi đó $IA = IB = IB' = IC'$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

$AC' = \sqrt{AB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{AB^2 + BB'^2 + B'C'^2} = a\sqrt{3}.$ Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách khác: Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Bán kính mặt cầu là nửa đường chéo hình lập phương cạnh a, tức là bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

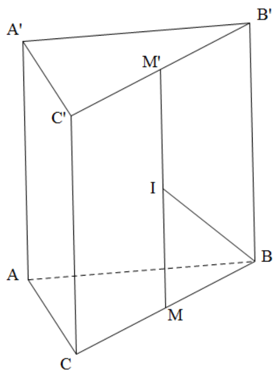
Câu 11. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình lăng trụ theo a.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $R = \dfrac{a}{2}$. **C.** $R = 2a$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hình vẽ.



Gọi M là trung điểm BC, suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M' là trung điểm $B'C'$, suy ra M' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Gọi I là trung điểm MM', khi đó I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp lăng trụ.

Theo đề ta có $MB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $IM = \dfrac{MM'}{2} = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

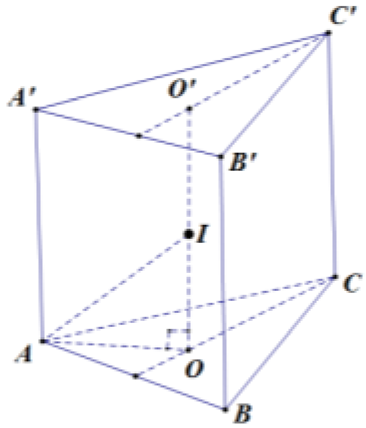
Tam giác MIB vuông tại M nên ta tính được $R = IB = \sqrt{IM^2 + MB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 12. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $\dfrac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **C.** πa^2. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O, O’ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC, A’B’C’.
Trên OO’ lấy trung điểm I. Suy ra IA = IB = IC = IA’= IB’ = IC’.
Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Suy ra bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

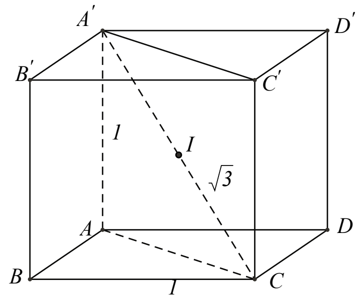
Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi \dfrac{7a^2}{12} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$

Câu 13. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Thể tích mặt cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương là

A. $\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu qua các đỉnh của hình lập phương có đường kính là $A'C$.

Bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

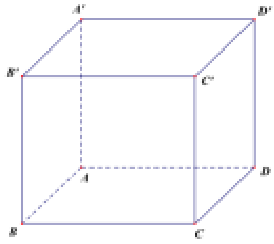
Thể tích khối cầu là $v = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



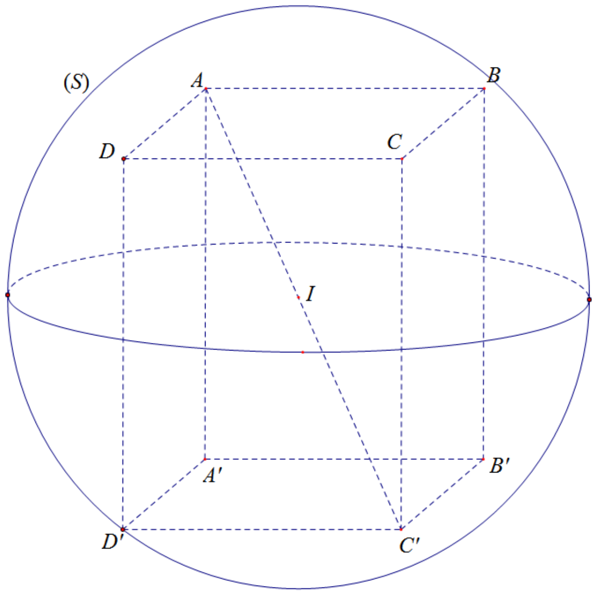
Độ dài đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương bằng độ dài đường chéo của hình lập phương bằng AC'. Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$. Xét tam giác $A'AC$ vuông tại $A \Rightarrow AC' = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$.

Câu 15. Tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$ nội tiếp trong mặt cầu (S).

Khi ấy, khối lập phương có thể tích $V_1 = (2a)^3 = 8a^3$ và bán kính mặt cầu (S) là

$R = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối cầu (S): $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^3 = 4\pi a^3\sqrt{3}$.

Vậy tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương bằng

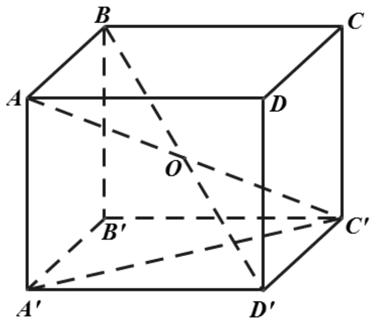
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{8a^3}{4\pi a^3\sqrt{3}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $\frac{28\sqrt{14}\pi a^3}{3}$. **B.** $\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $\frac{7\sqrt{14}\pi a^3}{3}$. **D.** $4\sqrt{6}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Tứ giác $ABC'D'$ là hình chữ nhật có tâm O nên $OA = OB = OC' = OD'$ (1).

Tương tự ta có các tứ giác $CDB'A'$, $BDD'B'$ là các hình chữ nhật tâm O nên $OC = OD = OA' = OB'$, $OB = OD = OB' = OD'$(2).

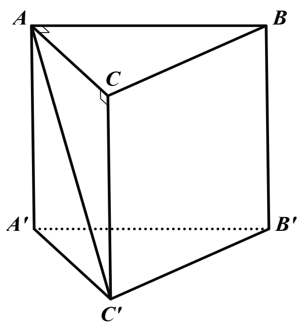
Từ (1) và (2) ta có điểm O cách đều các đỉnh của hình hộp nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp.

Bán kính mặt cầu là: $R = OA = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + A'C'^2}}{2} = \frac{\sqrt{AA'^2 + A'B'^2 + A'D'^2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{9a^2 + a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)^3 = \frac{7\sqrt{14}\pi a^3}{3}$.

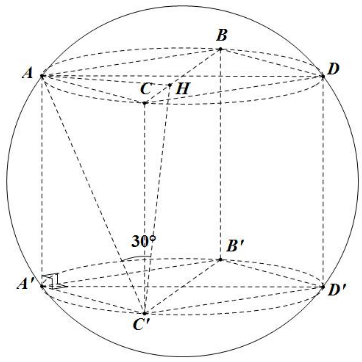
Câu 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho?



A. $S = 24\pi a^2$. **B.** $S = 6\pi a^2$. **C.** $S = 4\pi a^2$. **D.** $S = 3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH \perp BC\ (H \in BC)$ thì $AH \perp (BCC'B')$ (vì (ABC) và $(BCC'B')$ vuông góc với nhau theo giao tuyến BC). Suy ra: $\widehat{AC'H} = 30°$.

ΔABC vuông tại A có đường cao AH nên $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$ và $AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Delta AHC'$ vuông tại $H \Rightarrow AC' = \dfrac{AH}{\sin 30°} = a\sqrt{3}$. Suy ra $AA' = \sqrt{AC'^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có thể xem hình lăng trụ đã cho là một phần của hình hộp chữ nhật có các kích thước lần lượt là $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a$ và $A'A = a\sqrt{2}$.

Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

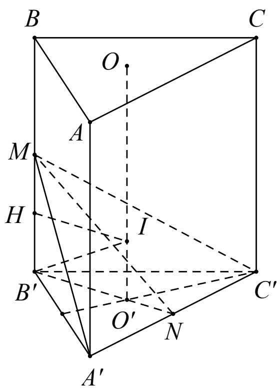
Diện tích mặt cầu cần tìm: $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Câu 18. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm của BB'. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}a}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O; O' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow \begin{cases} OO' = AA' = BB' = 2a \\ OO' \perp (ABC); OO' \perp (A'B'C') \\ BC = B'C' = a \end{cases}$.

Như vậy OO' là trục đường tròn ngoại tiếp 2 mặt đáy.

$\Rightarrow$ tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $M.A'B'C'$ nằm trên OO'.

Trong mặt phẳng $(OBB'O')$, từ trung điểm H của MB', kẻ đường thẳng vuông góc với MB' cắt OO' tại I.

Suy ra $IA' = IC' = IB' = IM \Rightarrow$ khối chóp $M.A'B'C'$ nội tiếp mặt cầu tâm I, bán kính $R = IB'$.

Gọi N là trung điểm của $A'C'$.

Dễ dàng chứng minh được $HIO'B'$ là hình chữ nhật.

Suy ra $IB' = \sqrt{IO'^2 + B'O'^2} = \sqrt{HB'^2 + \left(\frac{2}{3}B'N\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{BB'}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{BC\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

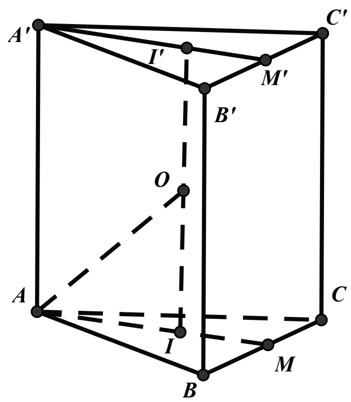
$\Rightarrow IB' = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Câu 19. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4, đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = 2; \widehat{BAC} = 120°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ trên

A. $\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Khi đó, II' là trục đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$, suy ra tâm mặt cầu là trung điểm O của II'.

Ta có $BM = AB.\sin 60° = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$.

$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2.IA \Rightarrow IA = \frac{2\sqrt{3}}{2.\sin 120°} = 2$; $OI = 2 \Rightarrow OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = 2\sqrt{2}$.

Bán kính mặt cầu $R = OA = 2\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 32\pi$.

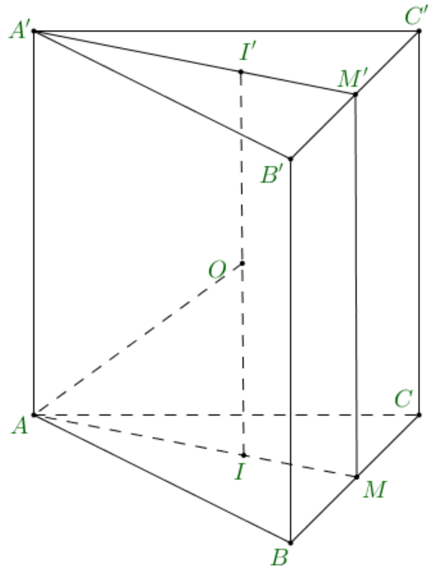
Phương án C được chọn.

Câu 20. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

A. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$. **B.** $S = \frac{7a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{49\pi a^2}{144}$. **D.** $S = \frac{49a^2}{114}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$, O là trung điểm của II'. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ta có $AI = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI = \dfrac{a}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\dfrac{7a^2}{12} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$.

Dạng 2. Khối cầu ngoại tiếp khối chóp

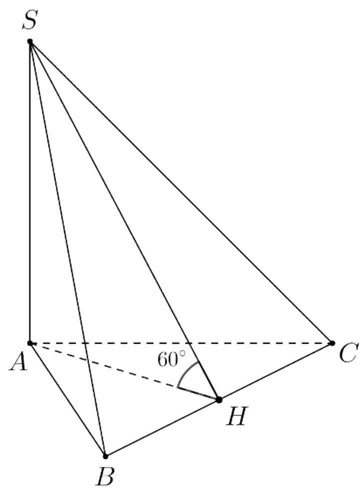
Dạng 2.1 Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{172\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{76\pi a^2}{3}$. **C.** $84\pi a^2$. **D.** $\dfrac{172\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn A.



Ta có tâm của đáy cũng là giao điểm ba đường cao (ba đường trung tuyến) của tam giác đều ABC nên bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là $r = 4a.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Đường cao AH của tam giác đều ABC là $AH = \dfrac{4a.\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a$.

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $60°$ suy ra $\widehat{SHA} = 60°$.

Suy ra $\tan SHA = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{SA}{2\sqrt{3}a} = \sqrt{3} \Rightarrow SA = 6a$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R_{mc} = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{9a^2 + \dfrac{16}{3}a^2} = \dfrac{\sqrt{129}}{3}a$.

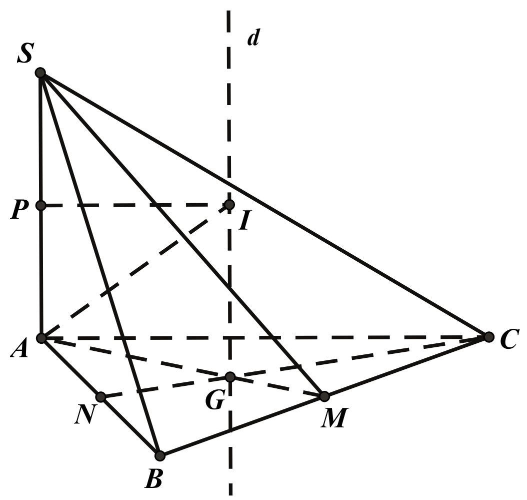
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ là $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{\sqrt{129}}{3}a\right)^2 = \dfrac{172\pi a^2}{3}$.

Câu 2. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $52\pi a^2$. **B.** $\dfrac{172\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{76\pi a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{76\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AB, SA

Gọi G là trọng tâm tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua G ta dựng đường thẳng d vuông góc mặt đáy.

Kẻ đường trung trực SA cắt đường thẳng d tại I, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $((SBC),(ABC)) = SMA = 30°$,

$\Rightarrow SA = AM.\tan 30° = 4a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2a \Rightarrow AP = \dfrac{SA}{2} = a$

$AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.4a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow PI = AG = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác API vuông tại P có $AI = \sqrt{AP^2 + PI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{57}}{3}$.

Bán kính $R = AI = \dfrac{a\sqrt{57}}{3}$.

Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=\dfrac{76\pi a^2}{3}$

Câu 3. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^o. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{43\pi a^2}{9}$. **D.** $21\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BC,SA. Ta có $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SIA}=60°.$,

$\Rightarrow SA=AI.\tan 60°=3a \Rightarrow KG=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{3a}{2}$

Gọi G trọng tâm tam giác đồng thời là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua G ta dựng đường thẳng $\Delta\perp(ABC)$.

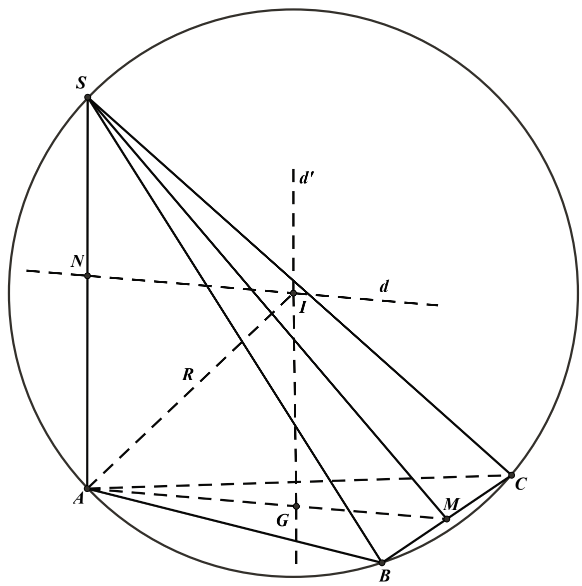
Dựng trung trực SA cắt đường thẳng Δ tại K, khi đó $KS=KA=KB=KC$ nên K là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có $R=KA=\sqrt{KG^2+AG^2}=a.\sqrt{\dfrac{43}{12}}$.Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=\dfrac{43\pi a^2}{3}$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{19\pi a^2}{9}$. **D.** $13\pi a^2$.

Lời giải



Chọn B

Gọi M là trung điểm của đoạn BC.

N là trung điểm của đoạn SA.

G là trọng tâm ΔABC.

Gọi d' là đường thẳng đi qua trọng tâm G của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng đáy.
d là đường trung trực của đoạn thẳng SA.
Từ đó suy ra tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là giao điểm của hai đường thẳng d và d'.
Suy ra: bán kính mặt cầu $R = AI$.

Ta có: ΔABC đều cạnh $2a \Rightarrow AM = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và $AG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SMA} = 30^0$

$\tan\widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} \Rightarrow SA = AM.\tan 30^0 = a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = a$.

Suy ra: $AN = \dfrac{a}{2}$.

Do đó: $R = AI = \sqrt{AN^2 + NI^2} = \sqrt{AN^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{57}}{6}$

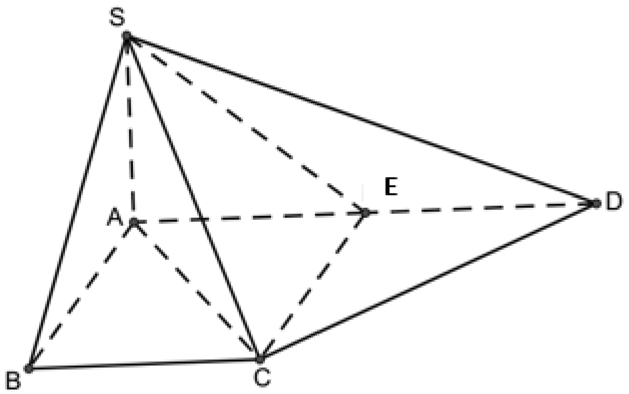
Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(\dfrac{\sqrt{57}}{6}\right)^2 = \dfrac{19\pi a^2}{3}$.

Câu 5. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp $ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D. Biết SA vuông góc với $ABCD$, $AB = BC = a$, $AD = 2a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C, E bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn D



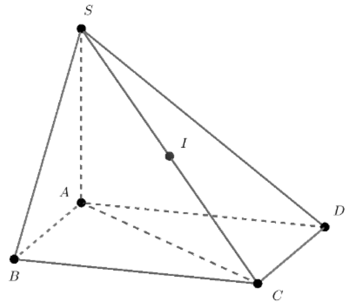
Ta thấy các tam giác $\Delta SAC; \Delta SBC; \Delta SEC$ vuông tại A, C, E. Vậy các điểm S, A, B, C, E nằm trên mặt cầu đường kính $SC \Rightarrow R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a$.

Câu 6. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết, $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AC$ nên ΔSAC vuông ta A.

Mặt khác

$\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$. Suy ra ΔSBC vuông ta B.

Tương tự, ta cũng có ΔSCD vuông ta D.

Gọi I là trung điểm của SC. Suy ra $IS=IA=IB=IC=ID$.

Do đó, I là tâm của mặt cầu goại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính $R=\dfrac{SC}{2}$..

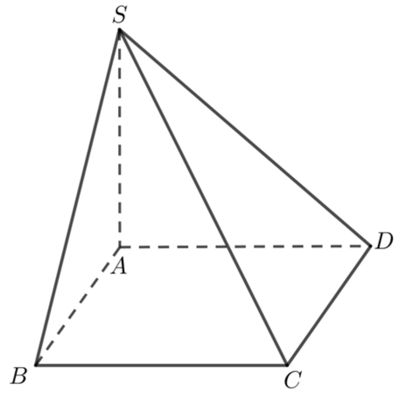
Ta có $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{6}\Rightarrow R=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 7. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh bằng x. Cạnh bên $SA=x\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo x diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi x^2$. **B.** $x^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi x^2$. **D.** $2x^2$.

Lời giải

Chọn A



+ Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AC,\ SA\perp BC,\ SA\perp CD$.

$\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases}\Rightarrow BC\perp SB$, $\begin{cases} CD\perp SA \\ CD\perp AD \end{cases}\Rightarrow CD\perp SD$.

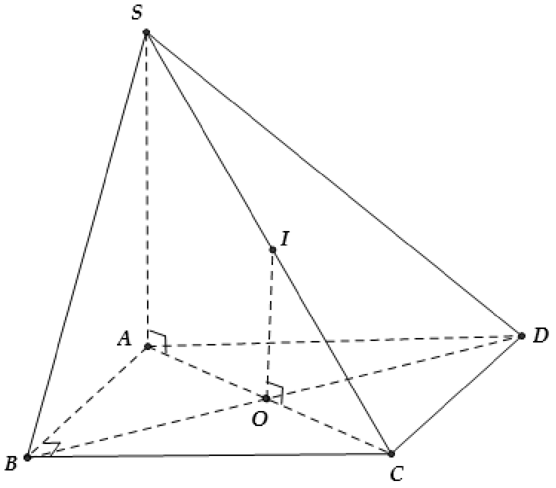
Vậy $\widehat{SAC}=\widehat{SBC}=\widehat{SDC}=90^\circ$ do đó A, B, D, S, C thuộc mặt cầu đường kính SC.

+ Ta có $AC=\sqrt{2}x$, $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2\sqrt{2}x$. R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ khi đó $R=\dfrac{SC}{2}=\sqrt{2}x$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ bằng $S=4\pi R^2=4\pi\left(\sqrt{2}x\right)^2=8\pi x^2$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $2a^2$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, đường chéo $AC = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của SC.

Suy ra OI là đường trung bình của tam giác SAC. Suy ra $OI // SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Hay OI là trục đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$.

Mà $IS = IC \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.

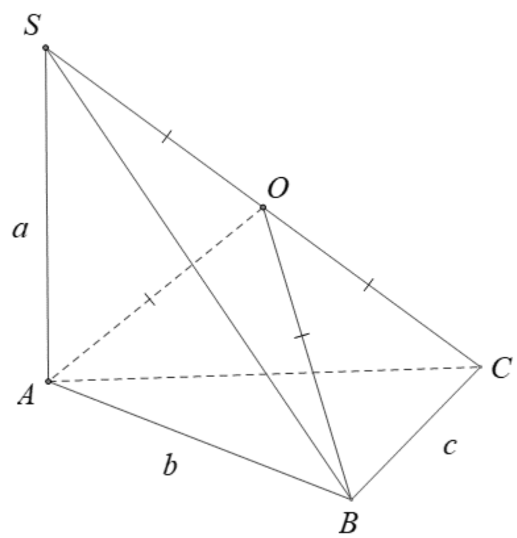
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$: $R = SI = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.

Câu 9. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, AB = b, BC = c.$ Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC.$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Gọi O là trung điểm SC, ta có tam giác SAC, SBC vuông lần lượt tại A và B nên:

$OA = OB = OC = OS = \dfrac{SC}{2}$. Do đó mặt cầu đi qua S, A, B, C có tâm O và bán kính $R = \dfrac{SC}{2}$.

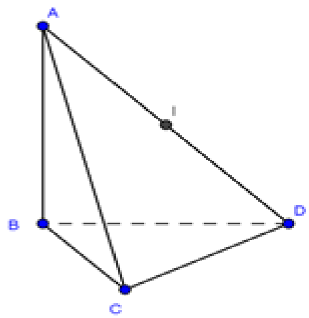
Ta có: $SC^2 = SB^2 + BC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$. suy ra $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 10. **(Mã 105 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn C



Tam giác BCD vuông tại C nên áp dụng định lí Pitago, ta được $BD = 5a$.

Tam giác ABD vuông tại B nên áp dụng định lí Pitago, ta được $AD = 5a\sqrt{2}$.

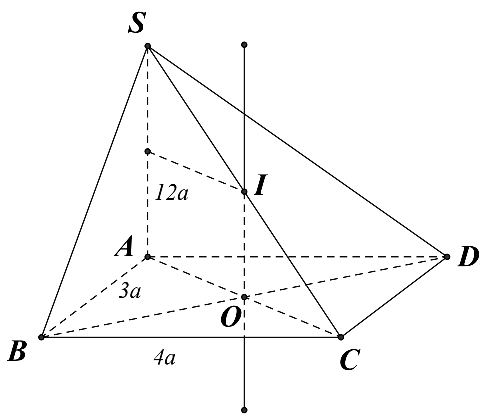
Vì B và C cùng nhìn AD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm I của AD. Bán kính mặt cầu này là: $R = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11. **(Mã 104 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \dfrac{13a}{2}$ **B.** $R = 6a$ **C.** $R = \dfrac{5a}{2}$ **D.** $R = \dfrac{17a}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$

Vì $SA \perp AC$ nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 13a$

Nhận thấy: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$. Tương tự: $CD \perp SD$

Do các điểm $A,\ B,\ D$ đều nhìn đoạn thẳng SC dưới một góc vuông nên gọi I là trung điểm của đoạn thẳng SC thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

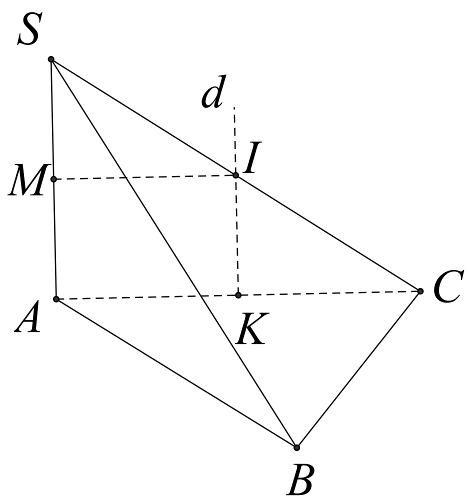
Vậy $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{13a}{2}$.

Câu 12. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = 5,\ AB = 3,\ BC = 4$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

A. $R = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $R = 5$. **C.** $R = \dfrac{5}{2}$. **D.** $R = 5\sqrt{2}$.

Lời giải 1

Chọn A



Gọi K là trung điểm AC. Gọi M là trung điểm SA.
Vì tam giác ABC vuông tại B nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Từ K dựng đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC)$.

Trong $mp(SAC)$ dựng MI là đường trung trực đoạn SA cắt d tại I.

Khi đó điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính mặt cầu là $R = AI$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5 \Rightarrow AK = \dfrac{5}{2}$. Có $IK = MA = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Vậy $R = AI = \sqrt{AK^2 + IK^2} = \sqrt{\dfrac{25}{4} + \dfrac{25}{4}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải 2

Gọi I là trung điểm của SC. Tam giác SAC vuông tại A nên $IS = IC = IA$ (1)

Ta có $BC \perp AB; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại **B.**

Nên $IS = IC = IB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính $R = \dfrac{1}{2}SC$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$; $SC = \sqrt{AS^2 + AC^2} = 5\sqrt{2}$

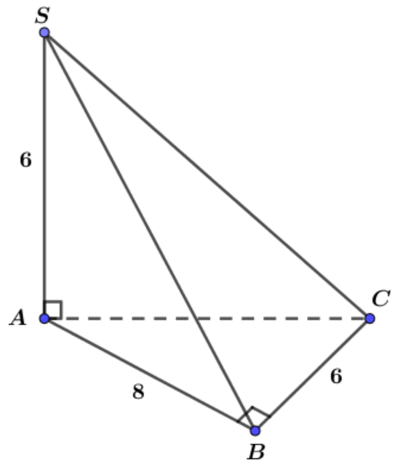
Vậy $R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=8$, $BC=6$. Biết $SA=6$ và $SA\perp(ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng của hình chóp $SABC$.

A. $\dfrac{16\pi}{9}$ **B.** $\dfrac{625\pi}{81}$ **C.** $\dfrac{256\pi}{81}$ **D.** $\dfrac{25\pi}{9}$

Lời giải

Chọn C



Gọi r là bán kính khối cầu nội tiếp chóp $S.ABC$, ta có $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{tp}.r\Rightarrow r=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{tp}}$

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=48$

Ta dễ dàng có ΔSAB, ΔSAC vuông tại S

Tính được $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$

$S_{tp}=S_{SAB}+S_{SAC}+S_{ABC}=108$ (đvdt) $\Rightarrow r=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{tp}}=\dfrac{4}{3}$

Vậy thể tích khối cầu nội tiếp chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{4}{3}\pi.r^3=\dfrac{256\pi}{81}$.

Câu 14. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $SA=6a, AB=2a, AC=4a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

A. $R=2a\sqrt{7}$. **B.** $R=a\sqrt{14}$. **C.** $R=2a\sqrt{3}$. **D.** $r=2a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{4a^2+16a^2}=2a\sqrt{5}$

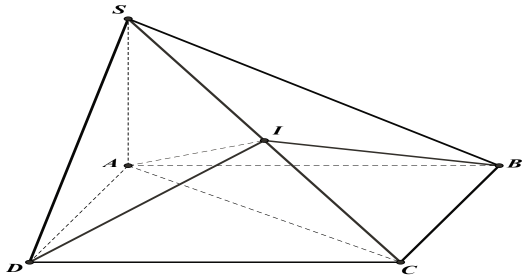
$R_d=a\sqrt{5}$

$R=\sqrt{R_d^2+\dfrac{SA^2}{4}}=\sqrt{5a^2+9a^2}=a\sqrt{14}$.

Câu 15. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có đường chéo bằng $\sqrt{2}a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải



*) Ta có ΔSAC vuông tại A (1).

*) CM ΔSDC vuông tại ***D***. Ta có:

$AD \perp CD$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật).

$SA \perp CD$ (vì cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy).

Ta suy ra: $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SDC$ vuông tại D (2).

*) Chứng minh tương tự, ta được ΔSBC vuông tại B (3).

Từ (1), (2), (3): Ta suy ra: mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có đường kính SC.

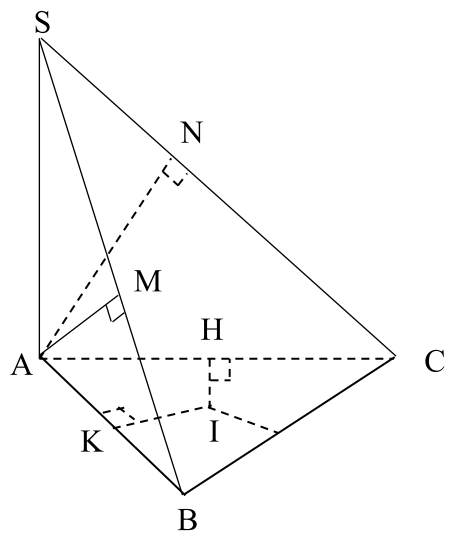
Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}$.

Vậy mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BAC} = 60°$, $BC = a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** a **D.** $2a$

Lời giải



• Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow IA = IB = IC$ (1).

• Kẻ IH là trung trực của AC.

$\left.\begin{matrix} IH \perp AC \\ IH \perp SA \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow IH \perp (SAC) \Leftrightarrow IH \perp (ANC)$.

Mà ΔANC vuông tại N có AC là cạnh huyền và H là trung điểm $AC \Rightarrow IH$ là trục của $\Delta ANC \Rightarrow IA = IC = IN \ (2)$.

• Tương tự kẻ IK là trung trực của $AB \Rightarrow IK$ là trục của $\Delta AMB \Rightarrow IA = IB = IM \ (3)$.

$(1),(2),(3) \Rightarrow IA = IB = IC = IM = IN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp chóp $A.BCMN$.

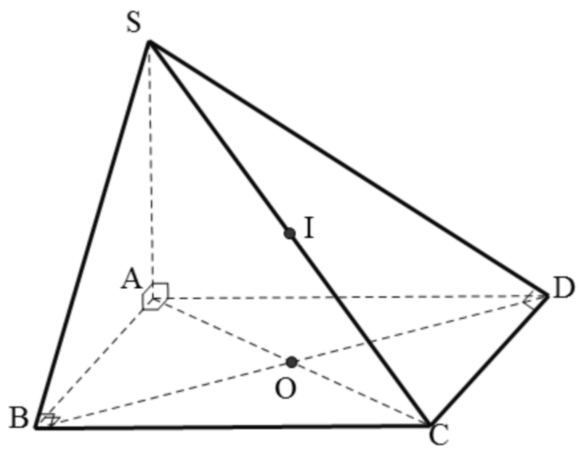
Định lí hàm sin trong ΔABC: $IA = \dfrac{BC}{2\sin \widehat{BAC}} = \dfrac{a}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, SA \perp (ABCD)$, SC tạo với mặt đáy một góc 45^0. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $2a^3$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$; I là trung điểm đoạn SC.

$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

$\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

Các điểm A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông nên I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

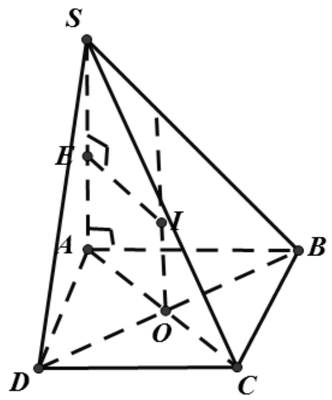
Mặt khác AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng đáy nên góc giữa SC và mặt phẳng đáy là góc ACS bằng 45^0. Do đó tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AC = 2a$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.2a.a.a\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABCD là hình vuông cạnh bằng a. $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{3}.$ Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp?

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $a\sqrt{7}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Dựng (d) đi qua O và vuông góc với $mp(ABCD)$.

Dựng Δ là đường trung trực của cạnh SA cắt SA tại E.

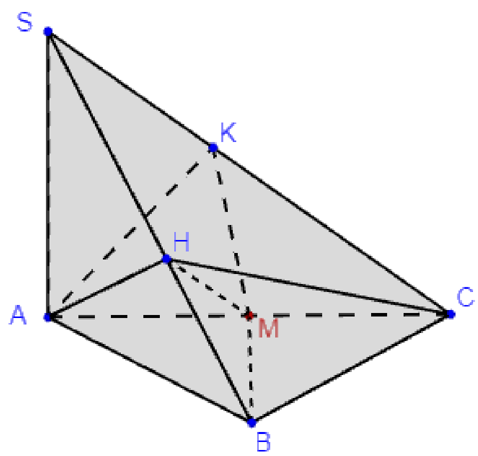
$I = d \cap \Delta \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ => Bán kính là: IA.

Ta có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $AI = \sqrt{AO^2 + AE^2} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 19. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC, khi đó thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$ là

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **<u>D</u>.** $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC.

ΔABC vuông cân tại B $\Rightarrow MB = MA = MC = \frac{1}{2}AC$. (1)

ΔKAC vuông tại K $\Rightarrow MK = \frac{1}{2}AC$. (2)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \\ AH \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC.$$

$\Rightarrow \Delta AHC$ vuông tại H $\Rightarrow MH = \frac{1}{2}AC$. (3)

Từ $(1) \rightarrow (3)$ $\Rightarrow$ M là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$.

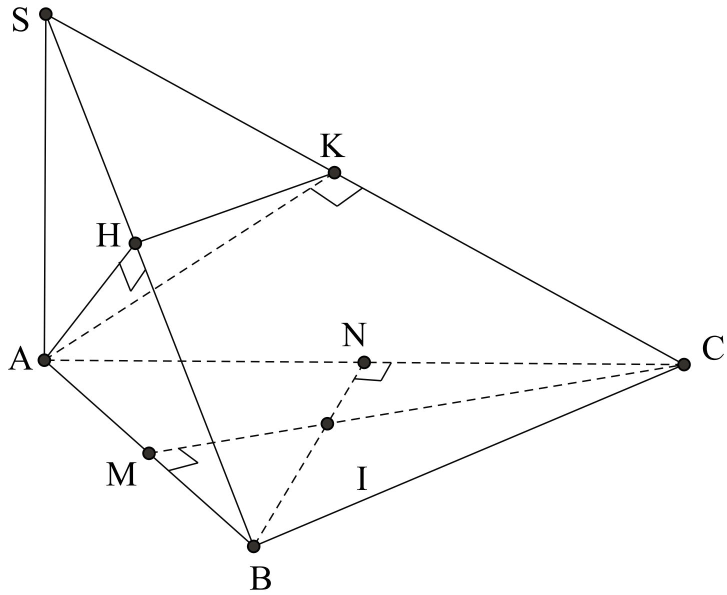
Bán kính khối cầu cần tìm: $R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 20. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a; $SA\perp(ABC)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $SB;SC$. Diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm A,B,C,K,H là

A. $\frac{4\pi a^2}{9}$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\frac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^2}{3}$.

Lời giải



Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì ABC là tam giác đều cạnh nên ta có: $IA=IB=IC=R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Ta có: $IM\perp AB$ và $IM\perp SA$ (do $SA\perp(ABC)$) suy ra $IM\perp(SAB)$; Mà $AH\perp HB$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB; Do đó IM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AHB\Rightarrow IA=IH=IB \quad (1)$

Lại có: $IN\perp AC$ và $IN\perp SA$ (do $SA\perp(ABC)$) suy ra $IN\perp(SAC)$; Mà $AK\perp KC$ nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC; Do đó IN là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AKC\Rightarrow IA=IK=IC \quad (2)$

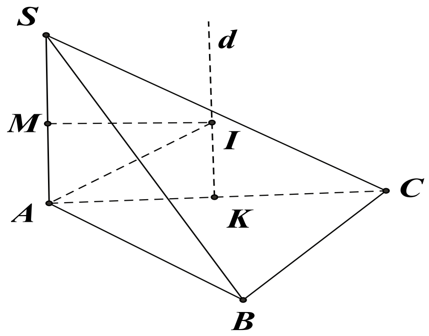
Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu đi qua 5 điểm A,B,C,K,H và bán kính mặt cầu đó là $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow S_{mc}=4\pi R^2=\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 21. **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $SABC$

A. $8a^2\pi$. **B.** $\frac{32a^2}{3}\pi$. **C.** $\frac{8a^2\pi}{3}$ **D.** $4a^2\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi K,M lần lượt là trung điểm của AC,AS

Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp

Từ K dựng đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (ABC).

Trong (SAC), dựng đường trung trực của SA cắt d tại I

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC và bán kính mặt cầu là $R=IA$

Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}\Rightarrow AK=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$SA=AC.\tan\widehat{SCA}=a\sqrt{6}\Rightarrow MA=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

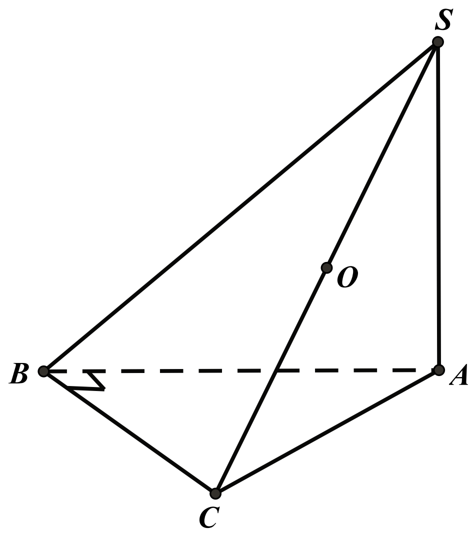
$\Rightarrow R=IA=\sqrt{MA^2+AK^2}=a\sqrt{2}$. Diện tích mặt cầu là $S=4\pi R^2=8a^2\pi$

Câu 22. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA=2a, AB=a, BC=a\sqrt{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. a. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $x=3$; $y=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\left.\begin{matrix} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$, lại có $CA\perp SA$.

Do đó 2 điểm A, B nhìn đoạn SC dưới một góc vuông. Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S. ABC là mặt cầu đường kính S**C.**

Xét tam giac ABC có $AC=\sqrt{BC^2+BA^2}=2a$ suy ra $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a\sqrt{2}$.

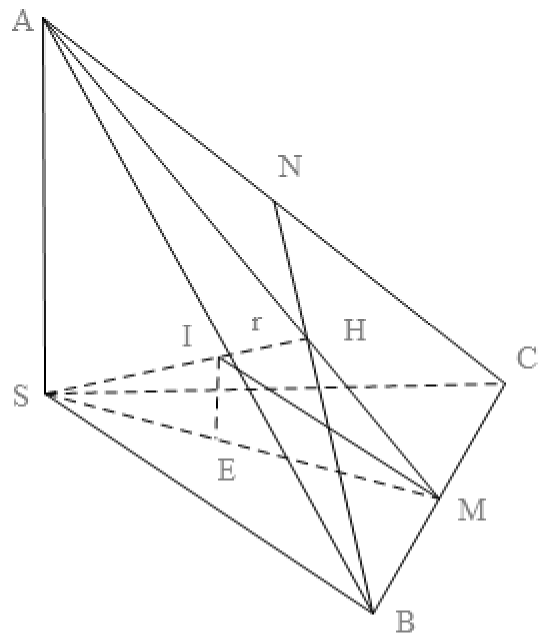
Vậy $R = a\sqrt{2}$.

Câu 23. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết thể tích của khối chóp bằng $\frac{a^3}{6}$. Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp của hình chóp $S.ABC$.

A. $r = \frac{a}{3+\sqrt{3}}$. **B.** $r = 2a$. **C.** $r = \frac{a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$. **D.** $r = \frac{2a}{3\left(3+2\sqrt{3}\right)}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Áp dụng công thức: $r = \frac{3V}{S_{tp}}$ (*) và tam giác đều cạnh x có diện tích $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Từ giả thiết S.ABC đều có $SA = SB = SC$. Lại có SA, SB, SC đôi một vuông góc và thể tích khối chóp S.ABC bằng $\frac{a^3}{6}$ nên ta có $SA = SB = SC = a$.

Suy ra $AB = BC = CA = a\sqrt{2}$ và tam giác ABC đều cạnh có độ dài $a\sqrt{2}$. Do đó diện tích toàn phần của khối chóp $S.ABC$ là

$$S_{tp} = S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC} = 3\frac{a^2}{2} + \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Thay vào (*) ta được:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{3.\frac{a^3}{6}}{\frac{a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}} = \frac{a}{3+\sqrt{3}}.$$

Cách 2. Xác định tâm và tính bán kính

Từ giả thiết suy ra $SA = SB = SC = a$.

Kẻ $SH \perp (ABC)$, ta có H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi $M = AH \cap BC$, dựng tia phân giác trong của góc $\widehat{AMB}$ cắt SH tại I, kẻ $IE \perp \left(SBC\right)$ tại E. Dễ thấy $E \in SM$. Khi đó ta có $IH = IE$ hay $d(I, ABC) = d(I, SBC)$ do S.ABC la chóp tam giác đều nên hoàn toàn có $d(I,ABC)=d(I,SAB)=d(I,SAC)$ tức là I là tâm mặt cầu nội tiếp khối chóp S.ABC.

Ta có $r=IH=IE$.

Xét ΔSAM vuông tại S, đường cao SH, tính được $SM=\frac{BC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$AM=\sqrt{SA^2+SM^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $MH=\frac{SM^2}{AM}=\frac{a^2}{2}:\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow SH=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng tính chất đường phân giác ta có

$\frac{IH}{IS}=\frac{MH}{MS}\Rightarrow\frac{IH}{IH+IS}=\frac{MH}{MH+MS}\Leftrightarrow\frac{IH}{SH}=\frac{MH}{MH+MS}$

$\Rightarrow IH=\frac{MH.SH}{MH+MS}=\frac{a}{\sqrt{6}}.\frac{a}{\sqrt{3}}:(\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{a}{\sqrt{2}})=\frac{a}{3+\sqrt{3}}$

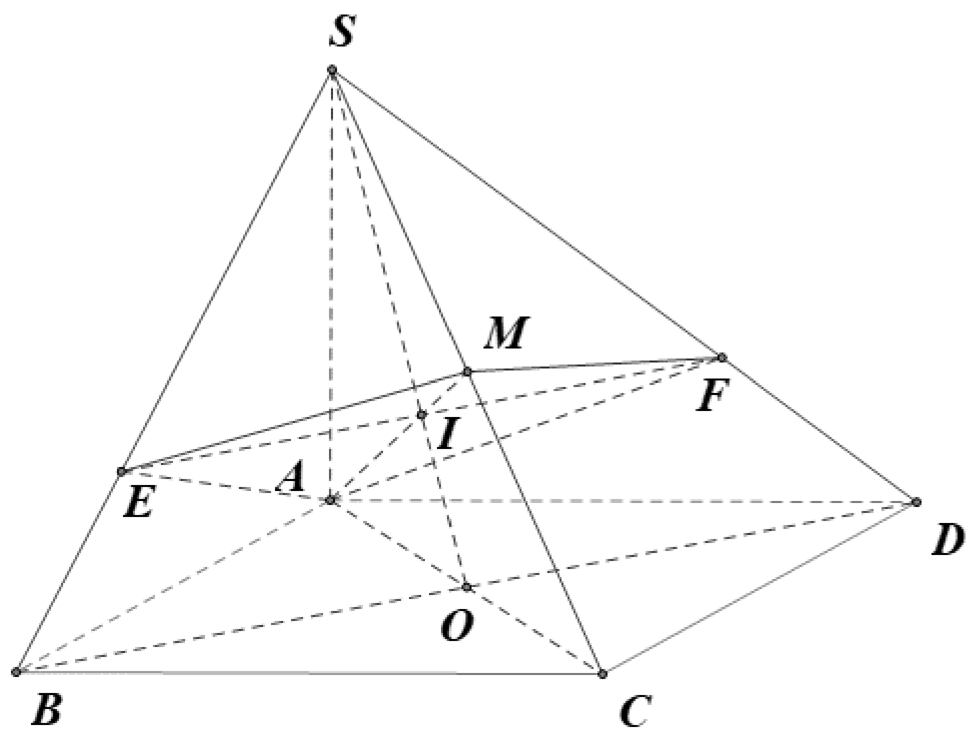
Vậy $r=IH=\frac{a}{3+\sqrt{3}}$.

Câu 24. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA=a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB,SD lần lượt tại E,F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S,A,E,M,F nhận giá trị nào sau đây?

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\parallel BD\\(SBD)\cap(\alpha)=FE\end{cases}\Rightarrow BD//EF$. Gọi I là giao điểm của AM và SO

Dễ thấy I là trong tâm tam giác SAC

$\dfrac{SF}{SD}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow SF=\dfrac{2}{3}SD\Rightarrow SF.SD=\dfrac{2}{3}SD^2=\dfrac{2}{3}\left(SA^2+AD^2\right)=2a^2\Rightarrow SF.SD=SA^2$

Xét tam giác vuông SAD và $SF.SD=SA^2\Rightarrow AF$ là đường cao của tam giác $\Rightarrow AF\perp SF$, chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow AE\perp SB$

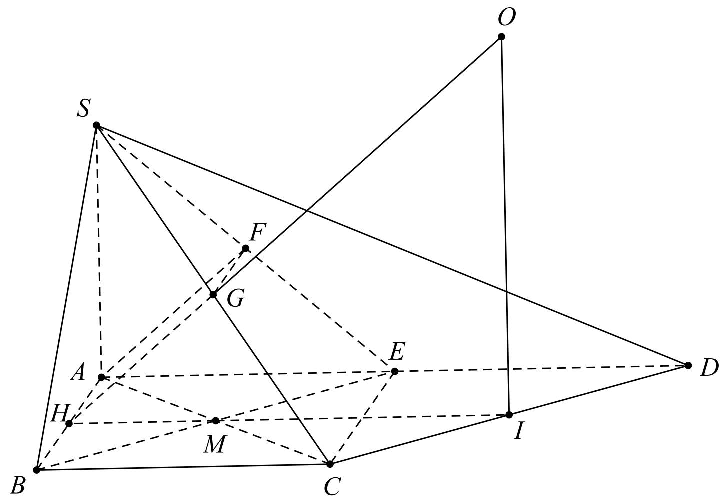
Tam giác $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao của tam giác $SAC\Rightarrow AM\perp SM$

Ta có $\begin{cases} AF\perp SF \\ AE\perp SE \\ AM\perp SM \end{cases}$ nên mặt cầu đi qua năm điểm S,A,E,M,F có tâm là trung điểm của SA và bán kính bằng $\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 25. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Trong không gian cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=1, AD=2$, cạnh bên $SA=1$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm AD. Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

A. $S_{mc}=11\pi$. **B.** $S_{mc}=5\pi$. **C.** $S_{mc}=2\pi$. **D.** $S_{mc}=3\pi$.

Lời giải



Gọi H,G,F lần lượt là trung điểm AB, SC, SE; $M=AC\cap BD$.

Dễ thấy $AFGH$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} \text{AF}\perp SE(SA=AE) \\ GF\perp SE(GF//AB//CE, AB\perp SE) \end{cases}$

Khi đó, $(AFGH)$ là mặt phẳng trung trực của SE.

Theo giả thiết: tứ giác ABCE là hình vuông $\Rightarrow CE\perp AD\Rightarrow \Delta CED$ vuông tại E.

Gọi I là trung điểm của CD, ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

Đường thẳng d đi qua I và song song SA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE.

GH cắt d tại O, ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$, bán kính: $R=OC$

Vì $\begin{cases} O\in d\Rightarrow OE=OC=OD \\ O\in GH\subset(\text{AFGH})\Rightarrow \text{OS=OE} \end{cases}\Rightarrow OS=OC=OD=OE$

$IC=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ΔOIH đồng dạng ΔGMH nên $\dfrac{GM}{MH}=\dfrac{OI}{IH}\Rightarrow OI=\dfrac{3}{2}$.

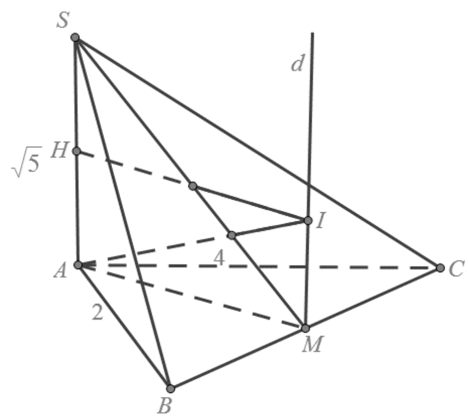
Áp dụng định lý Pitago vào tam giác OIC, suy ra $R = OC = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$ là $S_{mc} = 4\pi R^2 = 11\pi$.

Câu 26. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2,\ AC = 4,\ SA = \sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là:

A. $R = \dfrac{25}{2}$. **B.** $R = \dfrac{5}{2}$. **C.** $R = 5$. **D.** $R = \dfrac{10}{3}$.

Lời giải



Cách 1.

Gọi M, H lần lượt là trung điểm BC, SA.

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SAM) kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA, cắt d tại I

$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- $\begin{cases} HA \perp (ABC) \\ IM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HA \perp AM \\ HA // IM \end{cases}$.
- $\begin{cases} HI \perp SA \\ AM \perp SA \\ HI, SA, AM \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow HI // AM$.

Suy ra tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

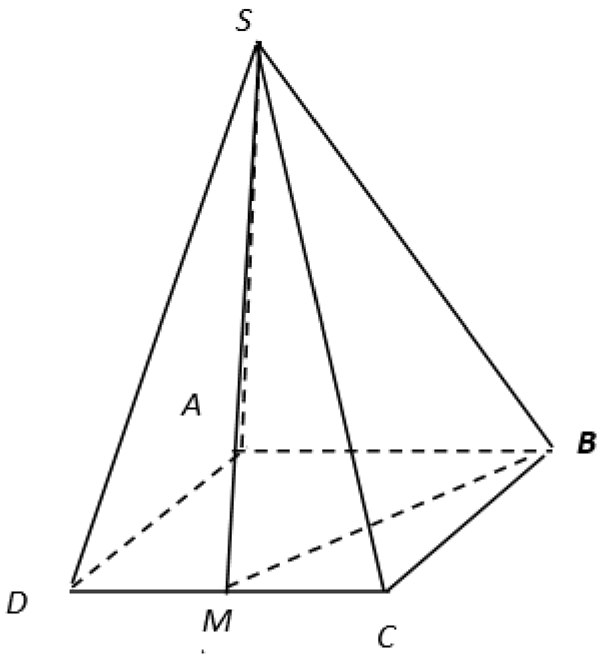
Ta có $AM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{5}$, $IM = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \dfrac{5}{4}} = \dfrac{5}{2}$.

Cách 2. Sử dụng kết quả: Nếu $SABC$ là một tứ diện vuông đỉnh A thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ được tính bởi công thức: $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{AS^2 + AB^2 + AC^2}$

Áp dụng công thức trên, ta có $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2^2 + 4^2} = \dfrac{5}{2}$.

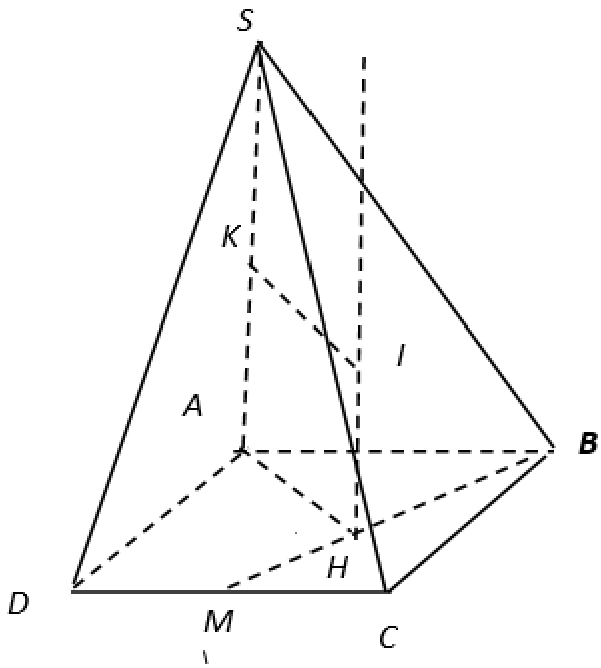
Câu 27. **(THPT Nguyễn Tất Thành-Đh-SP-HN-2022)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2, AD=1$. Gọi M là trung điểm của DC. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=2$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCM$.



A. $R=\sqrt{3}$. **B.** $R=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác MBC vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm của MB suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC.

Từ H dựng đường thẳng d song song với SA.

Mà $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp(MBC)\Rightarrow d\perp(MBC)$.

Suy ra d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC.

Gọi K là trung điểm của SA.

Do $AH\perp SA$ từ K dựng đường thẳng song song với AH cắt d tại I suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCM$.

Tam giác MBC vuông cân tại $C\Rightarrow \widehat{MBC}=45°\Rightarrow \widehat{ABH}=45°$.

Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác ABH ta có

$$\Rightarrow \cos\widehat{ABH} = \frac{BA^2 + BH^2 - AH^2}{2BA.BH} \Leftrightarrow \cos 45° = \frac{4 + \frac{1}{2} - AH^2}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{5}{2}.$$

Đặt $IH = x$ suy ra $SI^2 = SK^2 + KI^2 = (2-x)^2 + \frac{5}{2}$ và. $IB^2 = x^2 + \frac{1}{2}$.

Ta có $SI = IB \Rightarrow SI^2 = IB^2 \Leftrightarrow (2-x)^2 + \frac{5}{2} = x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

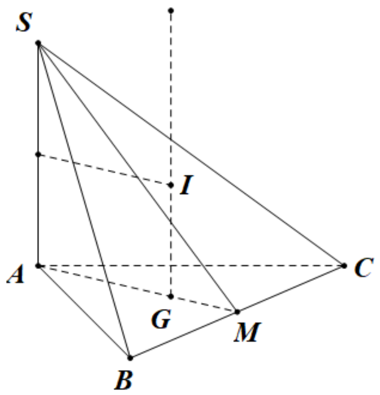
Vậy $R = SI = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Câu 28. **(Sở Vĩnh Phúc 2022)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $45°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{25\pi a^2}{12}$. **B.** $\frac{25\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{25\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{25\pi a^2}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC.

Dựng đường thẳng d qua G và song song với $SA \Rightarrow d \perp (ABC)$, d là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Dựng đường trung trực cạnh SA, cắt d tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ và bán kính $R = IA$.

Ta có:

$$\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMA} = 45°$$

$$\Rightarrow SA = AM.\tan 45° = \sqrt{3}a.$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

Bán kính mặt cầu $IA = \sqrt{AG^2 + IG^2} = \sqrt{AG^2 + \frac{SA^2}{4}} = \frac{5\sqrt{3}a}{6}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = \frac{25\pi a^2}{3}$.

Câu 29. **(Chuyên Hạ Long 2022)** Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{7}$ và vuông góc với đáy. Lấy điểm M trên cạnh SC sao cho $CM < a$. Gọi (C) là hình nón có đỉnh C, các điểm B, M, D thuộc mặt xung quanh, điểm A thuộc mặt đáy của hình nón. Tính diện tích xung quanh của (C).

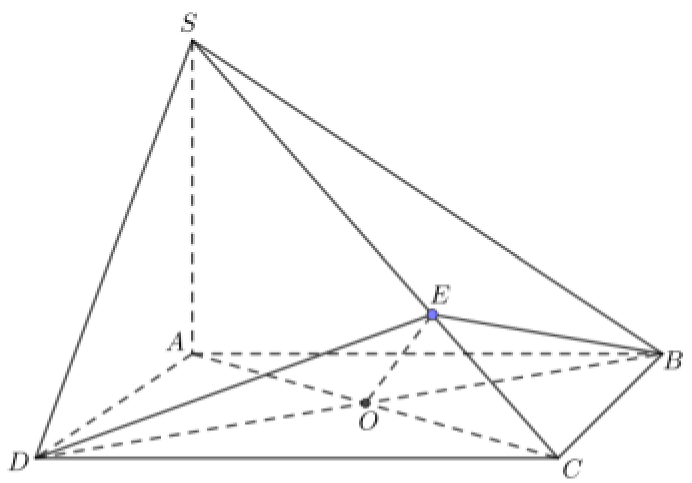
A. $\dfrac{16\sqrt{7}}{15}\pi a^2$.

B. $\dfrac{8\sqrt{30}}{15}\pi a^2$.

C. $\dfrac{32\sqrt{2}}{15}\pi a^2$.

D. $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}\pi a^2$.

Lời giải



Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng SC sao cho $CE = a$.
Gọi hình nón (C_1) ngoại tiếp hình chóp $C.BDE$ có đỉnh C.

Gọi $O = AC \cap BD$. $O \in BD$ nên thuộc mặt đáy của hình nón (C_1) và $CA = 2CO$, điểm A thuộc mặt đáy của hình nón (C). (1)

Hơn nữa $CB = CD = CE = a$ suy ra (BDE) vuông góc với trục của hình nón (C) và thiết diện của (BDE) với mặt xung quanh của hình nón (C) là đường tròn, đồng thời (BDE) song song với mặt chứa đáy của hình nón (C). (2)

Từ (1) và (2) suy ra hình nón (C_1) đồng dạng với hình nón (C) với tỷ số $\dfrac{1}{2}$.

$$SC = 3a, \cos SCB = \frac{1}{3}, ED = EB = \sqrt{2a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a, EO = \sqrt{\frac{4}{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}a$$

$$S_{EBD} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{6}a^2$$

$$R_{BDE} = \frac{\frac{4a^2}{3} \cdot a\sqrt{2}}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{15}}{6}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}a.$$

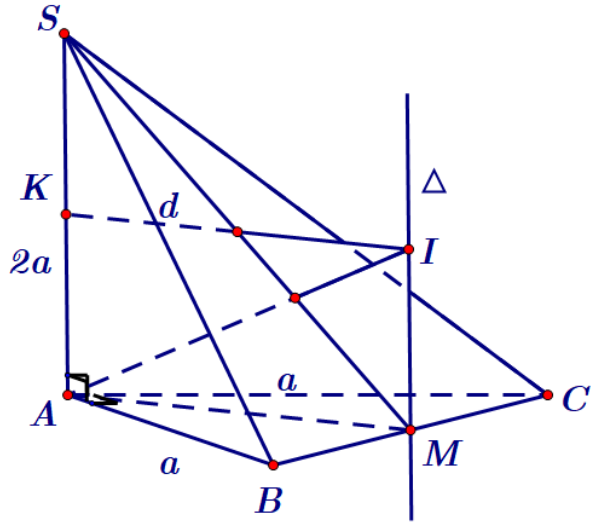
Diện tích xung quanh của hình nón (C): $S_{xq} = \pi \cdot \dfrac{4a\sqrt{30}}{15} \cdot 2a = \dfrac{8\sqrt{30}}{15}\pi a^2$.

Câu 30. **(Sở Lạng Sơn 2022)** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{9\pi a^3}{2}$. **B.** $\frac{3\pi a^3}{2}$. **C.** $\sqrt{6}\pi a^3$. **D.** $3\sqrt{6}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. d là đường trung trực của cạnh SA nằm trong mặt phẳng (SAM), d cắt Δ tại I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có $AM=\frac{BC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $IM=\frac{SA}{2}=a$ nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$R=\sqrt{AM^2+MI^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+a^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

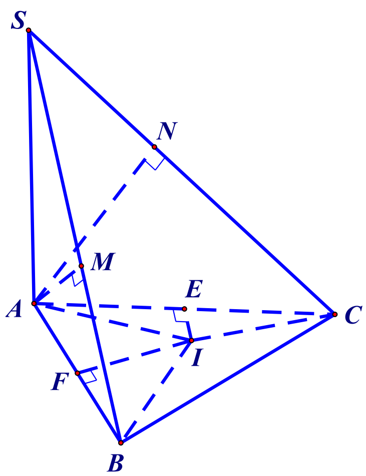
Thể tích khối cầu bằng $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^3=\pi a^3\sqrt{6}$.

Câu 31. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2022)** Cho hình chóp $S.ABC$, có SA vuông góc với đáy, $AB=3$, $AC=2$, $\widehat{BAC}=60°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$.

A. $R=\frac{4}{\sqrt{3}}$. **B.** $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$. **C.** $R=1$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $IA=IB=IC$.

Gọi E là trung điểm của AC, thì IE là trung trực của $AC \Rightarrow IE \perp AC$, mà $IE \perp SA \Rightarrow IE \perp (SAC) \Rightarrow IE \perp (NAC)$

ΔNAC vuông tại $N \Rightarrow E$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔNAC.

Nên IE là trục của $\Delta NAC \Rightarrow IA = IC = IN$.

Tương tự, gọi F là trung điểm của AB, thì IF là trung trực của $AB \Rightarrow IF \perp AB$, mà $IF \perp SA \Rightarrow IF \perp (SAB) \Rightarrow IF \perp (MAB)$

ΔMAB vuông tại $M \Rightarrow F$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMAB.

Nên IF là trục của $\Delta MAB \Rightarrow IA = IB = IM$.

Vậy nên $IA = IB = IC = IM = IN = R$. I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $A.BCNM$.

Bán kính mặt mặt cầu ngoại tiếp này chính là bán kính mặt cầu ngoại tiếp ΔABC.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}.3.2 \sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lí cosin: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos \widehat{BAC}} = \sqrt{3^2 + 2^2 - 2.3.2 \cos 60^\circ} = \sqrt{7}$.

Vậy nên $R = \dfrac{AB.BC.CA}{4S_{\Delta ABC}} = \dfrac{3.\sqrt{7}.2}{4.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.