**ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC**

**I. KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**Định lí 1:** Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tam giác.

**Định lí 2 :** Trong một tam giác cân, đường cao ứng với cạnh đáy đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến, đường trung trực của tam giác đó.

**Nhận xét:** Trong một tam giác, nếu có hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực, đường cao) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Trên hình dưới đây, $H$ là trực tâm của các tam giác.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| *Tam giác nhọn thì trực tâm nằm bên trong tam giác.*  | *Tam giác vuông thì trực tâm chính là đỉnh góc vuông của tam giác đó.*  | *Tam giác tù thì rực tâm nằm ngoài tam giác đó.* |

**II. BÀI TẬP**

**Bài 1:**

Cho hình bên có $AM⊥BC$ tại $M$, $CN⊥AB$ tại$N$.

a) Chứng minh $BK⊥AC$.

b) Cho $MA=MB$, $\hat{ACB}=55^{0}$. Tính $\hat{MKN},\hat{KBN}$.

**Bài 2:** Chứng minh định lý: “một tam giác có hai đường cao (*xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn*) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.”

**Bài 3:**  Cho tam giác ABC $\left(\hat{C}=90^{0}\right)$ có đường cao CD. Với AM và CN lần lượt là trung tuyến của tam giác ADC và tam giác DCB. Kẻ $BK⊥AB$ sao cho BK cắt MN tại K.

1. Chứng minh: $ΔCMB=ΔKBM$.
2. Chứng minh: $AM⊥CN$.

**Bài 4:** Cho tam giác ABC. Qua mỗi đỉnh A, B, C vẽ các đường thẳng song song với cạnh đối diện, chúng cắt nhau tạo thành tam giác $DEF$. Chứng minh nếu O là điểm cách đều D, E, F thì O là trực tâm của tam giác ABC.

Bài 5: Cho tam giác $ABC$ có các đường cao $BE,CF$ cắt nhau tại $H(E\in AC;F\in AB).$ Gọi $I,K$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AH,BC.$

a) Chứng minh $FK⊥FI;$

b) Cho $AH=6$cm; $BC=8$cm. Tính $IK.$

**Bài 6:**  Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trến tia đối của tia AC lấy

điểm N sao cho $AN=AM,$ MN cắt BC ở D.

a) Chứng minh: $ΔNDC$ vuông cân.

b) Chứng minh: $CM⊥NB$.

c) Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\hat{ABE}=30^{0}$. Trên tia đối của AB lấy điểm F sao cho $AF=AE$ . Vẽ điểm I sao cho FC là trung trực của EI. Tính $\hat{BFI}$.

***Bài tập bổ sung***

**Bài 7:**  Cho $ΔABC$ cân ở $A$ có $AD$ là trung tuyến, đường cao $BE$ cắt $AD$ở $H.$

a) Chứng minh $CH⊥AB.$

b) Vẽ điểm $I$sao cho $A$ là trung điểm của $CI,$ vẽ đường cao $AK$ của $ΔBAI.$ Tính $\hat{KAD.}$

c) $AB$ cắt $DK$ tại $J.$ Chứng minh $AB=DK$và $J$ là trung điểm chung của $AB$ và $DK.$

d) Gọi $O$ là trung điểm của $AC.$ Trên tia đối của tia $OB$ lấy điểm $L$ sao cho $OL=OB.$ Chứng minh $K,A,L$ thẳng hàng.

e) Cho biết $AC=17cm,BC=16cm.$ Tính $KI,BO.$

Bài 8: Cho tam giác $ABC$vuông tại $A.$ Từ $C$kẻ tia $Cx$ vuông góc với cạnh $BC;$ gọi $F$là giao điểm của tia $Cx$ và phân giác trong của góc $B;$ kéo dài $BF$cắt $AC$ở $E.$ Kẻ $CD$vuông góc với $EF(D\in EF).$ Kéo dài $BA$ cắt $CD$ tại $S.$ Chứng minh:

a) $CD$là tia phân giác của $\hat{ECF};$

b) $DE=DF;$

c) $SE // CF.$

***Hết***

**HDG**

**Bài 1:** a) K là trực tâm của $ΔABC$ $⇒BK⊥AC$

b) $ΔAMB​$ cân tại M $⇒\hat{ABC}=\hat{BAM}=45°$

$BAC=180°-\left(\hat{ABC}+\hat{ACB}\right)=180°-100°=80°$

$⇒\hat{MAC}=80°-45°=35°$

$\hat{KCH}=\hat{ACB}-\hat{NCB}=55°-45°=10°$

$\hat{KCH}=\hat{KBN}=10°$; $MKN=180°-45°=135°$

**Bài 2:** Xét $ΔABC$ có các đường cao $BD,CE$ bằng nhau.

$ΔABD=ΔACE$ (cạnh góc vuông- góc nhọn)

$⇒AB=AC$

Do đó $ΔABC$cân tại A.

**Bài 3:**
a) $CM⊥AB, BK⊥AB⇒CM // BK ⇒\hat{CMB}=\hat{KBM}$ (so le trong)

Xét $ΔMDN, ΔKBN$ có: $\hat{DNM}=\hat{BNK}$ (đối đỉnh);

$DN=NB$ (do CN là trung tuyến của $ΔDCB$ )

$\hat{MDN}=\hat{KBN}=90^{0}$

$⇒ΔMDN=ΔKBN$ (g.c.g)

$⇒MD=BK$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $CM=MD$ (do AM là trung tuyến của $ΔADC$ )

$⇒CM=BK\left(=MD\right)$

Xét $ΔCMB, ΔKBM$ có: $CM=KB(cmt); \hat{CMB}=\hat{KBM}(cmt); MB$ chung

$⇒ΔCMB=ΔKBM\left(c.g.c\right)$

b) Ta có: $ΔCMB=ΔKBM\left(cmt\right)$ $⇒\hat{CBM}=\hat{KMB}$ (hai góc tương ứng)

Mà hai góc ở vị trí so le trong $⇒NM // BC$

Lại có $BC⊥AC$ (do $ΔABC$ vuông tại C)$⇒NM⊥AC$

Xét $ΔANC$ có $NM⊥AC (cmt), CD⊥AN (gt), NM∩CD = \left\{M\right\}$

$⇒M$ là trực tâm của $ΔANC$

$⇒AM⊥CN$ (tính chất ba đường cao)

**Bài 4:**

Chỉ ra $ΔADB=ΔBCA(g.c.g)⇒AD=BC$

Chỉ ra $ΔAEC=ΔCBA(g-c-g)⇒AE=BC$

Từ đó $AD=AE$ ; lại có $OD=OE$ nên $OA$ là đường trung trực của $DE$ hay $OA⊥DE;$ mà $⇒AO⊥BC$

Chứng minh tương tự $CO⊥AB;BO⊥AC$ nên O là trực tâm của $ΔABC$

**Bài 5:**

**a)** $ΔFKC$cân tại $K$ $⇒\hat{KFC}$ $=\hat{FCK}$

$ΔFIH$ cân tại $I⇒\hat{IFH}$ $=\hat{IHF}$ mà $\hat{IHF}$ $=\hat{NHC}$ (đối đỉnh)

 $⇒\hat{IFH}$ $=\hat{NHC}$ $(=\hat{IHF).}$

Ta có:$\left\{\begin{array}{c}\&\hat{IFH}=\hat{NHC}\\\&\hat{KFC}=\hat{KCF}\\\&\hat{NHC}+\hat{KCF}=90°\end{array}\right.⇒\hat{IFH}+\hat{KFC}=90°.$ $⇒IF⊥FK.$

b) Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông $IFK$ ta có:$IK^{2}=FI^{2}+FK^{2}=\left(\frac{AH}{2}\right)^{2}+\left(\frac{BC}{2}\right)^{2}=3^{2}+4^{2}=25$ $⇒IK=5$ cm.

**Bài 6:**

**a)** Do N thuộc tia đối của tai AC mà $AC⊥AB⇒AN⊥AB⇒\hat{BAN}=90°$ hay $\hat{NAM}=90°$

Mà $AN=AM⇒ΔAMN$ vuông cân tại A$⇒\hat{MNA}=45°$

Lại có $ΔABC$ vuông cân tại A $⇒\hat{ACB}=45°$ hay $\hat{ACD}=45°⇒\hat{NDC}=180°-\left(\hat{MNA}+\hat{DCA}\right)=180°-\left(45°+45°\right)=90°$

Xét $ΔNDC$có $\hat{NDC}=90°;\hat{MNA}=\hat{DCA}=45°$ $⇒$ $ΔNDC$ vuông cân tại D.

**b)** Do $\hat{NDC}=90°⇒ND⊥BC; BA⊥NC$ và $ND∩BA=\left\{M\right\}$

$⇒$ M là trực tâm của $ΔNCB$

$⇒CM⊥NB$ (tính chất ba đường cao của tam giác)

**c)** Gọi K là trung điểm của EI $⇒ΔBFK$ vuông tại K có $\hat{ABE}=30°⇒\hat{BFK}=60°.$

Ta có $AE=AF (gt) ; \hat{FAE}=90°⇒ΔAEF$ vuông cân tại A$⇒\hat{AEF}=45°$

Mà $\hat{BFK}=\hat{AFE}+\hat{EFK}=60°⇒45°+\hat{EFK}=60°⇒\hat{EFK}=15°.$

Do FC là trung trực của EI $⇒FE=FI⇒ΔIFE$ cân tại F

$⇒FK$ vừa là trung trực vừa là phân giác (tính chất tam giác cân)



$$⇒\hat{BFI}=\hat{BFK}+\hat{KFI}=60°+15°=75°$$

Vậy $\hat{BFI}=75°$